This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

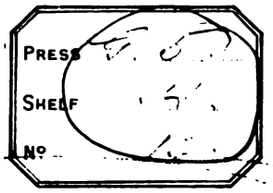
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.




Math. K. 15

C.

1875 d. 137/1

# C. G. J. Jacobi

# Mathematische Werke.

---

## Band I.

Berlin,
Druck und Verlag von G. Reimer.
1846.

RADCLIFFE LIBRARY
UNIVERSITY
13 JAN
MUSEUM
OXFORD

C. G. J. JACOBI

# OPUSCULA MATHEMATICA.

---

VOLUMEN I.

BEROLINI,
TYPIS ET IMPENSIS G. REIMERI.
1846.

RADCLIFFE LIBRARY
UNIVERSITY
13 JAN .6
MUSEUM
OXFORD

Seiner Majestät

# Friedrich Wilhelm dem Vierten

seinem Allergnädigsten König und Herrn

widmet dieses Buch

in tiefster Unterthänigkeit

der Verfasser.

## Allerdurchlauchtigster König,
## Grofsmächtigster König und Herr!

Eurer Königlichen Majestät gefeierter Urgrofsoheim hat während seiner Regierung die Hauptstadt Preufsens zu einem Mittelpunct der mathematischen Welt gemacht. Sogleich nach seiner Thronbesteigung berief er die Heroen der Mathematik an die erneuerte Akademie der Wissenschaften; von Basel Johann Bernoulli nebst seinen drei Söhnen, Euler von Petersburg, später Lagrange von Turin. Die ersten Mathematiker ihrer Zeit müfsten auch bei dem gröfsten Könige sein, lautete der Lagrange berufende Brief des preufsischen Ministers. Jene berühmte Mathematikerfamilie hielt das hohe Alter ihres Hauptes zurück. Euler hat in den zwanzig Jahren, in denen er der mathematischen Classe der Berliner Akademie als Director vorstand, die gesammte Mathematik umgestaltet. In andern zwanzig Jahren erhob sein Nachfolger Lagrange die Wissenschaft der mathematischen Analysis durch reiche Entdeckungen und vollendete Form zur glänzendsten Höhe. Der tiefsinnige und vielseitige Lambert wurde eine Zierde unserer Akademie. Auch an der Universität in Halle folgte dem zurückgerufenen Wolff der berühmte Segner. Durch den Preufsenkönig wurde Frankreich auf D'Alembert aufmerksam.

Aber der Aufschwung der mathematischen Wissenschaft ist damals noch bei uns ein vorübergehender gewesen. Sie war noch kein Lebensbaum geworden, der in dem Boden des Preufsischen Volkes Wurzel geschlagen. Nach Friedrichs des Zweiten Tode wandte sich Lagrange nach Paris, wo er dem mit der Revolution hereinbrechenden Elend erlegen wäre, wenn nicht Eurer Königlichen Majestät Grofsvater Majestät durch edelmüthige Unter-

stützung in der Ferne den Mathematikern ihren ersten Stern erhalten hätte. Nach dem Vorübergange des Schreckens erhob die Mathematik in Frankreich rasch wieder ihr Haupt. Da es dort keine Schulen mehr gab, so traten die Mathematiker des ganzen Landes, Lehrer und Schüler, sechstausend an der Zahl, zusammen und beriethen, wie für die Zukunft der mathematische Unterricht einzurichten wäre. Die aus diesen Berathungen hervorgegangene Pariser polytechnische Schule hat dort wesentlich dazu beigetragen, die höheren mathematischen Kenntnisse in weiten Kreisen zu verbreiten. Napoleon stellte zuerst den Grundsatz auf, dafs dem Genie in der Wissenschaft und Kunst eben die höheren Ehren und Belohnungen des Staates gebührten, welche den bei der Verwaltung, Rechtspflege und dem Kriegswesen betheiligten Dienern zu werden pflegen. Der ehemalige Director unserer Akademie wurde von ihm in den Grafenstand und zum Senator erhoben. Seinen greisen Vater in Turin beglückwünschte eine Deputation der Regierung im Namen der französischen Nation zu dem Besitz eines solchen Sohnes. Mit diesem glänzten dort fünf andere mathematische Namen ersten Ranges, und es schien Frankreich, wie in den Waffen, so auch in der Mathematik unüberwindlich.

Nachdem es nun aber auf dem Kriegsfelde glücklich besiegt worden, haben wir, wie in der Sage von der Hunnenschlacht die Schatten in den Lüften fortkämpften, in den Regionen des Gedankens weitergekämpft, unterstützt von der heiligen Allianz mit dem Geiste, die Preufsen geschlossen, und manchen glorreichen Sieg in den Wissenschaften erstritten. Und so rühmen wir uns auch in der mathematischen Wissenschaft, nicht mehr die zweiten zu sein.

Seit dem Regierungsantritt des Zweiten Friedrichs ist das Jahrhundert abgerollt, und auf's neue sehen wir hoch auf dem Gipfel seiner Zeit, als eine Leuchte Gottes, **den König**, und aufs neue unter Seiner schirmenden Aegide Sein Preufsenland einen bewunderten Mittelpunct der wissenschaftlichen Welt. Aber es sind jetzt nicht mehr Fremde, welche kommen, um den Glanz ihres wissenschaftlichen Ruhmes in dem Glanze des Thrones zu spiegeln, und weiterziehen. Es sind die Kinder des eignen Volkes; aus dem Osten, dem Westen, aus den Marken, aus allen Gauen des Reiches **Eurer Majestät** sind sie zusammengetreten, um den Dom der Wissenschaft aufzubauen und seinen hohen Chor immer höher zu wölben. Als sichtbares Zeichen allem Volke, dafs die Ehre wissenschaftlichen Werkes solle hochgehalten werden, hat **der Königliche Bauherr** jene in ihrer Art einzige Ordensstiftung gestellt, welche zugleich ein Band um die Werkmeister aller Länder schlingt. In der Nähe Seines Thrones sehen wir freudig den weisen Altmeister, den vielgewanderten, in allen Zungen und Welttheilen gepriesenen, dessen Name das Symbol jeder Wissenschaftlichkeit ist.

An dem ruhmvollen Werke freute auch ich mich Theil zu haben, als mich eine unheilvolle Krankheit von der Arbeit hinwegzunehmen drohte. **Eurer Königlichen Majestät** fürsorgende Gnade hat zur Wiederherstellung meiner Gesundheit mir einen längeren Aufenthalt in Rom, die Zurückversetzung in meine Heimath gewährt, mir die Mittel zur Subsistenz gesichert, hat gewollt, dafs ich in Mufse die wiedergewonnenen wenn auch erschütterten Kräfte ganz meinem wissenschaftlichen Berufe zuwenden soll. Es

hat mich gedrängt, ein Buch, zu dessen Anfang und Vollendung ich die Kraft allein durch diese Gnade **Eurer Majestät** gefunden habe, **Eurer Königlichen Majestät** als ein Zeichen meines innigen Dankgefühls zu Füfsen zu legen. Aber ich habe gezweifelt, ob eine aus allen Theilen der Mathematik zusammengefügte Mosaikarbeit sich den Augen **Eurer Majestät** darstellen dürfte; ob ich nicht die Vollendung einer der von mir vorbereiteten, vielleicht minder unwerthen, Arbeiten abwarten sollte, welche in mehr künstlerischer Einheit einen Hauptzweig der Wissenschaft abschliefsen. **Eurer Königlichen Majestät** dieses mein Werk, wie es ist, als Dankesopfer darzubringen, ermuthigte mich, wie ich gestehe, der Vorgang, dafs sich auch Name und Bildnifs Friedrichs des Zweiten vor der Sammlung mathematischer Abhandlungen JOHANN BERNOULLIS findet. Und so habe ich es gewagt, mit dem erhabnen Namen **Eurer Königlichen Majestät** auch mein Buch zu zieren; das Bild ist dem Innersten meines Herzens eingeprägt.

In tiefster Unterwürfigkeit ersterbe ich

**Grofsmächtigster König und Herr**

**Eurer Königlichen Majestät**

Berlin,
den 30. August 1846.

unterthänigster Diener
**C. G. J. Jacobi,**
Professor und Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

# Mathematische Abhandlungen.

# INDEX.

(Sämmtliche Abhandlungen sind auch in Crelle's „Journal für die reine und angewandte Mathematik Band XXVI. XXVII. XXIX. XXX. XXXII." erschienen.)


1. Über die Entwicklung des Ausdrucks

$$[aa - 2aa'(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')) + a'a']^{-\frac{1}{2}}.$$ . . Seite 1.

2. Über die zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen zweckmäfsigsten Formeln. . . . . — 8.

3. Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps. (Lû à l'académie des sciences de Paris, 8 Août 1842.) . . . . . — 30.

4. Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.

Argumentum. . . . . §. 1. — 47.

Caput primum.

Novi Multiplicatoris definitio et variae proprietates.

Lemma fundamentale de Determinantibus functionalibus partialibus eiusque varii usus. . . . . §. 2. — 49.

Novi Multiplicatoris definitio. Aequatio differentialis partialis cui satisfacit. Variae formae quas Multiplicatoris valor induere potest. . . §. 3. — 57.

Multiplicatoris expressio generalis. Bini Multiplicatores suppeditant Integrale. Expressio generalis functionum quarum datur Determinans. §. 4. — 66.

Multiplicator per aequationem differentialem partialem definitur. Conditio ut Multiplicator aequari possit unitati. . . . . §. 5. — 71.

Cognito quocunque systematis aequationum differentialium vulgarium Multiplicatore eruuntur Determinantia functionum variabilium quae per aequationes integrales completas valoribus earum initialibus aequivalent. . . . . §. 6. — 73.

Multiplicatoris definitio per aequationem differentialem vulgarem. . . §. 7. — 77.

Aequationis $X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n} = 0$ Multiplicatore pars laeva eius efficitur Determinans functionale completum. Multiplicatorem nihilo aut infinito aequando eius obtinetur solutio. Pro solutione singulari Multiplicator fit infinitus. . . . . §. 8. — 81.

Caput secundum.

## De usu novi Multiplicatoris in aequationibus differentialibus integrandis. Principium ultimi Multiplicatoris.

De Multiplicatore aequationum differentialium transformatarum e propositarum derivando. . . . . §. 9. Seite 90.

Multiplicator aequationum differentialium ope Integralium completorum reductarum e Multiplicatore propositarum eruitur. Pro reductionibus diversis Multiplicatores alii de aliis deducuntur. . . . . §. 10. — 94.

Principium ultimi Multiplicatoris, sive quomodo cognito Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium ultima integratio ad Quadraturas revocetur. . . . . §. 11. — 99.

Quibus casibus Multiplicator aequationum differentialium per aequationes integrales *particulares* reductarum ex aequationum differentialium propositarum Multiplicatore eruatur. Principium ultimi Multiplicatoris sine Determinantium adiumento comprobatum. . . . . §. 12. — 104.

De usu Multiplicatoris in integrandis systematis quibusdam aequationum differentialium specialibus. . . . . §. 13. — 111.

Caput tertium.

## Theoria novi Multiplicatoris ad varia exempla applicata.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis. . . . . §. 14. — 117.

Principium ultimi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium cuiuslibet ordinis applicatum. . . . . §. 15. — 119.

Formula symbolica qua Multiplicator systematis aequationum differentialium *impliciti* definiri potest. . . . . §. 16. — 121.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium linearium. . §. 17. — 125.

Aequationes differentiales secundi ordinis quarum assignare licet Multiplicatorem. Exempla *Eulerianna*. . . . . §. 18. — 129.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium quod mediante solutione completa unius aequationis differentialis partialis primi ordinis complete integratur. . . . . §. 19. — 134.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium quod mediante solutione completa problematis *Pfaffiani* complete integratur. Conditiones ut aequatio differentialis vulgaris linearis primi ordinis inter $p$ variabiles per pauciores quam $\frac{1}{2}p$ aequationes integrari possit. . . . . §. 20. 21. — 140.

Novum Principium Generale Mechanicum quod e Principio Ultimi Multiplicatoris fluit. . . . . §. 22. — 157.

De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma *Lagrangiana* secunda exhibitarum. . . . . §. 23. — 166.

De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma tertia exhibitarum. Multiplicatores trium formarum aequationum differentialium dynamicarum inter se comparantur. Principium ultimi multiplicatoris ad tertiam formam relatum. . . . . §. 24. — 169.

De motu puncti versus centrum fixum attracti. . . . . §. 25. Seite 175.

Motus puncti versus duo centra fixa secundum legem *Neutonianam* attracti. . . . . §. 26. — 183.

De corporis solidi ictu impulsi rotatione circa punctum fixum. . . . §. 27. — 187.

De problemate trium corporum in eadem recta motorum. Substitutio *Eulerima*. Theoremata de viribus Coordinatarum functionibus homogeneis expressis. . . . . §. 28. — 196.

Principium ultimi Multiplicatoris applicatur ad systema liberum punctorum materialium in medio resistente motum. De cometa in aethere resistente circa solem moto. . . . . §. 29. — 205.

De multiplicatore aequationum differentialium isoperimetricarum. . §. 30. 31. — 212.

De aequationum differentialium cuiuslibet ordinis et formae reductione ad formam normalem et formula symbolica qua reductarum Multiplicator definitur. Aequationum differentialium isoperimetricarum ad formam normalem reductarum Multiplicator. . . . . §. 32. 33. — 218.

5. Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. . . . . — 227.

6. Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine. (Estratto dal giornale arcadico Tomo XCVIX.) . . . . . — 271.

7. Neues Theorem der analytischen Mechanik. (Aus den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838.) . . — 277.

8. Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung. . . . . — 281.

9. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochene rationale Function. . . . . — 287.

10. Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. Wiss. (Aus den Monatsberichten der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom Jahre 1837.) . . . . . — 317.

11. Note sur les fonctions Abéliennes, lue le 29 mai 1843 à l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg . . . . . — 335.

12. Über einige die elliptischen Functionen betreffende Formeln. . . . . — 337.

13. Über den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - A\cos\varphi - B\sin\varphi}$ für imaginäre Werthe von $A$ und $B$ annimmt. . . . . — 339.

14. Beweis des Satzes, dafs jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann. . — 345.

15. Extrait d'une lettre adressée à M. *Hermite*. . . . . — 357.

16. Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höhern Transcendenten. . . . . Seite 363.

17. Über einige der Binomialreihe analoge Reihen. . . . . — 375.

18. Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen. . . . . — 383.

19. Extraits de deux lettres de M. *Charles Hermite* à M. *Jacobi*. . . . . — 391.

# 1.

# Ueber die Entwicklung des Ausdrucks

$$[aa - 2aa'(\cos\omega\cos\Phi + \sin\omega\sin\Phi\cos(\vartheta - \vartheta')) + a'a']^{-\frac{1}{2}}.$$

---

## 1.

Man kann einen Ausdruck von der Form

$$V = \frac{1}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$$

durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{A+iB\cos\eta+iC\sin\eta},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, darstellen. Setzt man in dieser Formel

$$A = a\cos\omega - a'\cos\Phi,$$
$$B = a\sin\omega\cos\vartheta - a'\sin\Phi\cos\vartheta',$$
$$C = a\sin\omega\sin\vartheta - a'\sin\Phi\sin\vartheta',$$

so erhält man den zur Entwicklung vorgelegten Ausdruck durch das bestimmte Integral

$$V = \frac{1}{\sqrt{[(aa - 2aa'(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta-\vartheta')) + a'a']}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{a(\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)) - a'(\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta))}$$

ausgedrückt. Es wird daher, wenn man

$$V = \frac{Y_0}{a} + Y_1\frac{a'}{a^2} + Y_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}$$

setzt, das allgemeine Glied der Entwicklung $Y_n$ durch das bestimmte Integral

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta)]^n d\eta}{[\cos\omega + \sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}}$$

gegeben. Setzt man

$$[\cos\Phi + i\sin\Phi\cos(\vartheta'-\eta)]^n = X_n + 2iX_n'\cos(\vartheta'-\eta) - 2X_n''\cos 2(\vartheta'-\eta) \text{ etc.}$$
$$[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{-(n+1)} = P_n + 2iP_n'\cos(\vartheta-\eta) - 2P_n''\cos 2(\vartheta-\eta) \text{ etc.},$$

so giebt die vorstehende Formel:

$$Y_n = P_nX_n - 2P_n'X_n'\cos(\vartheta-\vartheta') + 2P_n''X_n''\cos 2(\vartheta-\vartheta') \text{ etc.}$$

Die Gröfsen $P_n$, $P_n'$ etc. hängen nur von $\omega$, die Gröfsen $X_n$, $X_n'$ etc. nur

von $\Phi$ ab. Sie müssen ferner dieselben Functionen respective von $\omega$ und $\Phi$, oder nur um einen Zahlenfactor verschieden sein, da $V$ und also auch $Y_n$ ungeändert bleibt, wenn man $\Phi$ und $\omega$ mit einander vertauscht.

Setzt man $\omega = 0$, so erhält man aus dem Vorigen:

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\Phi + i\sin\Phi\cos(\vartheta'-\eta)]^n\, d\eta = X_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(aa-2aa'\cos\varphi+a'a')}} = \frac{X_0}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}$$

Setzt man $\Phi = 0$, so erhält man

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{-(n+1)}\, d\eta = P_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(aa-2aa'\cos\omega+a'a')}} = \frac{P_0}{a} + P_1\frac{a'}{a^2} + P_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.},$$

wo die ersten Coëfficienten $X_0 = P_0 = 1$ werden, wie sich ergiebt, wenn man $a = 0$ setzt. In den beiden Integralen, durch welche $X_n$ und $P_n$ bestimmt werden, kann man für $\vartheta'-\eta$, $\vartheta-\eta$ blofs $\eta$ schreiben. Da die beiden Radicale gleich werden, wenn man $\Phi = \omega$ setzt, so folgt, dafs $P_n$ und $X_n$ genau dieselben Functionen respective von $\omega$ und $\Phi$ sind.

Die im Vorhergehenden bewiesenen Formeln geben folgenden Satz:

„Wenn $\frac{1}{\sqrt{(aa-2aa'\cos\varphi+a'a')}} = \frac{1}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3}$ etc., und $P_n$ dieselbe Function von $\omega$ wie $X_n$ von $\Phi$ ist, so hat man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{[aa-2aa'(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta-\vartheta'))+a'a']}}$$
$$= \frac{1}{a} + P_1X_1\frac{a'}{a^2} + P_2X_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}"$$

Dieses schöne, von *Legendre* gefundene Resultat und die Anwendungen, die er davon gemacht, haben den Anstofs zu *Laplace's* tiefsinnigen Untersuchungen über die Entwicklung der Functionen zweier Winkel gegeben.

## 2.

Die Ausdrücke von $X_n$, $X_n'$ etc., $P_n$, $P_n'$ etc. findet man mit Hülfe des *Taylor*schen Lehrsatzes und einer häufig anwendbaren Ausdehnung desselben auf Entwicklungen, welche nicht blofs die ganzen positiven Potenzen des Increments enthalten. Setzt man nämlich

$$\cos\Phi = x, \quad i\sin\Phi e^{i\eta} = z,$$

so hat man die merkwürdige Gleichung

$$2z[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\eta] = z[2\cos\varphi + i\sin\varphi e^{i\eta} + i\sin\varphi e^{-i\eta}]$$
$$= 2xz + zz - \sin^2\varphi = (x+z)^2 - 1,$$

und daher

$$[(x+z)^2-1]^n = 2^n z^n [\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\eta]^n$$
$$= 2^n z^n [X_n + iX_n' e^{i\eta} - X_n'' e^{2i\eta} - iX_n''' e^{3i\eta} \text{ etc.}$$
$$+ iX_n' e^{-i\eta} - X_n'' e^{-2i\eta} - iX_n''' e^{-3i\eta} \text{ etc.}]$$
$$= 2^n z^n \Big[X_n + X_n' \frac{z}{\sin\varphi} + X_n'' \frac{z^2}{\sin^2\varphi} + X_n''' \frac{z^3}{\sin^3\varphi} \text{ etc.}$$
$$- X_n' \sin\varphi . z^{-1} + X_n'' \sin^2\varphi . z^{-2} - X_n''' \sin^3\varphi . z^{-3} \text{ etc.}\Big].$$

Hier ist $X_n^{(m}$ in die beiden Ausdrücke

$$\frac{2^n}{\sin^m\varphi} z^{n+m} \quad \text{und} \quad (-1)^m 2^n \sin^m\varphi\, z^{n-m}$$

multiplicirt. Nach dem *Taylor*schen Lehrsatze sind aber die Coëfficienten von $z^{n+m}$ und $z^{n-m}$ in der Entwicklung von $[(x+z)^2-1]^n$:

$$\frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m).dx^{n+m}}, \qquad \frac{d^{n-m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n-m).dx^{n-m}};$$

wo $\Pi k = 1.2....k$. Man hat daher für $X_n^{(m)}$ die beiden Ausdrücke

$$X_n^{(m)} = \frac{\sin^m\varphi}{2^n} \cdot \frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m).dx^{n+m}} = \frac{(-1)^m}{2^n \sin^m\varphi} \cdot \frac{d^{n-m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n-m).dx^{n-m}}.$$

Für $m = 0$ geben beide

$$X_n = \frac{d^n.(x^2-1)^n}{2^n \Pi n.dx^n}.$$

Man kann daher für den ersten der beiden Ausdrücke von $X_n^{(m)}$ setzen:

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi n}{\Pi(n+m)} \cdot (1-xx)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m X_n}{dx^m}.$$

Führt man, um den Ausdruck von $P_n^{(m)}$ zu finden, die ähnlichen Bezeichnungen

$$\cos\omega = p \quad \text{und} \quad i\sin\omega e^{i\eta} = z$$

ein, so erhält man wieder

$$[(p+z)^2-1]^{-(n+1)} = (2z)^{-(n+1)} [\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta]^{-(n+1)}$$
$$= (2z)^{-(n+1)} \Big[P_n + P_n' \frac{z}{\sin\omega} + P_n'' \frac{z^2}{\sin^2\omega} + P_n''' \frac{z^3}{\sin^3\omega} \text{ etc.}$$
$$- P_n' \sin\omega . z^{-1} + P_n'' \sin^2\omega . z^{-2} - P_n''' \sin^3\omega . z^{-3} \text{ etc.}\Big].$$

Die Coëfficienten von $z^{-(n+1-m)}$, $z^{-(n+1+m)}$ werden hier

$$\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega} . P_n^{(m)}, \qquad (-1)^m 2^{-(n+1)} \sin^m\omega . P_n^{(m)}.$$

Um die Coëfficienten derselben Potenzen von $z$ aus der Entwicklung von $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$ zu erhalten, bemerke ich, dafs man dasselbe Prinzip,

welches die *Taylor*sche Reihe giebt, dafs nämlich die nach $p$ und $z$ genommenen partiellen Differentialquotienten einer Function von $p+z$ einander gleich sind, auch mit Vortheil auf Entwicklungen anwenden kann, welche, wie die hier vorliegenden, positive und negative Potenzen von $z$ in's Unendliche enthalten. Ist $u_k$ der Coëfficient von $z^k$, so wird der Coëfficient von $z^{k+m}$, je nachdem $k$ positiv oder negativ ist,

$$\frac{\Pi k}{\Pi(k+m)} \cdot \frac{d^m u_k}{dp^m} \text{ oder } \frac{(-1)^m \Pi(-k-m-1)}{\Pi(-k-1)} \cdot \frac{d^m u_k}{dp^m}$$

und der Coëfficient von $z^{k-m}$

$$\frac{\Pi k}{\Pi(k-m)} \int^m u_k \, dp^m \text{ oder } (-1)^m \frac{\Pi(-k+m-1)}{\Pi(-k-1)} \cdot \int^m u_k \, dp^m.$$

Nun kann man der Natur der Sache nach keinen Uebergang von den ganzen positiven zu den ganzen negativen Potenzen von $z$ machen, und umgekehrt. Denn da in der Entwicklung kein Logarithmus von $z$ vorkommt, so kann auch das nach $z$ genommene Differential nicht den Term $\frac{1}{z}$ enthalten. Es kann daher auch das ihm gleiche partielle Differential nach $p$ nicht den Term $\frac{1}{z}$ enthalten, oder: *der Coëfficient von* $\frac{1}{z}$ *in einer von* $\log z$ *freien Entwicklung einer Function von* $p+z$ *ist immer eine Constante.* Hieraus folgt allgemein, dafs der Coëfficient von $z^{-(1+k)}$ eine ganze rationale Function von $p$ von der $k$ten Ordnung ist.

In dem vorliegenden Problem ist $P_n$ und daher der Coëfficient von $z^{-(n+1)}$ gegeben. Denn da $P_n$ dieselbe Function von $p$ wie $X_n$ von $X$ ist, so hat man auch

$$P_n = \frac{d^n \cdot (p^2-1)^n}{2^n \Pi n \cdot dp^n}.$$

Da $2^{-(n+1)} P_n$ der Coëfficient von $z^{-(n+1)}$ ist, so wird nach dem Vorhergehenden, wenn man $k = -n-1$ setzt, der Coëfficient von $z^{-(n+1)+m}$

$$(-1)^m 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \cdot \frac{d^m P_n}{dp^m}$$

und der Coëfficient von $z^{-(n+1)-m}$

$$(-1)^m 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi n} \int^m P_n \, dp^m,$$

wo die nach einander zu bildenden Integrale für $p = \pm 1$ verschwinden müssen, da für $p = \pm 1$ die zu entwickelnde Function $z^{-(n+1)} = (+z)^{-(n+1)}$ wird, deren Entwicklung keine höheren negativen Potenzen als die $-(n+1)$te enthält. Man hat daher für $P_n^{(m)}$ die beiden Ausdrücke

$$P_n^{(m)} = (-1)^m \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \sin^m\omega \frac{d^m P_n}{dp^m}$$
$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi n} \cdot \frac{1}{\sin^m\omega} \int^m P_n dp^m.$$

Vergleicht man die für $P_n^{(m)}$ und $X_n^{(m)}$ gefundenen Ausdrücke, so sieht man, dafs man $P_n^{(m)}$ aus $X_n^{(m)}$ erhält, wenn man $p$ für $x$ setzt und mit

$$(-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n \Pi n}$$

multiplicirt. Man hat daher zwischen den bestimmten Integralen, durch welche man $X_n^{(m)}$ und $P_n^{(m)}$ ausdrücken kann, die Relation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos m\eta\, d\eta}{[\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta]^{n+1}}$$
$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n \Pi n} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta]^n \cos m\eta\, d\eta$$
$$= (-i)^m 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \sin^m\omega \frac{d^{n+m}.(pp-1)^n}{dp^{n+m}},$$

wo $p = \cos\omega$ und $m \leqq n$. Einer meiner jüngeren Freunde, Herr Dr. ***Heyne,*** hat bemerkt, dafs die hier zwischen den bestimmten Integralen gefundene Relation in der ***Euler***schen Formel

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx\, dx}{[aa + 2ab\cos x + bb]^{n+1}}$$
$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n \Pi n} \cdot \frac{1}{(aa-bb)^{2n+1}} \int_0^\pi [aa + 2ab\cos x + bb]^n \cos mx\, dx$$

enthalten ist, wenn man $a = \cos\frac{1}{2}\Phi$, $b = i\sin\frac{1}{2}\Phi$ setzt.

Substituirt man die für $X_n^{(m)}$, $P_n^{(m)}$ gefundenen Werthe

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi n . \sin^m\varphi}{\Pi(n+m)} \cdot \frac{d^m X_n}{dx^n},$$
$$P_n^{(m)} = (-1)^m \frac{\Pi(n-m)\sin^m\omega}{\Pi n} \cdot \frac{d^m P_n}{dp^n}$$

in den für $Y_n$ gefundenen Ausdruck

$$Y_n = P_n X_n - 2P_n' X_n' \cos(\vartheta - \vartheta') + 2P_n'' X_n'' \cos 2(\vartheta - \vartheta') - \text{ etc.},$$

so erhält man

$$Y_n = P_n X_n + \frac{2\Pi(n-1)\sin\omega\sin\varphi}{\Pi(n+1)} \cdot \frac{dP_n}{dp} \cdot \frac{dX_n}{dx} \cos(\vartheta - \vartheta')$$
$$+ \frac{2\Pi(n-2)\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\Pi(n+2)} \cdot \frac{d^2 P_n}{dp^2} \cdot \frac{d^2 X_n}{dx^2} \cos 2(\vartheta - \vartheta') + \text{ etc.},$$

welches die von ***Laplace*** auf ganz verschiedenem Wege gefundene Reihe ist.

Wir fanden allgemein für den Coëfficienten von $z^{-n-1-m}$ in der Entwicklung von $[(z+p)^2-1]^{-n-1}$:

$$(-1)^m 2^{-n-1} \sin^m\omega . P_n^{(m)} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{n+1}\Pi n} \int^m P_n dp^n.$$

Setzt man für $P_n$ seinen Werth, so kann man denselben, wenn $m > n$, so darstellen:

$$\frac{(-\sin\omega)^m P_n^{(m)}}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n} \int^{m-n} (pp-1)^n . dp^{m-n}.$$

Der Coëfficient von $z^{-n-1+m}$ war

$$\frac{P_n^{(m)}}{2^{n+1}\sin^m\omega};$$

er findet sich daher durch die vorstehende Gleichung:

$$\frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n} \cdot \frac{1}{(pp-1)^m} \int^{m-n} (pp-1)^n dp^{m-n}.$$

Diese Formel giebt die Coëfficienten aller positiven Potenzen von $z$ in der vorgelegten Entwicklung. Setzt man in derselben $m = n+1$, so erhält man den von $z$ freien Term

$$\frac{P_n^{(n+1)}}{2^{n+1}\sin^{n+1}\omega} = \frac{(-1)^{n+1}\Pi(2n+1)}{2^{2n+1}.\Pi n\,\Pi n} \cdot \frac{1}{(pp-1)^{n+1}} \int (pp-1)^n dp.$$

Aber durch dieselbe Betrachtung, welche die *Taylor*sche Reihe giebt, findet man auch hier den Coëfficienten der positiven Potenz $z^{m-n-1}$, wenn man den von $z$ freien Term $m-n-1$mal nach $p$ differenziirt und durch $\Pi(m-n-1)$ dividirt. Man erhält daher für diesen Coëfficienten, wenn $m > n+1$, den doppelten Ausdruck

$$\frac{P_n^{(m)}}{2^{n+1}\sin^m\omega} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n} \cdot \frac{1}{(pp-1)^m} \int^{m-n} (pp-1)^n dp^{m-n}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\Pi(2n+1)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n\,\Pi(m-n-1)} \cdot \frac{d^{m-n-1}.[(pp-1)^{-n-1} \int (pp-1)^n dp]}{dp^{m-n-1}}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Formen ergiebt die Gleichung

$$\int^{m-n} (pp-1)^n dp^{m-n} =$$

$$(-1)^{m-n-1} \frac{\Pi(2n+1).(pp-1)^m}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m-1)} \cdot \frac{d^{m-n-1}.[(pp-1)^{-n-1} \int (pp-1)^n dp]}{dp^{m-n-1}}.$$

Um eine convergirende Entwicklung zu erhalten, muſs man die beiden Factoren des vorgelegten Ausdrucks

$$\frac{1}{[(z+p)^2-1]^{n+1}} = \frac{1}{(p+1+z)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(z+p-1)^{n+1}},$$

den ersten nach aufsteigenden, den zweiten nach absteigenden Potenzen von $x$ entwickeln, wenn $p$ zwischen 0 und 1 liegt, und umgekehrt, wenn $p$ sich zwischen 0 und $-1$ befindet. So lange $p$ in den angegebenen Intervallen bleibt, bleibt auch die Entwicklung dieselbe. Da nun für $p = +1$ und für $p = -1$ keine höhern negativen Potenzen als die $-(n+1)$te in der Entwicklung vorkommen, so hat man in den für $P_n^{(m)}$ angegebenen Werthen die Integrale so zu nehmen, dafs sie für $p = 1$ oder für $p = -1$ verschwinden, je nachdem $p$ positiv oder negativ ist. Wenn $m \leqq n$, werden beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

Königsberg am 29. Mai 1843.

# 2.

# Zur Theorie der elliptischen Functionen.

1.

Unter den Formeln, durch welche man die vielen von mir in den *Fundam. nov.* gegebenen Entwicklungen mit leichter Mühe noch vermehren kann, scheint mir die nachfolgende, welche die Tangente der halben Differenz der Amplitude des Integrals $u$ und der Gröfse $\frac{\pi u}{2K}$ selber ergiebt, einen eigenthümlichen Character zu haben.

Da $$\sqrt{\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)},$$

so kann man die Formel *F. N.* S. 99 (4.) wie folgt schreiben:

1. $$\sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)\ldots.}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)\ldots.}.$$

In der Formel (S. 183)

$$\sqrt[4]{q}.\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.$$
$$= \frac{\sqrt[4]{q}.\sin x - \sqrt[4]{q^9}.\sin 3x + \sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x - \ldots.}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.}$$

setze man $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)$ und $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)$ für $x$ und gleichzeitig $\sqrt[4]{q}$ für $q$, so erhält man nach Division mit $\sqrt[4]{q}$ den Zähler und Nenner in (1.), und daher

2. $$\sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \operatorname{tang}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$= \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x) - q\sin 3(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x) + q^3\sin 5(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x) - \ldots.}{\sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x) - q\sin 3(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x) + q^3\sin 5(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x) - \ldots.},$$

wo die Exponenten von $q$ die dreieckigen Zahlen sind. Setzt man hierin $\frac{1}{2}\pi - x$ für $x$, so erhält man

3. $$\operatorname{tang}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}x - q\sin\frac{3}{2}x + q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \ldots.}{\cos\frac{1}{2}x + q\cos\frac{3}{2}x + q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \ldots.}.$$ *)

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die Formel
$$\sqrt{k'}\operatorname{tang}\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u.\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\operatorname{coam}u))},$$
welche etwas bequemer als die von *Legendre* für die Halbirung gegebne ist.

Nach der S. 31 gemachten Bemerkung gehen $\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ und $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}$ in einander über, wenn man $-q$ für $q$ setzt. Die vorstehende Formel giebt daher sogleich auch folgende:

$$3.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin\frac{1}{2}x + q\sin\frac{3}{2}x - q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \ldots.}{\cos\frac{1}{2}x - q\cos\frac{3}{2}x - q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \ldots.},$$

wo im Zähler und Nenner immer zwei positive und zwei negative Zeichen mit einander abwechseln. Man erhält aus dieser Formel, wenn $i = \sqrt{-1}$,

$$4.\quad \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = e^{i\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}ix} - qe^{-\frac{3}{2}ix} - q^3e^{\frac{5}{2}ix} + q^6e^{-\frac{7}{2}ix} + q^{10}e^{\frac{9}{2}ix} - \ldots.}{e^{-\frac{1}{2}ix} - qe^{\frac{3}{2}ix} - q^3e^{-\frac{5}{2}ix} + q^6e^{\frac{7}{2}ix} + q^{10}e^{-\frac{9}{2}ix} - \ldots.}$$

und hieraus

$$e^{i\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)} = \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}$$

$$= \frac{1 - qe^{-2ix} - q^3e^{2ix} + q^6e^{-4ix} + q^{10}e^{4ix} - \ldots.}{1 - qe^{2ix} - q^3e^{-2ix} + q^6e^{4ix} + q^{10}e^{-4ix} - \ldots.}$$

oder

$$5.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right) =$$

$$\frac{(q - q^3)\sin 2x - (q^6 - q^{10})\sin 4x + (q^{15} - q^{21})\sin 6x - \ldots.}{1 - (q + q^3)\cos 2x + (q^6 + q^{10})\cos 4x - (q^{15} + q^{21})\cos 6x + \ldots.}.$$

Diese merkwürdige Formel ist zur Berechnung einzelner Werthe oder von Tafeln vorzugsweise bequem. Da $\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{k'}}$, also

$$\operatorname{tang}(\operatorname{am}\tfrac{1}{2}K - 45^0) = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

so erhält man aus (4.), wenn man $x = \frac{1}{4}\pi$ setzt,

$$6.\quad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'} + \sqrt{(2(1 + k'))}} = \frac{q - q^3 - q^{15} + q^{21} + q^{45} - q^{55} - \ldots.}{1 - q^6 - q^{10} + q^{28} + q^{36} - q^{66} - \ldots.}.$$

Setzt man $q = b^e$, so erhält der Bruch rechts die Form

$$\frac{\Sigma \pm b^{(8k\pm 3)^2}}{\Sigma \pm b^{(8k\pm 1)^2}}.$$

Das Zeichen + oder — ist zu nehmen, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist.

Wenn der Modul der Einheit sehr nahe kommt, mufs man sich der Entwicklungen bedienen, welche statt der Kreisfunctionen Exponential-

gröfsen enthalten. Setzt man $ix$ für $x$ und $k'$ für $k$, so verwandelt sich

$$\tang \tfrac{1}{2} \am \frac{2Kx}{\pi} \quad \text{in} \quad i \tang \tfrac{1}{2} \am \frac{2Kx}{\pi},$$

und gleichzeitig $q$ in $q'$, wo $q$ und $q'$ durch die Gleichung

$$\log q \,.\, \log q' = \pi^2$$

mit einander verbunden sind. Nennt man $u$ das elliptische Integral erster Gattung und setzt

$$z = e^x = e^{\frac{\pi u}{2K'}}, \qquad \am(u, k) = \Phi,$$

so erhält man aus (4.) folgende Entwicklung von ebenfalls eigenthümlicher Form:

7. $$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\Phi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q' z^2 - q'^3 z^{-2} + q'^6 z^4 + q'^{10} z^{-4} - \ldots.}{1 - q' z^{-2} - q'^3 z^2 + q'^6 z^{-4} + q'^{10} z^4 - \ldots.}.$$

Wenn $\Phi$ sich sehr der Gränze $\frac{1}{2}\pi$ und daher $z$ der Gränze $\frac{1}{\sqrt{q'}}$ nähert, werden je zwei aufeinander folgende Terme in Zähler und Nenner nahe gleich oder entgegengesetzt. Vereinigt man sie in ein Glied, so bleibt die Convergenz noch überaus grofs. Ist z. B. $k = \frac{10}{11}$, so wird ungefähr $q = \frac{1}{8}$, so dafs die Formel (5.) noch sehr rasch convergirt. Aber es wird dann schon $q'$ ungefähr $\frac{1}{150}$, so dafs man für alle Amplituden mit der Formel

$$\tang(41^0 - \tfrac{1}{2}\Phi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q' z^2 - q'^3 z^{-2}}{1 - q' z^{-2} - q'^3 z^2}$$

ausreicht, um $\Phi$ bis auf $0''01$ genau zu haben.

Ich will noch einen sehr convergirenden Ausdruck für die ganzen Integrale zweiter Gattung hinzufügen. Vergleicht man nämlich die beiden Formeln *Fund.* S. 110.

$$\tfrac{1}{2}\pi A = \left(\frac{2xK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \am \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left[\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} \text{ etc.}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\pi B = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \am \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} \text{ etc.}\right],$$

so sieht man, dafs $A$ in $-B$, $B$ in $-A$ übergeht, wenn man $-q$ für $q$ setzt. Differenziirt man ferner die Formel *Fund.* S. 103 (3.), nemlich

$$\log \frac{2K}{\pi} = 4\left[\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{3(1+q^3)} + \frac{q^5}{5(1+q^5)} + \text{etc.}\right],$$

so erhält man

$$\frac{2q\,dK}{K\,dq} = B.$$

Hieraus folgt nach S. 184 (6.)

$$4q\frac{d}{dq}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}.B = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta(\varphi)}$$
$$= 8(q+4q^4+9q^9+16q^{16} \text{ etc.}).$$

Setzt man hierin $-q$ für $q$, wodurch $K$ in $k'K$, $B$ in $-A$ übergeht, so erhält man

$$\sqrt{k'}.k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta} = 8(q-4q^4+9q^9-16q^{16} \text{ etc.}),$$

und daher, durch Addition und Subtraction, zur Bestimmung der ganzen Integrale zweiter Gattung die Formeln:

$$C = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi+\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 16(q+9q^9+25q^{25}....)$$

$$D = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 64(q^4+4q^{16}+9q^{36} \text{ etc.}),$$

von denen besonders die zweite bemerkenswerth ist, indem sie zeigt, dafs der Werth des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

von der Ordnung der *sechsten* Potenz des Moduls und von

$$\frac{64q^4}{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

nur in Gröfsen von der Ordnung der *dreifsigsten* Potenz des Moduls verschieden ist, welche aufserdem noch durch überaus grofse Zahlen dividirt wird. Man sieht auch aus der vorstehenden Formel, dafs

$$B<A \quad \text{und} \quad B>\sqrt{k'}.A.$$

Um aus $D$ den Werth von $E^I$ zu finden, dient die Formel

$$(1+\sqrt{k'})E^I = \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})F^I + \frac{\frac{1}{2}\pi D}{\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Auch kann man die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^I - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

bemerken. Da immer

$$q>\frac{k^2}{16}, \quad q<\frac{k^2}{16k'},$$

so ist in der Entwicklung von $D$ der erste Term, welcher, extreme Fälle abgerechnet, allein einen Werth erhält, immer $<\frac{k^8}{1024k'^4}$. Man sieht,

wie genau für nicht allzugrofse Moduln die beiden Gröfsen

$$(1+\sqrt{k'})F^I \quad \text{und} \quad \sqrt{k'}\,(1+\sqrt{k'^3})E^I$$

mit einander übereinkommen, indem die Differenz, nach den Potenzen von $k^2$ entwickelt, mit dem Term $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{k^8}{1024}$ beginnt.

## 2.

Man kann bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vortheil die *Gaufsischen* Tafeln anwenden, in welchen für einen unter der Columne $A$ als Argument gegebenen $\log x$, wo $x>1$ der Werth von $\log(1+x)$ in der Columne $C$ sich befindet. Ich will hierüber in einige nähere Erörterungen eingehen.

Es sollen im Folgenden die Werthe von $A$ mit einem lateinischen Buchstaben und die entsprechenden von $C-\frac{1}{2}A-0.3010300$ mit dem entsprechenden griechischen bezeichnet werden, so dafs man, wenn $m>n$ und $a=\log\frac{m}{n}$,

$$\alpha = \log\frac{m+n}{2\sqrt{(mn)}}$$

oder $\alpha$ gleich dem Logarithmus des Verhältnisses des arithmetischen und geometrischen Mittels von $m$ und $n$ setzt. Ist $-a$ der Logarithmus des Complements eines gegebenen Moduls, so wird hiernach $-\alpha$ der Logarithmus des Complements des kleineren Moduls, in welchen der gegebene durch die *Landen*sche Substitution transformirt wird. Setzt man nun nacheinander

$$a=\log\frac{m}{n},\quad a'=\alpha,\quad a''=\alpha',\quad a'''=\alpha''\ \text{u. s. w.},$$

indem man immer den gefundenen Werth von $\alpha^{(i)}$ zum Argument $A$ macht und den entsprechenden Werth von $\alpha^{(i+1)}=C-\frac{1}{2}A-0.3010300$ aufsucht, bis man auf verschwindende Gröfsen kommt, so wird, nach der S. 97 angewandten Bezeichnung,

$$a=\log\frac{m}{n},\quad a'=\alpha=\log\frac{m'}{n'},\quad a''=\alpha'=\log\frac{m''}{n''}\ \text{etc.}$$

Man erhält ferner aus den Formeln

$$mn=n'n',\quad m'n'=n''n'',\quad \ldots.\quad m^{(i-1)}n^{(i-1)}=n^{(i)}n^{(i)}$$

die Gleichung

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}\ldots.\frac{m^{(i-1)}}{n^{(i-1)}}=\frac{n^{(i)}n^{(i)}}{nn},$$

und daher, wenn durch $\mu$ die Gränze bezeichnet wird, welcher die Gröfsen

$n^{(i)}$ sehr schnell sich nähern,

$$\log\mu = \log n + \tfrac{1}{2}[a + a' + a'' + \ldots].$$

Der so für $\mu$ erhaltene Werth giebt bekanntlich das ganze elliptische Integral erster Gattung durch die Formel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(m m \cos^2\varphi + n n \sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\mu}.$$

Die Gröfsen $n'$, $n''$ etc. selber findet man durch successive Addition von $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$ etc. vermittelst der Formeln

$$\log n' = \log n + \tfrac{1}{2}a, \quad \log n'' = \log n' + \tfrac{1}{2}a' \ldots,$$

und hieraus

$$\log m' = \log n' + a', \quad \log m'' = \log n'' + a'' \ldots.$$

*Gaufs* hat in seiner Abhandlung „Determinatio attractionis" auch eine sehr bequeme Anordnung für die Berechnung des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung mitgetheilt. Berechnet man nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{(m m - n n)}, \quad \lambda' = \frac{\lambda\lambda}{m'}, \quad \lambda'' = \frac{\lambda'\lambda'}{m''}, \ldots,$$

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \ldots}{\lambda\lambda},$$

so findet man nach einer Formel, welche im Wesentlichen mit der von *Legendre* gegebenen übereinkommt,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(m m \cos^2\varphi + n n \sin^2\varphi)}} = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Die Gröfsen $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'}{m'}$, $\frac{4\lambda''}{m''}$ etc. oder $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}$, $\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda'\lambda'}$ etc. sind der gegebene und die nach und nach transformirten Modulu. Nach *Fund.* S. 149 (4.) findet man die Gröfse $q$ durch die Formel

$$\log q = 2\log\lambda + a - \tfrac{3}{4}a' - \tfrac{3}{4}a'' - \tfrac{3}{8}a''' \text{ etc.}$$

Um das unbestimmte Integral erster Gattung zu finden, hat man nach *Fund.* S. 97 die Gröfsen $\Delta'$ aus den vorhergehenden $\Delta$ durch die Formel

$$\Delta' = \sqrt{\left(\frac{m m' (\Delta + n)}{m + \Delta}\right)}$$

zu berechnen, woraus folgt:

$$\frac{m'}{\Delta'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{m}{\Delta}}{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}{1 + \frac{\Delta}{n}}},$$

$$\frac{\Delta'}{n'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}{1 + \frac{m}{\Delta}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta}{n}}{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}}.$$

Setzt man daher

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad b = \log\frac{m}{\Delta}, \quad c = \log\frac{\Delta}{n},$$
$$a' = a, \quad b' = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma), \quad c' = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma),$$
$$a'' = \alpha', \quad b'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'-\gamma'), \quad c'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta'+\gamma'),$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.},$$

wo man immer, wenn man in den *Gaufsischen* Tafeln $A = a^{(i)}$, $b^{(i)}$ oder $c^{(i)}$ nimmt, die Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ oder $\gamma^{(i)}$ durch die Formel

$$C - \tfrac{1}{2}A - 0.3010300$$

erhält, so wird

$$\log\frac{m^{(i)}}{\Delta^{(i)}} = b^{(i)}, \quad \log\frac{\Delta^{(i)}}{n^{(i)}} = c^{(i)}.$$

Für das Integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = \Phi$$

findet man hiernach durch die Formel S. 98

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\Phi + \log\frac{\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots}{mm'm''\ldots}$$
$$= \log\operatorname{tang}\Phi + \log\frac{\mu}{m} - b' - b'' - b''' - \text{ etc.}$$

Man kann auch die ersten Gröfsen $\frac{m}{\Delta}$ und $\frac{\Delta}{n}$ auf analoge Art durch $\operatorname{tang}\Phi$ finden. Sind nämlich $b^0$, $c^0$ positive Gröfsen, welche durch die Gleichungen

$$\pm\log\operatorname{tang}^2\Phi = b^0, \quad \pm\log\frac{n^2}{m^2}\operatorname{tang}^2\Phi = c^0$$

bestimmt werden, so wird

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(\alpha^0+\beta^0-\gamma^0), \quad \log\frac{\Delta}{n} = c = \tfrac{1}{2}(\alpha^0-\beta^0+\gamma^0),$$

wo $\alpha^0 = a$. Die Gröfse $\mu\Phi$ ist der in den Reihen-Entwicklungen mit $x$ bezeichnete Winkel.

Aus der von *Gaufs* angewandten Substitution

$$\sin\Phi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos^2\varphi' + 2m\sin^2\varphi'}$$

findet man

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}, \quad \operatorname{tang}\Phi' = \frac{\Delta'}{m}\operatorname{tang}\Phi,$$

wo, wie im Vorhergehenden,

$$\Delta = \sqrt{(mm\cos^2\Phi + nn\sin^2\Phi)}, \quad \Delta' = \sqrt{(m'm'\cos^2\Phi' + n'n'\sin^2\Phi')}.$$

Hieraus folgt:

$\log\frac{\sin\varphi'}{m'} = \log\frac{\sin\varphi}{m} + \frac{1}{2}b - \beta$, $\log\frac{\sin\varphi''}{m''} = \log\frac{\sin\varphi'}{m'} + \frac{1}{2}b' - \beta'$, etc.,

$\log\cos\Phi' = \log\cos\Phi + b' + \frac{1}{2}b - \beta$, $\log\cos\Phi'' = \log\cos\Phi' + b'' + \frac{1}{2}b' - \beta'$, etc.

Man hat so durch die bereits berechneten Werthe von $b^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ und durch $\log\sin\Phi$, $\log\cos\Phi$ nacheinander durch blofse Addition die Werthe von $\log\sin\Phi'$, $\log\cos\Phi'$, $\log\sin\Phi''$, $\log\cos\Phi''$ etc. Diese Gröfsen dienen dazu, die von *Gaufs* für das *unbestimmte* Integral zweiter Gattung gegebne Formel zu berechnen, welche man, mit einer kleinen Veränderung, so darstellen kann:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = -\nu\Phi + \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m''} + \text{etc.}$$

Bezeichnet man das vorstehende Integral mit $P$ und, wie *Legendre*, mit $F^I$, $E^I$ die ganzen, mit $F(\Phi)$, $E(\Phi)$ die unbestimmten elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so dafs $F(\Phi) = \Phi$, so wird, für $m = 1$,

$$E(\Phi) = \tfrac{1}{2}(\Phi + P) + \tfrac{1}{2}(k'k')(\Phi - P),$$
$$\frac{E^I}{F^I} = \tfrac{1}{2}(1-\nu) + \tfrac{1}{2}(k'k')(1+\nu),$$

und daher

$$\frac{F^I E(\varphi) - E^I F(\varphi)}{F^I} = \tfrac{1}{2}k^2(P + \nu\Phi)$$
$$= \frac{mm-nn}{2mm}\left[\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} + \ldots\right].$$

Zufolge des oben für $\frac{\sin\varphi'}{m'}$ gegebenen Werthes wird

$$\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta(m+\Delta)}$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}(mm-nn)\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \log\frac{2m}{m+\Delta}.$$

Setzt man daher, wie in den *Fundam.*,

$$e^{\int_0^{\varphi}\frac{F^I E(\varphi) - E^I F(\varphi)}{F^I}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

und bemerkt die Formeln

$$(mm-nn)\frac{\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = m'm' - n'n', \quad (mm-nn)\frac{\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = m''m'' - n''n'', \text{ etc.},$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{d\varphi'}{\Delta'} = \frac{d\varphi''}{\Delta''} \text{ etc.},$$

[illegible] einen neuen zur Berechnung bequemen Ausdruck für die [illegible]:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(v)} = \frac{2m}{m+\Delta} \cdot \left(\frac{2m'}{m'+\Delta'}\right)^2 \cdot \left(\frac{2m''}{m''+\Delta''}\right)^4 \cdot \left(\frac{2m'''}{m'''+\Delta'''}\right)^8 \cdots$$

Da $\log\frac{2m}{m+\Delta} = \frac{1}{2}b-\beta$, so giebt diese Formel die folgende:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \tfrac{1}{2}b-\beta+b'-2\beta'+2b''-4\beta''+4b'''-8\beta''' \text{ etc.},$$

welcher man noch verschiedne andre Formen geben kann.

3.

Setzt man $k = \frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}$, $k^{(2)} = \frac{\sqrt{(m'm'-n'n')}}{m'}$, ferner

$$K^{(2)} = \tfrac{1}{2}(1+k').K, \qquad \Phi = \operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right),$$

so wird

$$\Phi' = \operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right).$$

Zufolge der S. 92 gemachten Bemerkung verwandelt sich daher $k$, $K$, $\Phi$ in $k^{(2)}$, $K^{(2)}$, $\Phi'$, wenn man $q^2$ für $q$ setzt. Dies erhält eine Bestätigung durch die Formel

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{m\operatorname{tang}\varphi'}{\Delta'} = \frac{2}{1+k'} \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}}.$$

Wenn man nämlich aus den S. 88 für $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ gegebnen Zerfällungen in unendliche Producte den Werth von $\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi}$ entnimmt und in demselben $q^2$ für $q$ setzt, so erhält man sogleich den Ausdruck für $\frac{1}{2}(1+k')\operatorname{tang}\Phi$. Umgekehrt kann man auf diese Art die vorstehende Formel, durch welche $\Phi$ aus $\Phi'$ bestimmt wird, unmittelbar aus jenen Factorenzerfällungen von $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ ableiten.

Für $m=1$ hat man die Formel S. 101 (16.):

$$\frac{2k'k'K}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2k'K}{\pi} \cdot \frac{\cos\operatorname{coam}u}{\cos\operatorname{am}u} = \operatorname{tang}x - \frac{4q\sin 2x}{1+q} + \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \text{ etc.}$$

Setzt man hierin $q^2$ für $q$, so verwandelt sich der Ausdruck links in

$$\frac{2k'}{1+k'} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}} = \frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\Phi.$$

Man kann daher zu den in den *Fundam.* mitgetheilten Reihen noch die folgende fügen:

$$\frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \operatorname{tang}x - \frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2} + \frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6} + \text{ etc.}$$

Ueberhaupt bietet die Betrachtung, durch welche diese Formel abgeleitet ist, ein wichtiges Mittel dar, aus den gefundnen Resultaten mit Leichtigkeit neue abzuleiten. Man bemerke z. B., dafs, wenn man in dem für $\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}}$ oben gefundnen Ausdruck $k^{(2)}$ für $k$ oder $q^2$ für $q$ setzt und ihn dann in's Quadrat erhebt, dasselbe Resultat sich ergiebt, als wenn man den Ausdruck mit $\frac{m+\Delta}{2m}$ multiplicirt. Da sich nach S. 52. $k'K$ dadurch, dafs man $q^2$ für $q$ setzt, in $\sqrt{k'}.K$ verwandelt und nach S. 165.

$$\frac{\Delta}{m}.\Theta(u) = \sqrt{k'}.\Theta(u+K)$$

ist, so erhält man hieraus die Gleichung

$$2\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u + \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K).$$

Die oben gegebne Gleichung

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}$$

kann man auch so darstellen:

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}.\sin^2\Phi' = \frac{m-\Delta}{m+\Delta}.$$

Aus der Formel S. 173 (1.) folgt aber, wenn man $k^{(2)}$ für $k$ setzt,

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}\sin^2\Phi' = \frac{\mathrm{H}^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}$$

und daher

$$\frac{\mathrm{H}^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \frac{m-\Delta}{m+\Delta} = \frac{\Theta u - \sqrt{k'}.\Theta(u+K)}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

woraus

$$2\mathrm{H}^2(\tfrac{1}{2}(1+k').u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u - \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K)$$

folgt. Ersetzt man die Formel

$$\sqrt{k^{(2)}}\sin\Phi' = \sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)}\sin\Phi' = \frac{k\sin\varphi}{1+\frac{\Delta}{m}}$$

durch die folgende:

$$\frac{\mathrm{H}(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \sqrt{k}.\frac{\mathrm{H}u}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

so erhält man

$$2\mathrm{H}(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}).\Theta(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)}\mathrm{H}(u):$$

eine Formel, welche sich unmittelbar aus der Darstellung von $\Theta u$ und $\mathrm{H}u$ als unendliche Producte ergiebt. Die drei gefundnen Formeln geben die Gleichungen

$$2[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\ldots.]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots.)$$
$$+(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots.)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots.),$$
$$8[\sqrt{q}.\sin x-\sqrt{q^9}.\sin 3x+\sqrt{q^{25}}.\sin 5x-\ldots.]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots.)$$
$$-(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots.)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots.),$$
$$[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\ldots.)(\sqrt{q}.\sin x-\sqrt{q^3}.\sin 3x+\sqrt{q^5}.\sin 5x\ldots.)$$
$$=(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\ldots.)(\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q}.\sin 3x=\sqrt[4]{q}.\sin 5x-\ldots.).$$

Dies sind die einfachsten Fälle sehr wichtiger und sehr allgemeiner Formeln für die Verwandlung der Potenzen und Producte der Functionen $\Theta u$ und $\mathrm{H}u$ in ein Aggregat lineärer Ausdrücke.

Die Rechnungsvorschriften, welche auf der von *Legendre* hauptsächlich untersuchten *Landen*schen Transformation beruhen, erfordern zur Auffindung der Werthe der unbestimmten Integrale erster Gattung den Gebrauch trigonometrischer Tafeln. Man berechnet $\Phi_1$, $\Phi_2$ etc. durch die Formel

$$\log\tang(\Phi_1-\Phi)=\log\tang\Phi-a, \quad \text{etc.}$$

Die Winkel $\frac{1}{2}\Phi$, $\frac{1}{2}\Phi_2$ etc. nähern sich sehr bald der Gränze

$$\mu\Phi=\mu\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi)}}.$$

Um die unbestimmten Integrale zweiter Gattung zu finden, setze man

$$\frac{Z}{m}=\frac{F^I E(\varphi)-E^I F(\varphi)}{F^I}=\frac{mm-nn}{2m}\left[\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta}+\nu\Phi\right]$$

und bezeichne mit $\frac{Z_i}{m^{(i)}}$ die analogen Gröfsen, welche man erhält, wenn man $m^{(i)}$, $n^{(i)}$, $\Phi_i$ für $m$, $n$, $\Phi$ setzt. Die *Legendre*schen Formeln geben dann

$$Z_1=Z-4\lambda'\sin\Phi_1, \qquad Z_2=Z_1-4\lambda''\sin\Phi_2, \quad \text{etc.}$$

und daher

$$Z=4[\lambda'\sin\Phi_1+\lambda''\sin\Phi_2+\lambda'''\sin\Phi_3+\text{etc.}].$$

Multiplicirt man diese Formel mit

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=\tfrac{1}{2}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1}=\tfrac{1}{4}\frac{d\varphi_2}{\Delta_2} \text{ etc.},$$

und bemerkt, dafs

$$\frac{4\lambda'\sin\varphi_1\, d\varphi}{\Delta}=\tfrac{1}{2}(mm-nn).\frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}=-\tfrac{1}{2}d\log\frac{\Delta}{m},$$

so erhält man durch Integration

$$e^{\int_0^{\varphi} \frac{Z d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{m}{\Delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{\Delta_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m''}{\Delta_2}} \cdot \ldots,$$

welches der in den *Fundam.* S. 151. durch Betrachtung der unendlichen Producte gefundne Ausdruck ist. Es steht aber dort aus Versehen der inverse Werth. Eben so müssen S. 150. für $\frac{1}{\sqrt{k'}} \Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{k^{(p)\prime}}} \Delta \operatorname{am} \frac{2K^{(p)}x}{\pi}$, $\Delta^{\frac{1}{4}} \Delta^{(2)\frac{1}{4}} \ldots$, $\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)}$ die inversen Werthe gesetzt werden. Die Grösen $\Delta$, $\Delta_1$ etc. kann man durch die Formeln

$$\cos(2\Phi - \Phi_1) = \frac{\Delta}{m}, \qquad \cos(2\Phi_1 - \Phi_1) = \frac{\Delta_1}{m'} \quad \text{etc.}$$

berechnen. Diese geben den Ausdruck

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2\varphi - \varphi_1))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\cos(2\varphi_1 - \varphi_2))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(\cos(2\varphi_2 - \varphi_3))}} \cdot \ldots,$$

welcher blos von den Amplituden abhängt. Will man die in den *Fundam.* mitgetheilte Berechnungsweise der Grösen $\Delta_1$, $\Delta_2$ etc. anwenden, so gebraucht man wieder mit Vortheil die *Gaufs*ischen Tafeln.

## 4.

Ich will die hauptsächlichsten der im Vorigen mitgetheilten Formeln durch ein von *Legendre* ebenfalls behandeltes numerisches Beispiel erläutern, welches sich auf einen schon ziemlich grofsen Modul $k = \sin 75^0$ bezieht.

Es sei

$$n = 1, \qquad \log n = \log \sin 15^0 = 9.4129962,$$
$$\Phi = 47^0\, 3'\, 30''\, 95,$$

wo $\operatorname{tang} \Phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Die benutzten Tafeln sind die auf 7 Stellen berechneten *Matthiessischen* (Altona 1817). Bei den Interpolationen ist noch immer die 8te Stelle mitgenommen worden, um den Fehler in der 7ten zu verringern.

Setzt man $a = \log \frac{1}{n} = 0.5870038$, ferner

$$\log \operatorname{tang} \Phi^2 = b^0 = 0.0624693.6,$$
$$\log \frac{n^2}{m^2} \operatorname{tang} \Phi^2 = c^0 = 8.8884617.6,$$

und sucht nach der in der Abhandlung angegebnen Regel aus den *Matthiessischen* Tafeln die Werthe

$$\beta^0 = 0.0011222.3,$$
$$\gamma^0 = 0.2870960.3,$$

so findet man nach und nach:

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(a+\beta^0-\gamma^0) = 0.1505150, \qquad \beta = 0.0064882.3,$$

$$\log\frac{\Delta}{n} = c = a - b = 0.43648880, \qquad \gamma = 0.0526732.3,$$

$$a' = 0.0924352.2, \quad b' = 0.0231251.1, \quad c' = 0.0693101.1,$$
$$\beta' = 0.0001539.7, \quad \gamma' = 0.0013812.0,$$
$$a'' = 0.0024545.8, \quad b'' = 0.0006136.7, \quad c'' = 0.0018409.1,$$
$$\beta'' = 0.0000001.0, \quad \gamma'' = 0.0000009.0,$$
$$a''' = 0.0000018.0, \quad b''' = 0.0000005.0, \quad c''' = 0.0000013.0.$$

Hat man hier aus $a^i$, $b^i$, $c^i$ die Gröfsen $\alpha^i$, $\beta^i$, $\gamma^i$ gefunden, indem man nach der allgemeinen Regel

$a^i$, $b^i$ oder $c^i = A$ und $\alpha^i$, $\beta^i$, $\gamma^i = C - \frac{1}{2}A - 0.300103000$

setzt, wo $C$ aus $A$ durch die *Matth.* Tafeln gegeben ist, so wird

$$a^{i+1} = \alpha^i, \quad b^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i+\beta^i-\gamma), \quad c^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i-\beta^i+\gamma^i),$$

und daher immer $a^i = b^i + c^i$. Wenn daher $\log\frac{1}{n}$, $\log\operatorname{tang}\Phi$ gegeben ist, so hat man zur Berechnung aller vorstehenden Gröfsen nur *achtmal* in die Tafeln zu gehen. Hiermit ist aber schon fast alles gegeben, was zur Berechnung der ganzen und unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung und der Gröfsen $\log q$ und $\log\Theta$ erforderlich ist. Denn man hat zunächst

$$\log\mu = \log\frac{\pi}{2F^I} = \log n + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}a'' + \tfrac{1}{2}a''' = 9.75394390.$$

Um $\log q$ zu finden, braucht man noch den log. des vierten Theils des Moduls

$$\log\lambda = \log\tfrac{1}{4}\sqrt{(mm-nn)} = 9.3828837.7;$$

dann wird

$$\log q = 2\log\lambda + a - 3[\tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{4}a'' + \tfrac{1}{8}a'''] = 9.2122768.7.$$

Setzt man ferner $\Phi = F(\Phi)$, so wird

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\Phi + \log\frac{\mu}{m} - [b' + b'' + b'''] = 9.7614393.0.$$

Der genaue Werth von $x = \mu\Phi$ ist $30^0$ und man hat nach den Tafeln $\log\operatorname{tang} 30^0 = 9.7614393.7$. Man findet ferner

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^{\varphi}\left[E(\Phi) - \frac{E^I}{F^I}F(\Phi)\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$= \tfrac{1}{2}b + b' + 2b'' + 4b''' - [\beta + 2\beta' + 4\beta''] = 0.0928153.9.$$

Um die Integrale zweiter Gattung zu erhalten, mufs man zuvor durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Gröfsen $m^i$, $n^i$, $\lambda^i$ bilden:

$\log n' = 9.7064981$, $\log m' = 9.7989333.2$, $\log \lambda' = 8.9668342$,
$\log n'' = 9.7527157.1$, $\log m'' = 9.7551702.9$, $\log \lambda'' = 8.1784981$,
$\log n''' = 9.7539430.0$, $\log m''' = 9.7539448.0$, $\log \lambda''' = 6.60305$,
$\log n^{IV} = 9.7539439.0$, $\log m^{IV} = 9.7539439.0$, $\log \lambda^{IV} = 3.452$.

Hier ist

$\log n^{i+1} = \log n^i + \frac{1}{2}a^i$, $\log m^i = \log n^i + a^i$, $\log \lambda^{i+1} = 2\log \lambda^i - \log m^{i+1}$.

Hiernach findet man

$$\log \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 9.4689309, \quad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 0.2943952.7,$$
$$\log \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 8.1932888, \quad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 0.01560519.0,$$
$$\log \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 5.34343, \quad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 0.0000220.5,$$
$$\nu = 0.3100232.2.$$

Der gefundene Werth von $\nu$, welcher das Aufschlagen *dreier* Zahlen erforderte, giebt

$$\nu = \frac{-1}{F^I}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\Delta\varphi}; \qquad \frac{E^I}{F^I} = \frac{mm+nn}{2mm} - \frac{mm-nn}{2mm}\nu.$$

Zur Berechnung des unbestimmten Integrals zweiter Gattung geht man von den Werthen von $\log \sin\Phi$, $\log \cos\Phi$ aus und findet dann durch successives Addiren:

| | |
|---|---|
| $\log \frac{\sin\varphi}{m} = 9.8645412.7$ | $\log \cos\Phi = 9.8333065.7$ |
| $\frac{1}{2}b - \beta = 0.0687692.8$ | $b' + \frac{1}{2}b - \beta = 0.0918943.9$ |
| $\log \frac{\sin\varphi}{m'} = 9.9333105.5$ | $\log \cos\Phi' = 9.9252009.6$ |
| $\frac{1}{2}b' - \beta' = 0.0114085.9$ | $b'' + \frac{1}{2}b' - \beta' = 0.0120222.6$ |
| $\log \frac{\sin\varphi''}{m''} = 9.9447191.4$ | $\log \cos\Phi'' = 9.9372232.2$ |
| $\frac{1}{2}b'' - \beta'' = 0.0003067.4$ | $b''' + \frac{1}{2}b'' - \beta'' = 0.0003072.4$ |
| $\log \frac{\sin\varphi'''}{m'''} = 9.9450258.8$ | $\log \cos\Phi''' = 9.9375304.6$ |
| $\frac{1}{2}b''' = 2.5$ | |
| $\log \frac{\sin\varphi^{IV}}{m^{IV}} = 9.9450261.3$ | |

$$\log\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} = 9.7666171.2 \qquad \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} = 0.5842747.0$$

$$\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} = 9.3388510.0 \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} = 0.2181981.5$$

$$\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} = 8.0755378.6 \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} = 0.0118997.5$$

$$\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'''\sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} = 5.22599 \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'''\sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} = 0.0000168.3$$

$$\log\nu = 9.4913942.9 \qquad 0.8143894.3$$

$$\log\nu\Phi = \log\frac{\nu}{\mu}30^0 = 9.4564490.9 \qquad \nu\Phi = 0.2860547.2$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = 0.5283347.1.$$

Man hat zur Berechnung des vorstehenden Integrals zwar nur *fünf* Zahlen aufzuschlagen, aber sehr viele Additionen zu machen. Es wird daher eben so vortheilhaft die Gröfse $\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} +$ etc. auch durch die Formel

$$\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{8\lambda\lambda}\left[E(\Phi) - \frac{E'}{F'}F(\Phi)\right] = \frac{1}{2\lambda\lambda\mu}\cdot\frac{q\sin 2x - 2q^4\sin 4x + 3q^9\sin 6x \text{ etc.}}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x \text{ etc.}}$$

berechnet werden können. Da hier $x = 30^0$ und $\log q = 9.2122768.7$ ist, so findet man, wenn man den Bruch mit $\frac{Z}{N}$ bezeichnet,

$$q\sin 2x = 0.1411911.5 \qquad q\cos 2x = 0.0815167.5$$

$$2q^4\sin 4x = 0.0012236.8 \qquad -q^4\cos 4x = 0.0003532.4$$

$$Z = 0.1399674.7 \qquad -q^9\cos 6x = \quad 0.8$$

$$\log Z = 9.1460271.7 \qquad N = 9.8362601.8$$

$$\log N = 9.9223413.9 \qquad = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x$$

$$\log\frac{Z}{2\lambda\lambda\mu N} = 9.9108321.4; \qquad \frac{1}{2\lambda\lambda\mu}\cdot\frac{Z}{N} = 0.8143894.4.$$

Die frühere Rechnung gab dieselbe Gröfse 0.8143894.3. Den Werth von $\log N$ kann man auch aus der Formel

$$\log N = \log\frac{\Theta u}{\Theta 0} + \tfrac{1}{2}\log\frac{n}{\mu}$$

erhalten. Wir fanden aber oben

$$\log\frac{\Theta u}{\Theta 0} = 0.0928153.9,$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{\mu} = 9.8295261.5,$$

und hieraus wird

$$\log N = 9.9223415.4,$$

welches nur um 1.5 in der 7ten Stelle von dem durch die Reihen-Entwicklung gefundnen Werthe abweicht.

Sehr leicht wird die Berechnung von $\nu$ durch die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^I - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\mu} - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}D}{8\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{m-n}{2(m'+n')} = \frac{mm-nn}{2(m'+n')(m+n)} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''},$$

$$\sqrt{m}+\sqrt{n} = \sqrt{(2(m'+n'))} = 2\sqrt{m''},$$

und daher, wenn man $q^{16}$, als unmerklich, wegläfst,

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{\sqrt{m}.\mu^{\frac{3}{2}}D}{16\lambda\lambda\sqrt{m''}} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{3}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\log\frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 9.5126939.3; \qquad \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 0.3256071.8,$$

$$\log\frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{3}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 8.1926745.4; \qquad \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{3}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 0.0155838.4,$$

$$\nu = 0.3100233.4,$$

welches nur um 1.2 in der 7ten Stelle vom oben gefundnen Werthe abweicht.

Königsberg, den 12. Juni 1843.

---

Ich füge die folgende Tabelle hinzu, welche für die Werthe des Argumentes $\vartheta = \arcsin k$ von Zehntel zu Zehntel Grad die Werthe von $\log q$ bis auf 5 Decimalstellen nebst den ersten Differenzen giebt.

| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | Infinitum. | | 5.0 | 6.67813 | 1722 | 10.0 | 7.28185 | 869 |
| 0.1 | 3.27964 | 0.60206 | 5.1 | 6.69535 | 1689 | 10.1 | 7.29054 | 860 |
| 0.2 | 3.88170 | 35218 | 5.2 | 6.71224 | 1657 | 10.2 | 7.29914 | 852 |
| 0.3 | 4.23388 | 24988 | 5.3 | 6.72881 | 1626 | 10.3 | 7.30766 | 844 |
| 0.4 | 4.48376 | 19382 | 5.4 | 6.74507 | 1596 | 10.4 | 7.31610 | 836 |
| 0.5 | 4.67758 | 15836 | 5.5 | 6.76103 | 1567 | 10.5 | 7.32446 | 828 |
| 0.6 | 4.83594 | 13390 | 5.6 | 6.77670 | 1540 | 10.6 | 7.33274 | 820 |
| 0.7 | 4.96984 | 11599 | 5.7 | 6.79210 | 1513 | 10.7 | 7.34094 | 813 |
| 0.8 | 5.08583 | 10231 | 5.8 | 6.80723 | 1488 | 10.8 | 7.34907 | 805 |
| 0.9 | 5.18814 | 9152 | 5.9 | 6.82211 | 1462 | 10.9 | 7.35712 | 798 |
| 1.0 | 5.27966 | 8279 | 6.0 | 6.83673 | 1439 | 11.0 | 7.36510 | 791 |
| 1.1 | 5.36245 | 7457 | 6.1 | 6.85112 | 1415 | 11.1 | 7.37301 | 784 |
| 1.2 | 5.43702 | 7054 | 6.2 | 6.86527 | 1392 | 11.2 | 7.38085 | 777 |
| 1.3 | 5.50756 | 6437 | 6.3 | 6.87919 | 1371 | 11.3 | 7.38862 | 771 |
| 1.4 | 5.57193 | 5994 | 6.4 | 6.89290 | 1349 | 11.4 | 7.39633 | 763 |
| 1.5 | 5.63187 | 5606 | 6.5 | 6.90639 | 1329 | 11.5 | 7.40396 | 758 |
| 1.6 | 5.68793 | 5267 | 6.6 | 6.91968 | 1310 | 11.6 | 7.41154 | 750 |
| 1.7 | 5.74060 | 4965 | 6.7 | 6.93278 | 1289 | 11.7 | 7.41904 | 745 |
| 1.8 | 5.79025 | 4697 | 6.8 | 6.94567 | 1272 | 11.8 | 7.42649 | 738 |
| 1.9 | 5.83722 | 4456 | 6.9 | 6.95839 | 1252 | 11.9 | 7.43387 | 732 |
| 2.0 | 5.88178 | 4239 | 7.0 | 6.97091 | 1236 | 12.0 | 7.44119 | 727 |
| 2.1 | 5.92417 | 4042 | 7.1 | 6.98327 | 1218 | 12.1 | 7.44846 | 720 |
| 2.2 | 5.96459 | 3862 | 7.2 | 6.99545 | 1201 | 12.2 | 7.45566 | 714 |
| 2.3 | 6.00321 | 3697 | 7.3 | 7.00746 | 1185 | 12.3 | 7.46280 | 709 |
| 2.4 | 6.04018 | 3547 | 7.4 | 7.01931 | 1169 | 12.4 | 7.46989 | 703 |
| 2.5 | 6.07565 | 3408 | 7.5 | 7.03100 | 1154 | 12.5 | 7.47692 | 698 |
| 2.6 | 6.10973 | 3279 | 7.6 | 7.04254 | 1139 | 12.6 | 7.48390 | 693 |
| 2.7 | 6.14252 | 3160 | 7.7 | 7.05393 | 1124 | 12.7 | 7.49083 | 686 |
| 2.8 | 6.17412 | 3050 | 7.8 | 7.06517 | 1110 | 12.8 | 7.49769 | 682 |
| 2.9 | 6.20462 | 2946 | 7.9 | 7.07627 | 1096 | 12.9 | 7.50451 | 677 |
| 3.0 | 6.23408 | 2849 | 8.0 | 7.08723 | 1083 | 13.0 | 7.51128 | 671 |
| 3.1 | 6.26257 | 2759 | 8.1 | 7.09806 | 1069 | 13.1 | 7.51799 | 667 |
| 3.2 | 6.29016 | 2674 | 8.2 | 7.10875 | 1056 | 13.2 | 7.52466 | 661 |
| 3.3 | 6.31690 | 2595 | 8.3 | 7.11931 | 1044 | 13.3 | 7.53127 | 657 |
| 3.4 | 6.34285 | 2519 | 8.4 | 7.12975 | 1032 | 13.4 | 7.53784 | 651 |
| 3.5 | 6.36804 | 2449 | 8.5 | 7.14007 | 1020 | 13.5 | 7.54435 | 648 |
| 3.6 | 6.39253 | 2381 | 8.6 | 7.15027 | 1008 | 13.6 | 7.55083 | 642 |
| 3.7 | 6.41634 | 2318 | 8.7 | 7.16035 | 996 | 13.7 | 7.55725 | 638 |
| 3.8 | 6.43952 | 2258 | 8.8 | 7.17031 | 986 | 13.8 | 7.56363 | 633 |
| 3.9 | 6.46210 | 2201 | 8.9 | 7.18017 | 974 | 13.9 | 7.56996 | 629 |
| 4.0 | 6.48411 | 2146 | 9.0 | 7.18991 | 964 | 14.0 | 7.57625 | 625 |
| 4.1 | 6.50557 | 2095 | 9.1 | 7.19955 | 953 | 14.1 | 7.58250 | 620 |
| 4.2 | 6.52652 | 2046 | 9.2 | 7.20908 | 944 | 14.2 | 7.58870 | 616 |
| 4.3 | 6.54698 | 1999 | 9.3 | 7.21852 | 933 | 14.3 | 7.59486 | 612 |
| 4.4 | 6.56697 | 1954 | 9.4 | 7.22785 | 923 | 14.4 | 7.60098 | 607 |
| 4.5 | 6.58651 | 1911 | 9.5 | 7.23708 | 914 | 14.5 | 7.60705 | 604 |
| 4.6 | 6.60562 | 1870 | 9.6 | 7.24622 | 904 | 14.6 | 7.61309 | 599 |
| 4.7 | 6.62432 | 1831 | 9.7 | 7.25526 | 895 | 14.7 | 7.61908 | 596 |
| 4.8 | 6.64263 | 1793 | 9.8 | 7.26421 | 887 | 14.8 | 7.62504 | 591 |
| 4.9 | 6.66056 | 1757 | 9.9 | 7.27308 | 877 | 14.9 | 7.63095 | 588 |
| 5.0 | 6.67813 | 1722 | 10.0 | 7.28185 | 869 | 15.0 | 7.63683 | 584 |

| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.0 | 7.63683 | 584 | 20.0 | 7.89068 | 443 | 25.0 | 8.08971 | 359 |
| 15.1 | 7.64267 | 580 | 20.1 | 7.89511 | 440 | 25.1 | 8.09330 | 357 |
| 15.2 | 7.64847 | 577 | 20.2 | 7.89951 | 438 | 25.2 | 8.09687 | 356 |
| 15.3 | 7.65424 | 572 | 20.3 | 7.90389 | 436 | 25.3 | 8.10043 | 354 |
| 15.4 | 7.65996 | 570 | 20.4 | 7.90825 | 434 | 25.4 | 8.10397 | 354 |
| 15.5 | 7.66566 | 565 | 20.5 | 7.91259 | 433 | 25.5 | 8.10751 | 351 |
| 15.6 | 7.67131 | 562 | 20.6 | 7.91692 | 430 | 25.6 | 8.11102 | 351 |
| 15.7 | 7.67693 | 559 | 20.7 | 7.92122 | 428 | 25.7 | 8.11453 | 350 |
| 15.8 | 7.68252 | 555 | 20.8 | 7.92550 | 426 | 25.8 | 8.11803 | 348 |
| 15.9 | 7.68807 | 552 | 20.9 | 7.92976 | 424 | 25.9 | 8.12151 | 347 |
| 16.0 | 7.69359 | 548 | 21.0 | 7.93400 | 423 | 26.0 | 8.12498 | 345 |
| 16.1 | 7.69907 | 545 | 21.1 | 7.93823 | 420 | 26.1 | 8.12843 | 345 |
| 16.2 | 7.70452 | 542 | 21.2 | 7.94243 | 418 | 26.2 | 8.13188 | 343 |
| 16.3 | 7.70994 | 539 | 21.3 | 7.94661 | 417 | 26.3 | 8.13531 | 342 |
| 16.4 | 7.71533 | 535 | 21.4 | 7.95078 | 415 | 26.4 | 8.13873 | 341 |
| 16.5 | 7.72068 | 533 | 21.5 | 7.95493 | 413 | 26.5 | 8.14214 | 340 |
| 16.6 | 7.72601 | 529 | 21.6 | 7.95906 | 411 | 26.6 | 8.14554 | 338 |
| 16.7 | 7.73130 | 526 | 21.7 | 7.96317 | 409 | 26.7 | 8.14892 | 338 |
| 16.8 | 7.73656 | 523 | 21.8 | 7.96726 | 408 | 26.8 | 8.15230 | 336 |
| 16.9 | 7.74179 | 520 | 21.9 | 7.97134 | 406 | 26.9 | 8.15566 | 335 |
| 17.0 | 7.74699 | 517 | 22.0 | 7.97540 | 404 | 27.0 | 8.15901 | 334 |
| 17.1 | 7.75216 | 515 | 22.1 | 7.97944 | 402 | 27.1 | 8.16235 | 333 |
| 17.2 | 7.75731 | 511 | 22.2 | 7.98346 | 401 | 27.2 | 8.16568 | 331 |
| 17.3 | 7.76242 | 508 | 22.3 | 7.98747 | 399 | 27.3 | 8.16899 | 331 |
| 17.4 | 7.76750 | 507 | 22.4 | 7.99146 | 397 | 27.4 | 8.17230 | 329 |
| 17.5 | 7.77257 | 502 | 22.5 | 7.99543 | 396 | 27.5 | 8.17559 | 329 |
| 17.6 | 7.77759 | 500 | 22.6 | 7.99939 | 394 | 27.6 | 8.17888 | 327 |
| 17.7 | 7.78259 | 498 | 22.7 | 8.00333 | 392 | 27.7 | 8.18215 | 326 |
| 17.8 | 7.78757 | 494 | 22.8 | 8.00725 | 391 | 27.8 | 8.18541 | 325 |
| 17.9 | 7.79251 | 492 | 22.9 | 8.01116 | 389 | 27.9 | 8.18866 | 324 |
| 18.0 | 7.79743 | 490 | 23.0 | 8.01505 | 388 | 28.0 | 8.19190 | 323 |
| 18.1 | 7.80233 | 487 | 23.1 | 8.01893 | 386 | 28.1 | 8.19513 | 322 |
| 18.2 | 7.80720 | 484 | 23.2 | 8.02279 | 384 | 28.2 | 8.19835 | 321 |
| 18.3 | 7.81204 | 482 | 23.3 | 8.02663 | 383 | 28.3 | 8.20156 | 320 |
| 18.4 | 7.81686 | 479 | 23.4 | 8.03046 | 381 | 28.4 | 8.20476 | 319 |
| 18.5 | 7.82165 | 476 | 23.5 | 8.03427 | 380 | 28.5 | 8.20795 | 318 |
| 18.6 | 7.82641 | 475 | 23.6 | 8.03807 | 378 | 28.6 | 8.21113 | 317 |
| 18.7 | 7.83116 | 471 | 23.7 | 8.04185 | 377 | 28.7 | 8.21430 | 315 |
| 18.8 | 7.83587 | 470 | 23.8 | 8.04562 | 375 | 28.8 | 8.21745 | 315 |
| 18.9 | 7.84057 | 467 | 23.9 | 8.04937 | 374 | 28.9 | 8.22060 | 314 |
| 19.0 | 7.84524 | 464 | 24.0 | 8.05311 | 372 | 29.0 | 8.22374 | 313 |
| 19.1 | 7.84988 | 463 | 24.1 | 8.05683 | 371 | 29.1 | 8.22687 | 312 |
| 19.2 | 7.85451 | 460 | 24.2 | 8.06054 | 370 | 29.2 | 8.22999 | 311 |
| 19.3 | 7.85911 | 457 | 24.3 | 8.06424 | 368 | 29.3 | 8.23310 | 310 |
| 19.4 | 7.86368 | 456 | 24.4 | 8.06792 | 367 | 29.4 | 8.23620 | 309 |
| 19.5 | 7.86824 | 453 | 24.5 | 8.07159 | 365 | 29.5 | 8.23929 | 308 |
| 19.6 | 7.87277 | 451 | 24.6 | 8.07524 | 364 | 29.6 | 8.24237 | 307 |
| 19.7 | 7.87728 | 449 | 24.7 | 8.07888 | 362 | 29.7 | 8.24544 | 306 |
| 19.8 | 7.88177 | 447 | 24.8 | 8.08250 | 361 | 29.8 | 8.24850 | 306 |
| 19.9 | 7.88624 | 444 | 24.9 | 8.08611 | 360 | 29.9 | 8.25156 | 305 |
| 20.0 | 7.89068 | 443 | 25.0 | 8.08971 | 359 | 30.0 | 8.25461 | 303 |

| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30.0 | 8.25461 | 303 | 35.0 | 8.39646 | 265 | 40.0 | 8.52199 | 238 |
| 30.1 | 8.25764 | 303 | 35.1 | 8.39911 | 265 | 40.1 | 8.52437 | 237 |
| 30.2 | 8.26067 | 301 | 35.2 | 8.40176 | 264 | 40.2 | 8.52674 | 237 |
| 30.3 | 8.26368 | 301 | 35.3 | 8.40440 | 264 | 40.3 | 8.52911 | 236 |
| 30.4 | 8.26669 | 301 | 35.4 | 8.40704 | 262 | 40.4 | 8.53147 | 236 |
| 30.5 | 8.26970 | 301 | 35.5 | 8.40966 | 262 | 40.5 | 8.53383 | 235 |
| 30.6 | 8.27268 | 298 | 35.6 | 8.41228 | 262 | 40.6 | 8.53618 | 235 |
| 30.7 | 8.27567 | 297 | 35.7 | 8.41490 | 261 | 40.7 | 8.53853 | 235 |
| 30.8 | 8.27864 | 296 | 35.8 | 8.41751 | 260 | 40.8 | 8.54088 | 234 |
| 30.9 | 8.28160 | 296 | 35.9 | 8.42011 | 260 | 40.9 | 8.54322 | 233 |
| 31.0 | 8.28456 | 295 | 36.0 | 8.42271 | 259 | 41.0 | 8.54555 | 233 |
| 31.1 | 8.28751 | 294 | 36.1 | 8.42530 | 258 | 41.1 | 8.54788 | 233 |
| 31.2 | 8.29045 | 293 | 36.2 | 8.42788 | 258 | 41.2 | 8.55021 | 233 |
| 31.3 | 8.29338 | 292 | 36.3 | 8.43046 | 257 | 41.3 | 8.55254 | 232 |
| 31.4 | 8.29630 | 292 | 36.4 | 8.43303 | 257 | 41.4 | 8.55486 | 231 |
| 31.5 | 8.29922 | 290 | 36.5 | 8.43560 | 256 | 41.5 | 8.55717 | 231 |
| 31.6 | 8.30212 | 290 | 36.6 | 8.43816 | 256 | 41.6 | 8.55948 | 230 |
| 31.7 | 8.30502 | 289 | 36.7 | 8.44072 | 255 | 41.7 | 8.56178 | 230 |
| 31.8 | 8.30791 | 288 | 36.8 | 8.44327 | 254 | 41.8 | 8.56408 | 230 |
| 31.9 | 8.31079 | 288 | 36.9 | 8.44581 | 254 | 41.9 | 8.56638 | 229 |
| 32.0 | 8.31367 | 287 | 37.0 | 8.44835 | 253 | 42.0 | 8.56867 | 229 |
| 32.1 | 8.31654 | 286 | 37.1 | 8.45088 | 253 | 42.1 | 8.57096 | 229 |
| 32.2 | 8.31940 | 285 | 37.2 | 8.45341 | 252 | 42.2 | 8.57325 | 228 |
| 32.3 | 8.32225 | 284 | 37.3 | 8.45593 | 251 | 42.3 | 8.57553 | 227 |
| 32.4 | 8.32509 | 283 | 37.4 | 8.45844 | 251 | 42.4 | 8.57780 | 227 |
| 32.5 | 8.32792 | 283 | 37.5 | 8.46095 | 251 | 42.5 | 8.58007 | 227 |
| 32.6 | 8.33075 | 282 | 37.6 | 8.46346 | 250 | 42.6 | 8.58234 | 227 |
| 32.7 | 8.33357 | 281 | 37.7 | 8.46596 | 249 | 42.7 | 8.58461 | 226 |
| 32.8 | 8.33638 | 281 | 37.8 | 8.46845 | 249 | 42.8 | 8.58687 | 225 |
| 32.9 | 8.33919 | 280 | 37.9 | 8.47094 | 248 | 42.9 | 8.58912 | 225 |
| 33.0 | 8.34199 | 279 | 38.0 | 8.47342 | 248 | 43.0 | 8.59137 | 225 |
| 33.1 | 8.34478 | 278 | 38.1 | 8.47590 | 247 | 43.1 | 8.59362 | 225 |
| 33.2 | 8.34756 | 278 | 38.2 | 8.47837 | 247 | 43.2 | 8.59587 | 224 |
| 33.3 | 8.35034 | 277 | 38.3 | 8.48084 | 246 | 43.3 | 8.59811 | 224 |
| 33.4 | 8.35311 | 276 | 38.4 | 8.48330 | 245 | 43.4 | 8.60035 | 223 |
| 33.5 | 8.35587 | 275 | 38.5 | 8.48575 | 245 | 43.5 | 8.60258 | 223 |
| 33.6 | 8.35862 | 275 | 38.6 | 8.48820 | 245 | 43.6 | 8.60481 | 222 |
| 33.7 | 8.36137 | 274 | 38.7 | 8.49065 | 244 | 43.7 | 8.60703 | 222 |
| 33.8 | 8.36411 | 273 | 38.8 | 8.49309 | 244 | 43.8 | 8.60925 | 222 |
| 33.9 | 8.36684 | 273 | 38.9 | 8.49553 | 243 | 43.9 | 8.61147 | 221 |
| 34.0 | 8.36957 | 272 | 39.0 | 8.49796 | 242 | 44.0 | 8.61368 | 221 |
| 34.1 | 8.37229 | 271 | 39.1 | 8.50038 | 242 | 44.1 | 8.61589 | 221 |
| 34.2 | 8.37500 | 271 | 39.2 | 8.50280 | 242 | 44.2 | 8.61810 | 221 |
| 34.3 | 8.37771 | 270 | 39.3 | 8.50522 | 241 | 44.3 | 8.62031 | 220 |
| 34.4 | 8.38041 | 269 | 39.4 | 8.50763 | 240 | 44.4 | 8.62251 | 219 |
| 34.5 | 8.38310 | 269 | 39.5 | 8.51003 | 240 | 44.5 | 8.62470 | 219 |
| 34.6 | 8.38579 | 268 | 39.6 | 8.51243 | 240 | 44.6 | 8.62689 | 219 |
| 34.7 | 8.38847 | 267 | 39.7 | 8.51483 | 239 | 44.7 | 8.62908 | 219 |
| 34.8 | 8.39114 | 266 | 39.8 | 8.51722 | 239 | 44.8 | 8.63127 | 218 |
| 34.9 | 8.39380 | 266 | 39.9 | 8.51961 | 238 | 44.9 | 8.63345 | 218 |
| 35.0 | 8.39646 | 265 | 40.0 | 8.52199 | 238 | 45.0 | 8.63563 | 217 |

| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45.0 | 8.63563 | 217 | 50.0 | 8.74052 | 203 | 55.0 | 8.83912 | 192 |
| 45.1 | 8.63780 | 217 | 50.1 | 8.74255 | 202 | 55.1 | 8.84104 | 192 |
| 45.2 | 8.63997 | 217 | 50.2 | 8.74457 | 202 | 55.2 | 8.84296 | 192 |
| 45.3 | 8.64214 | 216 | 50.3 | 8.74659 | 202 | 55.3 | 8.84488 | 191 |
| 45.4 | 8.64430 | 216 | 50.4 | 8.74861 | 202 | 55.4 | 8.84679 | 192 |
| 45.5 | 8.64646 | 216 | 50.5 | 8.75063 | 201 | 55.5 | 8.84871 | 191 |
| 45.6 | 8.64862 | 215 | 50.6 | 8.75264 | 201 | 55.6 | 8.85062 | 192 |
| 45.7 | 8.65077 | 215 | 50.7 | 8.75465 | 201 | 55.7 | 8.85254 | 191 |
| 45.8 | 8.65292 | 215 | 50.8 | 8.75666 | 201 | 55.8 | 8.85445 | 190 |
| 45.9 | 8.65507 | 215 | 50.9 | 8.75867 | 201 | 55.9 | 8.85635 | 191 |
| 46.0 | 8.65722 | 214 | 51.0 | 8.76068 | 200 | 56.0 | 8.85826 | 191 |
| 46.1 | 8.65936 | 214 | 51.1 | 8.76268 | 200 | 56.1 | 8.86017 | 190 |
| 46.2 | 8.66150 | 213 | 51.2 | 8.76468 | 199 | 56.2 | 8.86207 | 191 |
| 46.3 | 8.66363 | 213 | 51.3 | 8.76667 | 200 | 56.3 | 8.86398 | 190 |
| 46.4 | 8.66576 | 213 | 51.4 | 8.76867 | 199 | 56.4 | 8.86588 | 190 |
| 46.5 | 8.66789 | 212 | 51.5 | 8.77066 | 199 | 56.5 | 8.86778 | 190 |
| 46.6 | 8.67001 | 212 | 51.6 | 8.77265 | 199 | 56.6 | 8.86968 | 189 |
| 46.7 | 8.67213 | 212 | 51.7 | 8.77464 | 199 | 56.7 | 8.87157 | 190 |
| 46.8 | 8.67425 | 212 | 51.8 | 8.77663 | 198 | 56.8 | 8.87347 | 189 |
| 46.9 | 8.67637 | 211 | 51.9 | 8.77861 | 198 | 56.9 | 8.87536 | 190 |
| 47.0 | 8.67848 | 211 | 52.0 | 8.78059 | 198 | 57.0 | 8.87726 | 189 |
| 47.1 | 8.68059 | 211 | 52.1 | 8.78257 | 198 | 57.1 | 8.87915 | 189 |
| 47.2 | 8.68270 | 210 | 52.2 | 8.78455 | 198 | 57.2 | 8.88104 | 189 |
| 47.3 | 8.68480 | 210 | 52.3 | 8.78653 | 197 | 57.3 | 8.88293 | 188 |
| 47.4 | 8.68690 | 210 | 52.4 | 8.78850 | 197 | 57.4 | 8.88481 | 189 |
| 47.5 | 8.68900 | 209 | 52.5 | 8.79047 | 197 | 57.5 | 8.88670 | 188 |
| 47.6 | 8.69109 | 209 | 52.6 | 8.79244 | 197 | 57.6 | 8.88858 | 189 |
| 47.7 | 8.69318 | 209 | 52.7 | 8.79441 | 196 | 57.7 | 8.89047 | 188 |
| 47.8 | 8.69527 | 209 | 52.8 | 8.79637 | 197 | 57.8 | 8.89235 | 188 |
| 47.9 | 8.69736 | 208 | 52.9 | 8.79834 | 196 | 57.9 | 8.89423 | 188 |
| 48.0 | 8.69944 | 208 | 53.0 | 8.80030 | 196 | 58.0 | 8.89611 | 188 |
| 48.1 | 8.70152 | 208 | 53.1 | 8.80226 | 195 | 58.1 | 8.89799 | 188 |
| 48.2 | 8.70360 | 207 | 53.2 | 8.80421 | 196 | 58.2 | 8.89987 | 187 |
| 48.3 | 8.70567 | 207 | 53.3 | 8.80617 | 195 | 58.3 | 8.90174 | 188 |
| 48.4 | 8.70774 | 207 | 53.4 | 8.80812 | 195 | 58.4 | 8.90362 | 187 |
| 48.5 | 8.70981 | 207 | 53.5 | 8.81007 | 195 | 58.5 | 8.90549 | 187 |
| 48.6 | 8.71188 | 206 | 53.6 | 8.81202 | 195 | 58.6 | 8.90736 | 187 |
| 48.7 | 8.71394 | 207 | 53.7 | 8.81397 | 194 | 58.7 | 8.90923 | 187 |
| 48.8 | 8.71601 | 205 | 53.8 | 8.81591 | 194 | 58.8 | 8.91110 | 187 |
| 48.9 | 8.71806 | 205 | 53.9 | 8.81785 | 194 | 58.9 | 8.91297 | 187 |
| 49.0 | 8.72011 | 206 | 54.0 | 8.81979 | 195 | 59.0 | 8.91484 | 187 |
| 49.1 | 8.72217 | 205 | 54.1 | 8.82174 | 194 | 59.1 | 8.91671 | 186 |
| 49.2 | 8.72422 | 204 | 54.2 | 8.82368 | 193 | 59.2 | 8.91857 | 187 |
| 49.3 | 8.72626 | 205 | 54.3 | 8.82561 | 194 | 59.3 | 8.92044 | 186 |
| 49.4 | 8.72831 | 204 | 54.4 | 8.82755 | 193 | 59.4 | 8.92230 | 186 |
| 49.5 | 8.73035 | 204 | 54.5 | 8.82948 | 193 | 59.5 | 8.92416 | 187 |
| 49.6 | 8.73239 | 204 | 54.6 | 8.83141 | 193 | 59.6 | 8.92603 | 186 |
| 49.7 | 8.73443 | 203 | 54.7 | 8.83334 | 193 | 59.7 | 8.92789 | 186 |
| 49.8 | 8.73646 | 203 | 54.8 | 8.83527 | 192 | 59.8 | 8.92975 | 186 |
| 49.9 | 8.73849 | 203 | 54.9 | 8.83719 | 193 | 59.9 | 8.93161 | 186 |
| 50.0 | 8.74052 | 203 | 55.0 | 8.83912 | 192 | 60.0 | 8.93347 | 185 |

| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60.0 | 8.93347 | 185 | 65.0 | 9.02553 | 183 | 70.0 | 9.11748 | 185 |
| 60.1 | 8.93532 | 186 | 65.1 | 9.02736 | 183 | 70.1 | 9.11933 | 186 |
| 60.2 | 8.93718 | 185 | 65.2 | 9.02919 | 183 | 70.2 | 9.12119 | 186 |
| 60.3 | 8.93903 | 186 | 65.3 | 9.03102 | 183 | 70.3 | 9.12305 | 186 |
| 60.4 | 8.94089 | 185 | 65.4 | 9.03285 | 184 | 70.4 | 9.12491 | 186 |
| 60.5 | 8.94274 | 185 | 65.5 | 9.03469 | 183 | 70.5 | 9.12677 | 186 |
| 60.6 | 8.94459 | 186 | 65.6 | 9.03652 | 183 | 70.6 | 9.12863 | 186 |
| 60.7 | 8.94645 | 185 | 65.7 | 9.03835 | 183 | 70.7 | 9.13049 | 187 |
| 60.8 | 8.94830 | 185 | 65.8 | 9.04018 | 184 | 70.8 | 9.13236 | 186 |
| 60.9 | 8.95015 | 185 | 65.9 | 9.04202 | 183 | 70.9 | 9.13422 | 187 |
| 61.0 | 8.95200 | 185 | 66.0 | 9.04385 | 183 | 71.0 | 9.13609 | 187 |
| 61.1 | 8.95385 | 184 | 66.1 | 9.04568 | 183 | 71.1 | 9.13796 | 187 |
| 61.2 | 8.95569 | 185 | 66.2 | 9.04751 | 183 | 71.2 | 9.13983 | 187 |
| 61.3 | 8.95754 | 185 | 66.3 | 9.04934 | 184 | 71.3 | 9.14170 | 187 |
| 61.4 | 8.95939 | 184 | 66.4 | 9.05118 | 183 | 71.4 | 9.14357 | 187 |
| 61.5 | 8.96123 | 185 | 66.5 | 9.05301 | 183 | 71.5 | 9.14544 | 188 |
| 61.6 | 8.96308 | 184 | 66.6 | 9.05484 | 184 | 71.6 | 9.14732 | 188 |
| 61.7 | 8.96492 | 185 | 66.7 | 9.05668 | 183 | 71.7 | 9.14920 | 188 |
| 61.8 | 8.96677 | 184 | 66.8 | 9.05851 | 184 | 71.8 | 9.15108 | 188 |
| 61.9 | 8.96861 | 184 | 66.9 | 9.06035 | 183 | 71.9 | 9.15296 | 188 |
| 62.0 | 8.97045 | 184 | 67.0 | 9.06218 | 184 | 72.0 | 9.15484 | 188 |
| 62.1 | 8.97229 | 185 | 67.1 | 9.06402 | 183 | 72.1 | 9.15672 | 189 |
| 62.2 | 8.97414 | 184 | 67.2 | 9.06585 | 184 | 72.2 | 9.15861 | 189 |
| 62.3 | 8.97598 | 184 | 67.3 | 9.06769 | 183 | 72.3 | 9.16050 | 189 |
| 62.4 | 8.97782 | 184 | 67.4 | 9.06952 | 184 | 72.4 | 9.16239 | 189 |
| 62.5 | 8.97966 | 184 | 67.5 | 9.07136 | 184 | 72.5 | 9.16428 | 189 |
| 62.6 | 8.98150 | 183 | 67.6 | 9.07320 | 183 | 72.6 | 9.16617 | 189 |
| 62.7 | 8.98333 | 184 | 67.7 | 9.07503 | 184 | 72.7 | 9.16806 | 190 |
| 62.8 | 8.98517 | 184 | 67.8 | 9.07687 | 184 | 72.8 | 9.16996 | 190 |
| 62.9 | 8.98701 | 184 | 67.9 | 9.07871 | 184 | 72.9 | 9.17186 | 190 |
| 63.0 | 8.98885 | 184 | 68.0 | 9.08055 | 184 | 73.0 | 9.17376 | 190 |
| 63.1 | 8.99069 | 183 | 68.1 | 9.08239 | 184 | 73.1 | 9.17566 | 191 |
| 63.2 | 8.99252 | 184 | 68.2 | 9.08423 | 184 | 73.2 | 9.17757 | 191 |
| 63.3 | 8.99436 | 183 | 68.3 | 9.08607 | 184 | 73.3 | 9.17948 | 191 |
| 63.4 | 8.99619 | 184 | 68.4 | 9.08791 | 184 | 73.4 | 9.18139 | 191 |
| 63.5 | 8.99803 | 183 | 68.5 | 9.08975 | 184 | 73.5 | 9.18330 | 191 |
| 63.6 | 8.99986 | 184 | 68.6 | 9.09159 | 185 | 73.6 | 9.18521 | 192 |
| 63.7 | 9.00170 | 183 | 68.7 | 9.09344 | 184 | 73.7 | 9.18713 | 192 |
| 63.8 | 9.00353 | 184 | 68.8 | 9.09528 | 185 | 73.8 | 9.18905 | 192 |
| 63.9 | 9.00537 | 183 | 68.9 | 9.09713 | 184 | 73.9 | 9.19097 | 192 |
| 64.0 | 9.00720 | 183 | 69.0 | 9.09897 | 185 | 74.0 | 9.19289 | 193 |
| 64.1 | 9.00903 | 184 | 69.1 | 9.10082 | 185 | 74.1 | 9.19482 | 193 |
| 64.2 | 9.01087 | 183 | 69.2 | 9.10267 | 184 | 74.2 | 9.19675 | 193 |
| 64.3 | 9.01270 | 183 | 69.3 | 9.10451 | 185 | 74.3 | 9.19868 | 193 |
| 64.4 | 9.01453 | 184 | 69.4 | 9.10636 | 185 | 74.4 | 9.20061 | 194 |
| 64.5 | 9.01637 | 183 | 69.5 | 9.10821 | 185 | 74.5 | 9.20255 | 194 |
| 64.6 | 9.01820 | 183 | 69.6 | 9.11006 | 185 | 74.6 | 9.20449 | 194 |
| 64.7 | 9.02003 | 183 | 69.7 | 9.11191 | 186 | 74.7 | 9.20643 | 195 |
| 64.8 | 9.02186 | 183 | 69.8 | 9.11377 | 185 | 74.8 | 9.20838 | 195 |
| 64.9 | 9.02369 | 184 | 69.9 | 9.11562 | 186 | 74.9 | 9.21033 | 195 |
| 65.0 | 9.02553 | 183 | 70.0 | 9.11748 | 185 | 75.0 | 9.21228 | 195 |

| $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. | $\vartheta$ | log. $q$ | Diff. I. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75.0 | 9.21228 | 195 | 80.0 | 9.31515 | 220 | 85.0 | 9.43962 | 296 |
| 75.1 | 9.21423 | 196 | 80.1 | 9.31735 | 222 | 85.1 | 9.44256 | 298 |
| 75.2 | 9.21619 | 196 | 80.2 | 9.31957 | 222 | 85.2 | 9.44554 | 301 |
| 75.3 | 9.21815 | 196 | 80.3 | 9.32179 | 222 | 85.3 | 9.44855 | 304 |
| 75.4 | 9.22011 | 197 | 80.4 | 9.32401 | 224 | 85.4 | 9.45159 | 307 |
| 75.5 | 9.22208 | 197 | 80.5 | 9.32625 | 224 | 85.5 | 9.45466 | 310 |
| 75.6 | 9.22405 | 197 | 80.6 | 9.32849 | 225 | 85.6 | 9.45776 | 314 |
| 75.7 | 9.22602 | 198 | 80.7 | 9.33074 | 227 | 85.7 | 9.46090 | 318 |
| 75.8 | 9.22800 | 198 | 80.8 | 9.33301 | 227 | 85.8 | 9.46408 | 321 |
| 75.9 | 9.22998 | 198 | 80.9 | 9.33528 | 228 | 85.9 | 9.46729 | 325 |
| 76.0 | 9.23196 | 199 | 81.0 | 9.33756 | 229 | 86.0 | 9.47054 | 329 |
| 76.1 | 9.23395 | 199 | 81.1 | 9.33985 | 230 | 86.1 | 9.47383 | 334 |
| 76.2 | 9.23594 | 200 | 81.2 | 9.34215 | 230 | 86.2 | 9.47717 | 338 |
| 75.3 | 9.23794 | 200 | 81.3 | 9.34445 | 232 | 86.3 | 9.48055 | 343 |
| 76.4 | 9.23994 | 200 | 81.4 | 9.34677 | 233 | 86.4 | 9.48398 | 348 |
| 76.5 | 9.24194 | 201 | 81.5 | 9.34910 | 234 | 86.5 | 9.48746 | 353 |
| 76.6 | 9.24395 | 201 | 81.6 | 9.35144 | 235 | 86.6 | 9.49099 | 359 |
| 76.7 | 9.24596 | 201 | 81.7 | 9.35379 | 236 | 86.7 | 9.49458 | 364 |
| 76.8 | 9.24797 | 202 | 81.8 | 9.35615 | 238 | 86.8 | 9.49822 | 370 |
| 76.9 | 9.24999 | 203 | 81.9 | 9.35853 | 238 | 86.9 | 9.50192 | 377 |
| 77.0 | 9.25202 | 202 | 82.0 | 9.36091 | 240 | 87.0 | 9.50569 | 384 |
| 77.1 | 9.25404 | 204 | 82.1 | 9.36331 | 240 | 87.1 | 9.50953 | 391 |
| 77.2 | 9.25608 | 203 | 82.2 | 9.36571 | 242 | 87.2 | 9.51344 | 398 |
| 77.3 | 9.25811 | 204 | 82.3 | 9.36813 | 244 | 87.3 | 9.51742 | 407 |
| 77.4 | 9.26015 | 205 | 82.4 | 9.37057 | 244 | 87.4 | 9.52149 | 416 |
| 77.5 | 9.26220 | 205 | 82.5 | 9.37301 | 246 | 87.5 | 9.52565 | 425 |
| 77.6 | 9.26425 | 206 | 82.6 | 9.37547 | 247 | 87.6 | 9.52990 | 435 |
| 77.7 | 9.26631 | 206 | 82.7 | 9.37794 | 249 | 87.7 | 9.53425 | 445 |
| 77.8 | 9.26837 | 206 | 82.8 | 9.38043 | 250 | 87.8 | 9.53870 | 458 |
| 77.9 | 9.27043 | 207 | 82.9 | 9.38293 | 252 | 87.9 | 9.54328 | 470 |
| 78.0 | 9.27250 | 208 | 83.0 | 9.38545 | 253 | 88.0 | 9.54798 | 484 |
| 78.1 | 9.27458 | 208 | 83.1 | 9.38798 | 255 | 88.1 | 9.55282 | 499 |
| 78.2 | 9.27666 | 209 | 83.2 | 9.39053 | 256 | 88.2 | 9.55781 | 515 |
| 78.3 | 9.27875 | 209 | 83.3 | 9.39309 | 258 | 88.3 | 9.56296 | 534 |
| 78.4 | 9.28084 | 210 | 83.4 | 9.39567 | 260 | 88.4 | 9.56830 | 554 |
| 78.5 | 9.28294 | 210 | 83.5 | 9.39827 | 261 | 88.5 | 9.57384 | 577 |
| 78.6 | 9.28504 | 211 | 83.6 | 9.40088 | 263 | 88.6 | 9.57961 | 602 |
| 78.7 | 9.28715 | 211 | 83.7 | 9.40351 | 265 | 88.7 | 9.58563 | 632 |
| 78.8 | 9.28926 | 212 | 83.8 | 9.40616 | 267 | 88.8 | 9.59195 | 665 |
| 78.9 | 9.29138 | 213 | 83.9 | 9.40883 | 269 | 88.9 | 9.59860 | 704 |
| 79.0 | 9.29351 | 214 | 84.0 | 9.41152 | 271 | 89.0 | 9.60564 | 750 |
| 79.1 | 9.29565 | 214 | 84.1 | 9.41423 | 273 | 89.1 | 9.61314 | 805 |
| 79.2 | 9.29779 | 214 | 84.2 | 9.41696 | 275 | 89.2 | 9.62119 | 874 |
| 79.3 | 9.29993 | 215 | 84.3 | 9.41971 | 277 | 89.3 | 9.62993 | 959 |
| 79.4 | 9.30208 | 216 | 84.4 | 9.42248 | 279 | 89.4 | 9.63952 | 1073 |
| 79.5 | 9.30424 | 217 | 84.5 | 9.42527 | 282 | 89.5 | 9.65025 | 1229 |
| 79.6 | 9.30641 | 218 | 84.6 | 9.42809 | 284 | 89.6 | 9.66254 | 1462 |
| 79.7 | 9.30859 | 218 | 84.7 | 9.43093 | 287 | 89.7 | 9.67716 | 1859 |
| 79.8 | 9.31077 | 219 | 84.8 | 9.43380 | 290 | 89.8 | 9.69575 | 2725 |
| 79.9 | 9.31296 | 219 | 84.9 | 9.43670 | 292 | 89.9 | 9.72300 | 27700 |
| 80.0 | 9.31515 | 220 | 85.0 | 9.43962 | 294 | 90.0 | 10.00000 | |

# 3.

# Sur l'elimination des noeuds dans le problème des trois corps.

(Extrait du compte rendu des séances de l'académie des sciences de Paris, séance du lundi 8. Août 1842.)

---

Les illustres géomètres du siècle passé, en traitant le problème des trois corps, ont cherché le mouvement de deux d'entre eux autour du troisième ou autour du centre de gravité de tous les trois. Mais, en réduisant de cette manière le problème de trois corps qui s'attirent mutuellement à un problème de deux corps qui se meuvent autour d'un point fixe, on fait perdre aux équations différentielles du problème cette forme précieuse dont elles jouissent dans leur état primitif, savoir, que les secondes différentielles des coordonnées soient égalées aux dérivées d'une même fonction. C'est par cette raison que les principes de la conservation des forces vives et des aires cessent d'avoir lieu par rapport aux deux corps. On pourra cependant éviter cet inconvénient en agissant de la manière suivante:

Supposons, pour plus de généralité, que le système se compose de $n$ corps, du soleil et de $n-1$ planètes. Comme il est permis de supposer que son centre de gravité reste en repos, on aura une équation linéaire entre chacun des trois systèmes de coordonnées du même nom. Donc les $n$ coordonnées parallèles à un même axe pourront être exprimées linéairement par $n-1$ autres quantités, en établissant $n-1$ équations de condition entre les $n(n-1)$ constantes qui entrent dans ces $n$ expressions linéaires. Comme on peut disposer encore d'un nombre $(n-1)^2$ de constantes, on les déterminera de manière que, dans l'expression de la force vive du système, s'évanouissent les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ produits des différentielles premières des nouvelles variables. En se servant de formules parfaitement semblables pour chaque système de coordonnées du même nom, et en considérant les nouvelles variables comme les coordonnées de $n-1$ autres corps, *on aura réduit de cette manière la force vive du système des n corps proposés à celle d'un système de* $n-1$ *corps*, des masses convenables étant attribuées à ces derniers. Il y aura même dans les formules de ré-

duction un nombre $\frac{1}{2}n(n-1)$ de constantes arbitraires et dont on pourra profiter de différentes manières.

D'après ce qu'on vient de dire, le principe de la conservation des forces vives donnera une équation dans laquelle la somme des forces vives des $n-1$ corps fictifs sera égalée à une fonction de leurs coordonnées. En se servant des règles générales de *Lagrange*, on en déduira, par de simples différentiations partielles, les équations différentielles du problème réduit, et l'on reconnaîtra aisément que la conservation des aires a lieu dans le mouvement des $n-1$ corps par lesquels on a remplacé le système proposé. Ces $n-1$ corps ne s'écartent d'ailleurs de $n-1$ planètes que de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, de manière que la première approximation peut être la même pour les uns et pour les autres. Le changement que, dans cette analyse, doit subir l'expression de la force perturbatrice n'augmente pas la difficulté de son développement.

En appliquant la méthode que je viens d'exposer au problème des trois corps, on réduit celui-ci à un problème du mouvement de deux corps qui jouit de propriétés remarquables. En effet, les trois équations fournies par la conservation des aires font voir:

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps reste constamment dans un plan fixe: c'est le plan invariable du système;

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardés comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Choisissons pour variables du problème les inclinaisons des deux orbites au plan invariable, les deux rayons vecteurs, les angles qu'ils forment avec l'intersection commune des plans des deux orbites, enfin l'angle que forme cette intersection située, comme on a vu, dans le plan invariable, avec une droite fixe de ce plan. On trouvera *que ce dernier angle disparaît entièrement du système des équations différentielles et se détermine après leur intégration par une quadrature.* Donc, dans cette nouvelle forme des équations différentielles n'entre aucune trace des noeuds. Les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, s'y trouvent réduites à cinq équations du premier ordre et une seule du second. Par suite, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire

que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. Je dis dans le système du monde, puisque la même méthode s'applique à un nombre quelconque de corps.

## ANALYSE.

1. Soient $m$ la masse du Soleil, $m_1$ et $m_2$ celles des deux planètes; soient $\xi, \upsilon, \zeta$; $\xi_1, \upsilon_1, \zeta_1$; $\xi_2, \upsilon_2, \zeta_2$ les coordonnées rectangulaires des trois corps $m$, $m_1$, $m_2$, rapportées à leur centre de gravité. Comme on a les trois équations

$$1. \quad \begin{cases} m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0, \\ m\upsilon + m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0, \\ m\zeta + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 = 0, \end{cases}$$

il sera permis de faire

$$2. \quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \upsilon = \alpha y + \beta y_1, & \zeta = \alpha z + \beta z_1, \\ \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \upsilon_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, \\ \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, & \upsilon_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_2, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1, \end{cases}$$

les six constantes $\alpha$, $\beta$, etc., devant satisfaire aux deux conditions

$$3. \quad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par les substitutions (2.), la somme des forces vives du système $2T$ se change en cette expression

$$4. \quad \begin{cases} 2T = \mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad + \mu_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{cases}$$

on aura les trois équations

$$5. \quad \begin{cases} \mu = m\alpha\alpha + m_1\alpha_1\alpha_1 + m_2\alpha_2\alpha_2, \\ \mu_1 = m\beta\beta + m_1\beta_1\beta_1 + m_2\beta_2\beta_2, \\ 0 = m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2. \end{cases}$$

J'observe qu'en vertu des formules (3.) on peut faire

$$6. \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \varepsilon.m, \quad \alpha_2\beta - \alpha\beta_2 = \varepsilon.m_1, \quad \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \varepsilon.m_2,$$

$\varepsilon$ étant un facteur indéterminé. Des formules (5.) et (6.) on tire aussi celle-ci:

$$7. \quad \mu\mu_1 = mm_1m_2(m + m_1 + m_2)\varepsilon\varepsilon.$$

Si l'on fait

$$8. \quad \begin{cases} xx + yy + zz = rr, \quad x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = r_1r_1, \\ \qquad\qquad xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1\cos U, \end{cases}$$

on aura

$$9.\quad \begin{cases} \varrho\varrho = (\xi_1-\xi_2)^2+(v_1-v_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2 \\ \qquad = \gamma^2 rr+2\gamma\delta rr_1\cos U+\delta^2 r_1 r_1, \\ \varrho_1\varrho_1 = (\xi_2-\xi)^2+(v_2-v)^2+(\xi_2-\zeta)^2 \\ \qquad = \gamma_1^2 rr+2\gamma_1\delta_1 rr_1\cos U+\delta_1^2 r_1 r_1, \\ \varrho_2\varrho_2 = (\xi-\xi_1)^2+(v-v_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2 \\ \qquad = \gamma_2^2 rr+2\gamma_2\delta_2 rr_1\cos U+\delta_2^2 r_1 r_1, \end{cases}$$

où l'on a mis, pour plus de simplicité,

$$10.\quad \begin{cases} \gamma = \alpha_1-\alpha_2, & \delta = \beta_1-\beta_2, \\ \gamma_1 = \alpha_2-\alpha, & \delta_1 = \beta_2-\beta, \\ \gamma_2 = \alpha-\alpha_1, & \delta_2 = \beta-\beta_1, \end{cases}$$

ce qui donne

$$11.\quad \gamma+\gamma_1+\gamma_2 = 0, \quad \delta+\delta_1+\delta_2 = 0.$$

Si l'on met

$$U = \frac{mm_1}{\varrho_2}+\frac{mm_2}{\varrho_1}+\frac{m_1m_2}{\varrho} = \Sigma\frac{m_1m_2}{\varrho},$$

le principe des forces vives fournit léquation

$$12.\quad T = U-h = \Sigma\frac{m_1m_2}{\varrho}-h,$$

$h$ étant une constante arbitraire. Or, si dans cette équation l'on substitue les valeurs des quantités $T$, $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ tirées des formules (4.) et (9.), on aura tout de suite, par les règles générales données par *Lagrange* dans sa *Mécanique analytique*,

$$13.\quad \begin{cases} \mu\frac{d^2x}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma x+\delta x_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dx}, \\ \mu\frac{d^2y}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma y+\delta y_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dy}, \\ \mu\frac{d^2z}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma z+\delta z_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dz}, \\ \mu_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma x+\delta x_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dx_1}, \\ \mu_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma y+\delta y_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dy_1}, \\ \mu_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma z+\delta z_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dz_1}. \end{cases}$$

On tire de ces formules les suivantes:

$$14.\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) \\ \qquad\qquad =-(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}, \\ \mu\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \\ \qquad\qquad =-(zx_1-xz_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}, \\ \mu\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) \\ \qquad\qquad =-(xy_1-yx_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les trois intégrales

$$15.\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\mu_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)=c, \\ \mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\mu_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)=c_1, \\ \mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\mu_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)=c_2, \end{cases}$$

$c$, $c_1$, $c_2$, étant des constantes arbitraires. Je remarque à cette occasion les formules

$$16.\quad \begin{cases} \mu\left(y_1\frac{d^2z}{dt^2}-z_1\frac{d^2y}{dt^2}\right)=+(yz-zy_1)\Sigma\frac{mm_1\gamma\gamma}{\rho^3}, \\ \mu_1\left(y\frac{d^2z_1}{dt^2}-z\frac{d^2y_1}{dt}\right)=-(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{mm_1\delta\delta}{\rho^3}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$17.\quad \begin{cases} \mu\mu_1\dfrac{d\left(y_1\frac{dz}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}+y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}\right)}{dt} \\ =(yz_1-zy_1)\Sigma\dfrac{m_1m_2(\mu_1\gamma\gamma-\mu\delta\delta)}{\rho^3}. \end{cases}$$

On a deux autres systèmes de formules semblables à celui des formules (16.) et (17.), et qui se rapportent aux coordonnées $z$ et $x$ et aux coordonnées $x$ et $y$.

D'après une propriété connue des fonctions homogènes, il suit des formules (13.)

$$18.\quad \left.\begin{matrix} \mu\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\ +\mu_1\left(x_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+y_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+z_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \end{matrix}\right\}=-U.$$

Donc, en faisant usage des formules (4.) et (12.), on obtient la suivante:

$$19. \quad \frac{d^2(\mu rr+\mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2(U-2h).$$

Les six équations (13.) pourront servir à déterminer les six quantités $x$, $y$, etc., en fonction du temps. Mais on pourra aussi choisir pour cet effet six autres équations indépendantes entre elles et qui se déduisent des équations (13.) par des combinaisons différentes, par exemple, les quatre équations (12.) et (15.), une des équations (14.) et l'équation (19.). En effet, on reviendra sans peine de ces dernières aux équations (13.).

On déterminera $\alpha$, $\beta$, etc., par les quantités $\gamma$, $\delta$, etc., au moyen des formules

$$20. \quad \begin{cases} M\alpha = m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, & M\beta = m_1\delta_2 - m_2\delta_1, \\ M\alpha_1 = m_2\gamma - m\gamma_2, & M\beta_1 = m_2\delta - m\delta_2, \\ M\alpha_2 = m\gamma_1 - m_1\gamma, & M\beta_2 = m\delta_1 - m_1\delta, \end{cases}$$

où $M = m+m_1+m_2$. Ces formules étant substituées dans (5.), on aura

$$21. \quad \begin{cases} M\mu = m_1m_2\gamma\gamma + m_2m\gamma_1\gamma_1 + mm_1\gamma_2\gamma_2, \\ M\mu_1 = m_1m_2\delta\delta + m_2m\delta_1\delta_1 + mm_1\delta_2\delta_2, \\ 0 = m_1m_2\gamma\delta + m_2m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2, \end{cases}$$

formules analogues aux équations (5.)

**2.** Je veux discuter à présent la grandeur des différentes constantes qui entrent dans les formules précédentes. Ces constantes n'étant pas entièrement déterminées, il s'agira de faire telles suppositions sur leur grandeur respective qui pourront subsister avec les équations de condition établies entre ces constantes et qui permettront en même temps de faire usage des méthodes d'approximation connues.

Les équations de condition que l'on a établies entre les constantes $\alpha$, $\beta$, etc., sont les suivantes:

$$1. \quad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0, \\ m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 = 0, \end{cases}$$

celles que l'on a entre les six constantes $\gamma$, $\delta$, etc., seront

$$2. \quad \begin{cases} \gamma+\gamma_1+\gamma_2 = 0, \\ \delta+\delta_1+\delta_1 = 0, \\ m_1m_2\gamma\delta + m_2m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2 = 0. \end{cases}$$

Les masses des planètes étant très-petites par rapport au Soleil, les frac-

tions $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$ seront des quantités très-petites du premier ordre. Cela posé, les équations (1.) font voir qu'il est permis de supposer $\alpha_1$ et $\beta_2$ très-proches de l'unité, pendant que les constantes $\alpha$, $\alpha_1$, $\beta$, $\beta_1$ seront des quantités du premier ordre. En effet, si l'on fait

$$3. \qquad \alpha_2 = \frac{m_1 \zeta}{m}, \qquad \beta_1 = \frac{m_2 \eta}{m},$$

on tirera des équations (1.) les formules approchées,

$$4. \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, \quad 1+\eta+\zeta = 0, \\ \beta = -\frac{m_2}{m}, & \beta_2 = 1, \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées correspondantes des quantités $\gamma$, $\delta$, etc.,

$$5. \quad \begin{cases} \gamma = 1, & \gamma_1 = -\frac{m_1}{m}\eta, & \gamma_2 = -1, \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = \frac{m_2}{m}\zeta. \end{cases}$$

Enfin les quantités $\mu$ et $\mu_1$ s'écarteront peu des masses $m_1$ et $m_2$. Tous les écarts de ces valeurs approchées avec les véritables valeurs pourront être supposés de l'ordre des forces perturbatrices.

Il suit des considérations précédentes, que les quantités $x$, $y$, $z$ ne s'écarteront de $\xi_1$, $v_1$, $\zeta_1$, et que les quantités $x_1$, $y_1$, $z_1$ ne s'écarteront de $\xi_2$, $v_2$, $\zeta_2$ que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Donc, si l'on imagine deux corps dont les coordonnées respectives sont $x$, $y$, $z$, et $x_1$, $y_1$, $z_1$, leur mouvement autour du centre de gravité du système des trois corps pourra, en première approximation, être regardé comme elliptique. La même chose aura lieu si le mouvement est rapporté à tout autre point qui ne s'écarte de ce centre que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant ces quantités, on déduit des formules (3.) et (13.) du n 1. les équations différentielles qui servent à la première approximation, et que l'on intégrera par les formules elliptiques connues,

$$6. \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{x}{r^3}, & \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{x_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{y}{r^3}, & \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{y_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{z}{r^3}, & \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

où les facteurs $-\frac{m_1}{\gamma_2\mu}$, $\frac{m^2}{\delta_1\mu_1}$ ne s'écartent de l'unité que de quantités du

premier ordre par rapport aux forces pertubatrices. Si l'une des deux planètes, par exemple la seconde, est beaucoup plus éloignée du Soleil que l'autre, il conviendra de substituer aux trois dernières de ces équations celles-ci:

$$7.\quad \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{x_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{y_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

Dans les approximations successives l'on pourra laisser indéterminées les quantités $\mu$, $\mu_1$, $\gamma$, $\delta$, etc.; seulement il sera bon de fixer la valeur de la quantité $\frac{\delta}{\gamma}$. Si l'on fait exactement $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = 1$, $\delta = \beta_1 - \beta_2 = -1$, on aura

$$8.\quad \xi_1 - \xi_2 = x - x_1, \quad v_1 - v_2 = y - y_1, \quad \zeta_1 - \zeta_2 = z - z_1.$$

Dans ce cas, on peut envisager les quantités $x$, $y$, $z$ et $x_1$, $y_1$, $z_1$ comme les coordonnées des deux planètes elles-mêmes, mais rapportées à un autre point que le centre de gravité du système. En effet, on pourra faire, en même temps,

$$9.\quad \begin{cases} \xi_1 = x + a, & v_1 = y + b, & \zeta_1 = z + c, \\ \xi_2 = x_1 + a, & v_2 = y_1 + b, & \zeta_2 = z_1 + c, \end{cases}$$

$a$, $b$, $c$ étant déterminées par les équations

$$10.\quad a = \alpha_2 x + \beta_1 x_1, \quad b = \alpha_2 y + \beta_1 y_1, \quad c = \alpha_2 z + \beta_1 z_1.$$

Or des équations

$$\xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1,$$

on tire

$$\alpha_2\xi_1 + \beta_1\xi_2 = (\alpha_1 + \beta_1)\alpha_2 x + (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1 x_1;$$

et comme on a $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, on aura aussi

$$a = \frac{\alpha_2\xi_1 + \beta_1\xi_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

On trouve de la même manière

$$b = \frac{\alpha_2 v_1 + \beta_1 v_2}{\alpha_1 + \beta_1}, \qquad c = \frac{\alpha_2\zeta_1 + \beta_1\zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

Si l'on retranche des coordonnées $a$, $\xi_1$ et $\xi_2$ la même quantité

$$\frac{m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{M},$$

$M$ étant la somme des masses, on trouvera, après quelques réductions, la

valeur suivante de $a$, et de la même manière les valeurs ci-jointes de $b$ et de $c$,

$$11.\quad \begin{cases} a = \dfrac{\xi+\gamma_1\xi_1-\delta_2\xi_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ b = \dfrac{v+\gamma_1 v_1-\delta_2 v_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ c = \dfrac{\zeta+\gamma_1\zeta_1-\delta_2\zeta_2}{1+\gamma_1-\delta_2}. \end{cases}$$

Les constantes $\gamma_1$ et $\delta_2$ qui entrent dans ces formules pourront être des quantités quelconques remplissant l'équation de condition

$$12.\quad \left(\gamma_1-\frac{m_1}{m}\right)\left(\delta_2+\frac{m_2}{m}\right) = \frac{M}{m}\gamma_1\delta_2;$$

il sera donc, entre autres, permis de mettre

$$13.\quad \delta_2 = 0,\quad \gamma_1 = \frac{m_1}{m},\quad \text{ou}\quad \gamma_1 = 0,\quad \delta_2 = -\frac{m_2}{m}.$$

En supposant toujours

$$\gamma = -\delta = 1,$$

on aura encore

$$14.\quad \begin{cases} M\alpha = -[(m_1+m_2)\gamma_1+m_1], & M\beta = (m_1+m_2)\delta_2-m_1, \\ M\alpha_1 = m\gamma_1+m+m_2, & M\beta_1 = -[m\delta_2+m_2], \\ M\alpha_2 = m\gamma_1-m_1, & M\beta_2 = -m\delta_2+m+m_1, \\ \gamma_2 = -(1+\gamma_1), \quad \delta_1 = 1-\delta_2, & \\ \mu = mm_2\gamma_1\dfrac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\delta_2+m_2} = \dfrac{m_2(m\gamma_1-m_1)}{M\delta_2}(1+\gamma_1-\delta_2), & \\ \mu_1 = mm_1\delta_2\dfrac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\gamma_1-m_1} = \dfrac{m_1(m\delta_2+m_2)}{M\gamma_1}(1+\gamma_1-\delta_2). & \end{cases}$$

Les formules (11.) sont indépendantes de l'origine des coordonnées; elles font voir que le point autour duquel on suppose les deux planètes décrire des orbites elliptiques variables est le centre de gravité des trois corps, si l'on donne respectivement au Soleil, à la première et à la deuxième planète, les masses $1$, $\gamma_1$, $-\delta_2$. Si l'on fait $\delta_2 = 0$, ce point deviendra le centre de gravité du Soleil et de la première planète, en leur attribuant leurs masses effectives $m$ et $m_1$. On aura dans ce cas

$$15.\quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = -\dfrac{m_1}{M}, & \beta_1 = -\dfrac{m_2}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m+m_1}{M}, \\ \gamma = 1, & \gamma_1 = \dfrac{m_1}{m}, & \gamma_2 = -\left(1+\dfrac{m_1}{m}\right), \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = 0, \\ \mu = m_1\left(1+\dfrac{m_1}{m}\right), & & \mu_1 = m_2\dfrac{m+m_1}{M}. \end{cases}$$

On voit donc qu'il faudra attribuer aux planètes des masses un peu différentes dont la raison n'est plus $\frac{m_1}{m_2}$, mais $\frac{m_1}{m_2}.\frac{M}{m}$.

3. Ayant établi entre les quantités $x$, $y$, etc., les équations (6.) du n° 2., les corps dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$ et $x_1$, $y_1$, $z_1$, décriront autour de l'origine des coordonnées comme foyer des orbites elliptiques. Nommons, par rapport au premier de ces corps,

$2a$ le grand axe de son orbite,

$2p$ le paramètre,

$i$ l'inclinaison du plan de l'orbite à un plan fixe,

$\Omega$ la longitude du noeud ascendant du plan de l'orbite sur le plan fixe, et notons d'un trait les mêmes quantités rapportées au deuxième corps; cela posé, on aura par les formules connues pour le mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil,

$$1.\quad \begin{cases} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{p}.\cos i, \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega, \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = -k\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega, \\ x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1, \\ y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1, \\ z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt} = -k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos\Omega_1, \end{cases}$$

où l'on a

$$2.\quad kk = -\frac{1}{\gamma_2}.\frac{mm_1}{\mu},\qquad k_1k_1 = \frac{1}{\delta_1}.\frac{mm_2}{\mu_1},$$

et où pour le plan des $x$ et $y$ est pris le plan fixe, et pour l'axe des $x$ la droite fixe de laquelle les noeuds ascendants sont comptés.

Pour le véritable mouvement donné par les équations (13.) du n° 1., on laisse subsister la forme des expressions elliptiques, en en faisant varier les éléments. Dans cette supposition, *l'on a entre les six éléments troublés* $p$, $i$, $\Omega$, $p_1$, $i_1$, $\Omega_1$, *trois équations au moyen desquelles on exprime immédiatement les trois quantités* $\sqrt{p_1}.\cos i_1$, $\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1$, $\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos\Omega_1$, *par les trois autres* $\sqrt{p}.\cos i$, $\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega$, $\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega$. En effet, en substituant les formules (1.) dans les formules (15.) du n° 1., l'on trouve

entre ces quantités les simples relations suivantes:

$$3.\quad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}.\cos i+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1 = c, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos_1\Omega = c_1, \end{cases}$$

$c$, $c_1$, $c_2$ étant des constantes arbitraires.

On sait que l'on peut disposer de la direction des axes des coordonnées de manière à faire évanouir deux des trois constantes $c$, $c_1$, $c_2$. Supposons donc

$$c = 0, \quad c_1 = 0,$$

le plan des $x$ et $y$ sera celui auquel *Laplace* a donné le nom de *plan invariable.* En faisant $c = c_1 = 0$, les équations (3.) se changent dans les suivantes,

$$4.\quad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}.\cos i+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1 = 0, \\ \Omega = \Omega_1. \end{cases}$$

Les deux premières de ces formules font voir *que les inclinaisons des plans des deux orbites au plan invariable sont parfaitement déterminées par les deux paramètres,* et *vice versa.* Nommant $I = i_1 - i$ l'inclinaison mutuelle des deux plans, on déterminera $I$ par la formule

$$5.\quad 4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{pp_1}.\sin I^2 = \{\mu k\sqrt{p}+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}\}^2 - c,$$

et ensuite on aura $i$ et $i_1$ eux-mêmes par les formules

$$6.\quad \begin{cases} c_2\sin i_1 = \mu k\sqrt{p}.\sin I, \\ c_2\sin i = -\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin I. \end{cases}$$

Il suit de ces formules *que le plan invariable passera constamment entre les plans des deux orbites.* On voit par la troisième des formules (4.), que *l'intersection commune des plans des deux orbites se meut dans le plan invariable.* Je remarque que la position du plan d'une orbite, est indépendante de la forme que l'on suppose à cet orbite, et qu'elle est entièrement déterminée dès que le centre du mouvement ou l'origine des coordonnées est fixé. En effet, ce plan est celui qui passe, dans chaque moment du temps, par l'origine des coordonnées et par deux positions consécutives de la planète.

4. L'intersection commune des plans des deux orbites tournant autour du centre des coordonnées dans un plan fixe dans l'espace, et que l'on prendra pour celui des $x$ et $y$, il paraît naturel de prendre pour variables,

Les deux rayons vecteurs . . . . . $r$ et $r_1$,
Leurs distances au noeud ascendant commun des plan des deux orbites . . . . . $v$ et $v_1$,
Les inclinaisons des ces plans au plan invariable . . . $i$ et $i_1$,
La longitude du noeud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des $x$ . . . . . $\Omega$.

Par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on aura

$$1.\quad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), \\ z = r\sin i\sin v, \\ x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1. \end{cases}$$

Nommons $\delta v$ l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs de la première planète fictive; comme dans le plan de l'orbite d'une planète se trouve aussi sa position consécutive, on tirera des formules (1.) les deux systèmes de formules

$$2.\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = -(\cos\Omega\sin v + \sin\Omega\cos i\cos v)\delta v = A\delta v, \\ d\frac{y}{r} = -(\sin\Omega\sin v - \cos\Omega\cos i\cos v)\delta v = B\delta v, \\ d\frac{z}{r} = \sin i\cos v\delta v = C\delta v; \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = A dv + A' di - \frac{y}{r} d\Omega, \\ d\frac{y}{r} = B dv + B' di + \frac{x}{r} d\Omega, \\ d\frac{z}{r} = C dv + C' di, \end{cases}$$

en faisant

$$4.\quad \begin{cases} A' = \sin\Omega\sin i\sin v, \\ B' = -\cos\Omega\sin i\sin v, \\ C' = \cos i\sin v. \end{cases}$$

Il suit des formules (2.) et (3.),

$$5.\quad \begin{cases} 0 = A(dv - \delta v) + A' di - \frac{y}{r} d\Omega, \\ 0 = B(dv - \delta v) + B' di + \frac{x}{r} d\Omega, \\ 0 = C(dv - \delta v) + C' di. \end{cases}$$

On tire des formules (1.), (2.) et (4.)

$$6.\quad \begin{cases} \cos\Omega.A + \sin\Omega.B = -\sin v, \\ \cos\Omega.A' + \sin\Omega.B' = 0, \\ -\cos\Omega.y + \sin\Omega.x = -r\cos i\sin v. \end{cases}$$

On aura donc, d'après les formules (5.),

$$7.\quad \begin{cases} \delta v - dv = \cos i d\Omega = \operatorname{tang} v.\dfrac{di}{\operatorname{tang} i}, \\ d\Omega = \operatorname{tang} v.\dfrac{di}{\sin i}. \end{cases}$$

La formule

$$\delta v - dv = \cos i d\Omega$$

peut être déduite aisément de la considération d'un triangle sphérique formé par les côtés

$$d\Omega,\quad v+\delta v,\quad v+dv.$$

Soient

$$8.\quad \begin{cases} \cos\Omega = n\cos p, & \sin\Omega = n'\cos p', \\ \cos i\sin\Omega = n\sin p, & \cos i\sin\Omega = n'\sin p', \end{cases}$$

on aura

$$9.\quad \begin{cases} x = r.n\cos(v+p), & y = r.n'\cos(v-p'), \\ d.\dfrac{x}{r} = -n\sin(v+p)\delta v, & d.\dfrac{y}{r} = -n'\sin(v-p')\delta v. \end{cases}$$

Il s'ensuit de ces formules,

$$x d.\frac{y}{r} - y d.\frac{x}{r} = r n n' \sin(p+p')\delta v,$$

$$y d.\frac{z}{r} - z d.\frac{y}{r} = r\sin i.n'\cos p'.\delta v,$$

$$z d.\frac{x}{r} - x d.\frac{z}{r} = -r\sin i.n\cos p.\delta v,$$

ou, en substituant les formules (8.),

$$10.\quad \begin{cases} x dy - y dx = rr\cos i.\delta v, \\ y dz - z dy = rr\sin\Omega\sin i.\delta v, \\ z dx - x dz = -rr\cos\Omega\sin i.\delta v. \end{cases}$$

Ajoutant les carrés de ces équations, on a, d'après des formules connues,

$$rr(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2) = r^4\delta v^2,$$

ou

$$11.\quad dx dx + dy dy + dz dz = dr dr + rr\delta v\delta v.$$

Pour avoir des formules semblables par rapport à la deuxième des planètes fictives, on n'a qu'à ajouter un trait à chaque lettre dans les formules (2.),

(10.) et (11.), pourvu qu'on nomme $dv_1$ l'angle que forment ses deux rayons vecteurs consécutifs. Donc, puisqu'on a $\Omega_1 = \Omega$, il viendra, d'après la seconde des formules (7.),

$$12. \qquad \operatorname{tang} v \cdot \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} v_1 \cdot \frac{di}{\sin i}.$$

Mettant $c = c_1 = 0$ dans les formules (15.), n° 1, et substituant les formules (10.), ainsi que leurs semblables relatives à la deuxième planète, on a

$$13. \qquad \begin{cases} \mu r r \cos i . \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \cos i_1 . \delta v_1 = c_2 dt, \\ \mu r r \sin i . \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \sin i_1 . \delta v_1 = 0. \end{cases}$$

De ces formules on tire les valeurs suivantes de $\delta v$ et de $\delta v_1$,

$$14. \qquad \begin{cases} \delta v = dv + \operatorname{tang} v \frac{di}{\operatorname{tang} i} = -\frac{c_2 \sin i}{\mu r r \sin I} dt, \\ \delta v_1 = dv_1 + \operatorname{tang} v_1 \frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} = -\frac{c_2 \sin i}{\mu_1 r_1 r_1 \sin I} dt, \end{cases}$$

où, comme ci-dessus, on a fait $I = i_1 - i$. Substituant la première de ces formules dans la première des formules (10.), il vient

$$15. \qquad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \frac{c_2 \sin i_1 \cos i}{\mu \sin I}.$$

La différentielle de cette quantité sera égale à

$$-\frac{c_2}{\mu} \cdot \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin I^2} d . \frac{\sin I}{\sin i_1 \cos i} = \frac{c_2}{\mu} \cdot \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin I^2} d . \operatorname{tang} i \operatorname{c.tang} i_1;$$

on aura donc

$$16. \qquad x \frac{d^2 y}{dt} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{c_2}{\mu \sin I^2} \left( \sin i_1 \cos i_1 \frac{di}{dt} - \sin i \cos i \frac{di_1}{dt} \right).$$

On tire encore des formules (11.) et (14.) la suivante

$$17. \qquad \cos i_1 dv - \cos i dv_1 = \frac{c_2}{\sin I} \left( \frac{\sin i_1 \cos i_1}{\mu r r} + \frac{\sin i \cos i}{\mu_1 r_1 r_1} \right) dt.$$

L'expression de la force vive du système est fournie par la formule (4.), n° 1., et par les formules (11.) et (14.) données ci-dessus,

$$18. \qquad \begin{cases} 2T = \mu \left[ r r \left( \frac{\delta v}{dt} \right)^2 + \left( \frac{\delta r}{dt} \right)^2 \right] + \mu_1 \left[ r_1 r_1 \left( \frac{\delta v_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{\delta r_1}{dt} \right)^2 \right] \\ \quad = \frac{c_2^2}{\sin I^2} \left( \frac{\sin i_1^2}{\mu r r} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1} \right) + \mu \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2. \end{cases}$$

Les formules (12.) et (19.), n° 1., donnent

$$19. \qquad \begin{cases} 2T = 2U - 2h, \\ \mu r \frac{d^2 r}{dt^2} + \mu_1 r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \mu \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 = U - 2h, \end{cases}$$

d'où vient

$$20.\quad \begin{cases} \mu\left[2r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]+\mu_1\left[2r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad -\frac{c_2^2}{\sin I^2}\left[\frac{\sin i_1^2}{\mu r r}+\frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right]+2h=0. \end{cases}$$

Remarquons encore la formule qui dérive des formules (1.),

$$21.\quad xy_1-yx_1=rr_1(\cos i_1\sin v_1\cos v-\cos i\sin v\cos v_1).$$

Des formules (12.) et (16.) on tire

$$22.\quad \begin{cases} x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{c_2\sin i_1}{\mu\cos v\sin v_1\sin I^2}(\cos i_1\sin v_1\cos v-\cos i\sin v\cos v_1)\frac{di}{dt} \\ \qquad =\frac{c_2\sin i_1(xy_1-yx_1)}{\mu\cos v\sin v_1\sin I^2 rr_1}\cdot\frac{di}{dt}. \end{cases}$$

Substituant cette formule dans la dernière des formules (14.), n° 1., il vient

$$23.\quad \frac{c_2\sin i_1}{\cos v\sin v_1\sin I^2 rr_1}\cdot\frac{di}{dt}=-\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^2}+\frac{mm_1\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^2}+\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^2}\right).$$

Comme on a, d'après les formules (11.) et (14.),

$$24.\quad xd^2x+yd^2y+zd^2z=\tfrac{1}{2}d^2.rr-(drdr+rr\delta v^2)=rd^2r-c_2^2\frac{\sin i_1^2}{\mu^2r^2\sin I^2}dt^2,$$

il suit des formules (13.), n° 1.,

$$25.\quad \begin{cases} \mu\frac{d_2r}{dt^2}=\frac{c_2c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2r^3}-\frac{mm_1\gamma_2(\gamma_2r+\delta_2r_1\cos U)}{\varrho_2^2} \\ \qquad -\frac{mm_2\gamma_1(\gamma_1r+\delta_1r_1\cos U)}{\varrho_1^2}-\frac{m_1m_2\gamma(\gamma r+\delta r_1\cos U)}{\varrho^2}. \end{cases}$$

Des formules (18.) et (25.) on peut déduire la suivante

$$26.\quad \frac{c_2^2}{\mu rr}d.\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2}+\frac{c_2^2}{\mu_1r_1r_1}d.\frac{\sin^2 i^2}{\sin I^2}$$
$$=4rr_1\sin U dU\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^2}+\frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^2}+\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^2}\right).$$

On obtient aussi la valeur de $dU$ en observant que, dans l'équation

$$\cos U=\cos v\cos v_1+\cos I\sin v\sin v_1,$$

on peut mettre en même temps $U+dU$, $v+\delta v$, $v_1+\delta v_1$ au lieu de $U$, $v$, $v_1$, ce qui donne

$$27.\quad \begin{cases} \sin U dU=(\sin v\cos v_1-\cos I\cos v\sin v_1)\delta v \\ \qquad +(\cos v\sin v_1-\cos I\sin v\cos v_1)\delta v_1. \end{cases}$$

Si, dans le triangle sphérique formé par les côtés $U$, $v$, $v_1$, on nomme $\varphi$ et $\varphi_1$ les angles opposés aux côtés $v$ et $v_1$, on a

28. $$dU = \cos\varphi\,\delta v + \cos\varphi_1\,\delta v_1,$$

formule qui fournit l'interprétation géométrique de la formule (27.)

Les formules (14.), (23.) et (27.) pourront servir à vérifier la formule (26.)

5. Entre les six quantités

$$r,\ r_1;\quad v,\ v_1;\quad i,\ i_1$$

et le temps $t$, on a, d'après les formules (12.), (14.), (19.), (23.) du précédent article, les équations suivantes qui pourront servir à développer ces quantités en fonctions du temps.

*Équations différentielles du problème des trois corps.*

I. $$\operatorname{tang} v\,\frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} v_1 \cdot \frac{di_1}{\sin i_1},$$

II. $$\operatorname{tang} v\,\frac{di}{\operatorname{tang} i} + dv = \frac{c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1}{\sin I}\cdot\frac{dt}{rr},$$

III. $$\operatorname{tang} v\,\frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} + dv_1 = \frac{c_2}{\mu_1}\cdot\frac{\sin i}{\sin I}\cdot\frac{dt}{r_1 r_1},$$

IV. $$\frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2 r r_1}\,di = -\left(\frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\varrho_2^3} + \frac{m m_2 \gamma_1 \delta_1}{\varrho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\delta^3}\right) dt,$$

V. $$\frac{c_2^2}{\sin I^2}\left(\frac{\sin i_1^2}{\mu r r} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2U - 2h,$$

VI. $$\frac{d^2(\mu r r + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2U - 4h.$$

On a mis dans ces formules

1. $$\begin{cases} U = \dfrac{m m_1}{\varrho_2} + \dfrac{m m_2}{\varrho_1} + \dfrac{m_1 m_2}{\varrho} \\ \varrho\varrho = \gamma\gamma\, r r + 2\gamma\delta\, r r_1 \cos U + \delta\delta\, r_1 r_1, \\ \varrho_1\varrho_1 = \gamma_1\gamma_1 r r + 2\gamma_1\delta_1 r r_1 \cos U + \delta_1\delta_1 r_1 r_1, \\ \varrho_2\varrho_2 = \gamma_2\gamma_2 r r + 2\gamma_2\delta_2 r r_1 \cos U + \delta_2\delta_2 r_1 r_1, \\ \cos U = \cos v \cos v_1 + \cos I \sin v \sin v_1. \end{cases}$$

Entre les six constantes $\gamma$, $\delta$, etc., on a les équations de condition

2. $$\begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1\delta_1 + m m_1 \gamma_2\delta_2 = 0, \end{cases}$$

où $m$, $m_1$, $m_2$ sont les masses du Soleil et des deux planètes. Donc trois des constantes $\gamma$, $\delta$, etc., pourront être prises à l'arbitraire. Les quantités $u$ et $\mu_1$ sont déterminées par les formules

d'où vi[illegible] $m\gamma_1\gamma_1 + m m_1\gamma_2\gamma_2$,

$m_2 m\delta_1\delta_1 + m m_1\delta_2\delta_2$,

[illegible]ment le système des six équations (I. [illegible] l'angle $\Omega$ au moyen de la formule

$$d\Omega = \operatorname{tang} v \cdot \frac{di}{\sin i}.$$

[illegible] quadrature. On formera ensuite les six quantités

$$\ldots \cos i \sin v), \quad x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1 \sin v_1).$$

$$\ldots \cos i \sin v), \quad y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1 \sin v_1).$$

$$z_1 = r_1 \sin i_1 \sin v_1.$$

[illegible]

$$5. \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1}{M}, & \beta = \dfrac{m_1\delta_2 - m_2\delta_1}{M}, \\ \alpha_1 = \dfrac{m_2\gamma - m\gamma_2}{M}, & \beta_1 = \dfrac{m_2\delta - m\delta_2}{M}, \\ \alpha_2 = \dfrac{m\gamma_1 - m_1\gamma}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m\delta_1 - m_1\delta}{M}, \end{cases}$$

après quoi on aura les coordonnées rectangulaires du Soleil et des deux planètes, rapportées à leur centre de gravité, le plan invariable étant pris pour celui des $x$ et $y$,

$$6. \quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, \\ v = \alpha y + \beta y_1, & v_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & v_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1, \\ \zeta = \alpha z + \beta z_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1. \end{cases}$$

Voilà donc le problème des trois corps réduit à l'intégration des six équations (I. à VI.) et à une quadrature. *Les six équations différentielles* (I. à VI.) *sont toutes du premier degré, hors une seule qui est du second, et il n'y entre aucune trace des noeuds.*

# 4.

# Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.

## Argumentum.

### §. 1.

Propositurus sum sequentibus ***Euleriani*** Multiplicatoris extensionem, per totum calculum integralem uberrimi usus et frequentissimae applicationis, eamque ab amplificationibus ab ipso ***Eulero*** et ***Lagrange*** factis diversissimam. Quae amplificatio maxime nititur analogia, quam in alia Commentatione pluribus prosecutus sum, inter quotientes differentiales et Determinantia functionalia. Efficit ***Eulerianus*** Multiplicator ut duae ***duarum*** variabilium functiones datae producant eiusdem functionis differentialia partialia. Respondent autem differentialibus partialibus Determinantia functionalia partialia, quae formari possunt quoties variabilium numerus numerum functionum superat, variis eligendo modis variabiles quarum respectu Determinans formetur Ita datis $n$ functionibus $n+1$ variabilium earum functionum dabuntur $n+1$ Determinantia partialia; veluti si $f$ et $\varphi$ trium variabilium $x$, $y$, $z$ functiones sunt, tria earum functionum Determinantia partialia erunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Quibus considerationibus motus, ut ***Eulerianam*** theoriam amplificarem, generaliter Multiplicatorem examinavi, in quem ducendae essent $n+1$ functiones $n+1$ variabilium ut producta haberi possent pro earundem $n$ functionum Determinantibus functionalibus partialibus. Quemadmodum autem, proposita functione duarum variabilium, inter bina eius differentialia partialia intercedit aliqua conditio ex elementis nota, scilicet ut alterius differentiale secundum alteram variabilem sumtum alterius differentiali secundum alteram variabilem sumto aequale sit: ita inter illa $n+1$ Determinantia functionalia partialia inveni locum habere conditionem analogam. Singulis enim Determinantibus functionalibus partialibus respective secundum singulas variabiles differentiatis, aggregatum $n+1$ quantitatium provenientium videbimus identice evanescere. Quod suppe-

ditat aequationem differentialem partialem, cui Multiplicator ille satisfacere debeat, ei analogam qua *Eulerianus* Multiplicator definitur. Et vice versa, sicuti in theoria *Euleriana*, quamcunque quantitatem, aequationi illi differentiali partiali satisfacientem, videbimus pro Multiplicatore haberi posse. Unde ad Multiplicatorem aliquem obtinendum non necessarium erit ut illae $n$ functiones ipsae innotescant.

Investigatio ipsius functionis duarum variabilium, cuius differentialia partialia datis functionibus proportionalia sint, pendet ab integratione completa aequationis differentialis vulgaris primi ordinis inter duas variabiles; quippe quae ea erit functio, quae Constanti Arbitrariae aequalis evadit. Multiplicator autem, qui functiones datas *aequales* efficit binis differentialibus eius functionis partialibus, ipsius *aequationis differentialis* Multiplicator appellatur. Qui aequationis differentialis integratione completa sponte suppeditatur, et vice versa eius cognitione ipsa integratio maxime expeditur, videlicet ad solas revocatur Quadraturas. Similiter datis $n+1$ variabilium $n+1$ functionibus, ut obtineantur $n$ functiones quarum Determinantia partialia rationes easdem atque illae inter se habeant: facile patebit, integrandum esse systema $n$ aequationum differentialium vulgarium primi ordinis, quo scilicet statuitur illarum $n+1$ variabilium differentialia esse in ratione ipsarum $n+1$ quantitatum propositarum. Quo complete integrato functiones, quae Constantibus Arbitrariis a se independentibus aequales evadunt, ipsae erunt $n$ functiones quaesitae. Atque Multiplicatorem, qui $n+1$ quantitates datas Determinantibus earum functionum partialibus aequales efficit, per analogiam illius *systematis aequationum differentialium vulgarium Multiplicatorem* appello. Iam quidem complete integrato systemate aequationum differentialium vulgarium, eius facile innotescit Multiplicator; quippe ad quem inveniendum tantum opus est ut functionum Constantibus Arbitrariis aequalium, quae per integrationem completam constant, unum aliquod formetur Determinans partiale. At vice versa, cognito aliquo systematis aequationum differentialium Multiplicatore, sive quod idem est, cognita aliqua solutione aequationis differentialis partialis qua Multiplicator definitur, non ita patebat, utrum et quodnam inde commodum vel auxilium ad integrandum systema peti posset, ita ut nostri Multiplicatoris analogia cum *Euleriano* videretur in ea ipsa re deficere, qua propter olim *Eulerus* sui Multiplicatoris theoriam condidit. Contigit tandem usum introspicere plane singularem quem in integrando aequationum differentialium systemate e Multiplicatoris cognitione percipere liceat, quod scilicet eius ope non prima aliqua, sed omnium ultima integratio ad Quadraturas revocetur.

Hinc in theoria integrationis aequationum differentialium vulgarium novus disquisitionum aperitur campus, videlicet ultimas investigandi integrationes, dum primae non innotescunt. Quippe in vastis et luculentissimis problematis per theoriam hic propositam fit ut ultima generaliter absolvatur integratio, dum in casibus tantum particularibus Integralia prima invenire licet.

Capite primo examinabo Multiplicatoris nostri varias formas insignioresque proprietates. In altero Capite eius monstrabo usum in integrando aequationum differentialium vulgarium systemate. In Capite tertio theoriam Multiplicatoris extendam ad systemata aequationum differentialium vulgarium cuiuslibet ordinis. In Commentationibus deinde subsequentibus mihi propositum est praecepta hic tradita variis illustrare applicationibus; e quibus est principium novum mechanicum latissime patens, nuper a me sine demonstratione divulgatum.

---

## Caput primum.

## Novi Multiplicatoris definitio et varii proprietates.

### Lemma Fundamentale eiusque varii usus; de Determinantibus functionalibus partialibus.

### §. 2.

Aequatione inter variabiles $x$ et $y$ proposita,

$$f(x, y) = \text{const.},$$

obtinetur differentialium $dx$ et $dy$ ratio,

$$dx : dy = \frac{\partial f}{\partial y} : -\frac{\partial f}{\partial x} \text{ *).}$$

Si de hac ratione differentialium $dx$ et $dy$ sola agitur, in dextra parte aequationis antecedentis omittere licet differentialium partialium $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ factorem vel denominatorem, si quo afficiuntur communem. Ubi vero pro quantitatibus, quae differentialibus $dx$ et $dy$ proportionales evadunt ipsa sumere placet $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $-\frac{\partial f}{\partial x}$ vel $-\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$, qualia differentiatione partiali prodeunt, nullo

*) Differentialia vulgaria ut in aliis Commentationibus charactere $-d-$, partialia charactere $-\partial-$ denoto.

factore aut denominatore communi rejecto, eam conditionem formula analytica exprimi posse constat.

Videlicet si quantitas ipsi $dx$ proportionalis differentiatur ipsius $x$ respectu, quantitas ipsi $dy$ proportionalis differentiatur ipsius $y$ respectu, quantitatum differentiatione provenientium summa identice evanescere debet. Theorema simile ad plures variabiles valet.

Aequationibus enim inter $x$, $y$, $z$ propositis,

$$f(x, y, z) = \text{Const.}, \quad \varphi(x, y, z) = \text{Const.},$$

obtinetur differentiando,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0.$$

E quibus aequationibus eruuntur differentialium $dx$, $dy$, $dz$ rationes,

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

siquidem ponitur

$$A = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$
$$B = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$C = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Si tantum de rationibus differentialium $dx$, $dy$, $dz$ agitur, factorem vel denominatorem communem quantitatum $A$, $B$, $C$, si quo afficiuntur, omittere licet. Ubi vero pro quantitatibus, quae differentialibus $dx$, $dy$, $dz$ proportionales evadunt, ipsa sumere placet $A$, $B$, $C$, nullo factore vel denominatore communi rejecto, eam conditionem aliqua formula analytica exprimi posse videbimus. Fit enim

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y},$$
$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Quae expressiones additae sese mutuo destruunt, unde eruitur,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

hoc est, si quantitatem ipsi $dx$ proportionalem ipsius $x$ respectu, quantitatem

ipsi $dy$ porportionalem ipsius $y$ respectu, quantitatem ipsi $dz$ proportionalem ipsius $z$ respectu differentiamus, trium quantitatum differentiatione provenientium summa identice evanescere debet. Quae conditio prorsus analoga est ei, quae antecedentibus de duabus variabilibus tradita est atque e primis elementis constat. Antecedentia ad numerum variabilium quemcunque extendere licet, siquidem advocantur propositiones quas in *Diario Crell. Vol. XXIII.* de Determinantibus algebraicis et functionalibus tradidi et quarum per totam hanc Commentationem usum frequentissimum faciam. Habetur enim sequens

Lemma fundamentale.

*„Sint* $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ *quantites quae in Determinante Functionali*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

*respective per* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *multiplicatae reprehenduntur, erit*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0.\text{“}$$

Demonstratio.

Secundum definitionem quantitatum $A$, $A_1$ etc. fit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} A_2 \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} A_n.$$

Unde Lemma demonstratu propositum sic quoque exhibere licet:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial . fA}{\partial x} + \frac{\partial . fA_1}{\partial x_1} + \frac{\partial . fA_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial . fA_n}{\partial x_n}.$$

Facio hanc formulam iam demonstratam esse pro $n-1$ functionibus $n$ variabilium, probabo Lemma ad $n$ functiones $n+1$ variabilium valere.

Designo per $(i, k)$ quantitatem quae in Determinante Functionali $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ multiplicata reprehenditur per factorem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k}.$$

Constat autem per Determinantium proprietates iam olim ab ill. *Laplace* adnotatas, *bina Aggregata, in Determinante functionali proposito resp. per* $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_k}$ *et per* $\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_i}$ *multiplicata, valoribus oppositis gaudere.* Unde sequitur

$$(i, k) = -(k, i) \quad \text{sive} \quad (i, k) + (k, i) = 0.$$

Est $A_i$ complexus terminorum eius Determinantis qui per $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ multiplicantur, unde fit

$$A_i = \frac{\partial f_1}{\partial x}(i, 0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(i, 1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(i, 2) \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(i, n),$$

qua in formula ipsum $(i, i)$ aut omittendum aut $= 0$ ponendum est. Est porro $A_i$ Determinans functionum $f_1, f_2, \ldots f_n$ formatum respectu variabilium $x, x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ atque sunt $(i, 0)$, $(i, 1)$ etc. quantitates quae in Determinante Functionali $A_i$ multiplicatae reprehenduntur per $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ etc. Unde si Lemma propositum ad $n-1$ functiones $n$ variabilium valet, erit pro indicis $i$ valoribus $0, 1, 2, \ldots n$,

$$\frac{\partial(i, 0)}{\partial x} + \frac{\partial(i, 1)}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial(i, n)}{\partial x_n} = 0,$$

ideoque etiam

$$A_1 = \frac{\partial . f_1(i, 0)}{\partial x} + \frac{\partial . f_1(i, 1)}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . f_1(i, n)}{\partial x_n}.$$

Quae formula pro quolibet ipsius $i$ valore $0, 1, 2, \ldots n$ valet. Iam generaliter observo, *quoties ponatur*

$$H_i = \frac{\partial . a_{i,0}}{\partial x} + \frac{\partial . a_{i,1}}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . a_{i,n}}{\partial x_n},$$

*designantibus* $a_{i,k}$ *quantitates quascunque pro quibus sit*

$$a_{i,k} + a_{k,i} = 0, \quad a_{i,i} = 0,$$

*fieri*

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial H_n}{\partial x_n} = 0.$$

Bina enim differentialia inter se juncta,

$$\frac{\partial . \frac{\partial . a_{i,k}}{\partial x_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial . \frac{\partial . a_{k,i}}{\partial x_i}}{\partial x_k},$$

mutuo destruuntur, unde totam expressionem $\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial H_n}{\partial x_n}$ identice evanescere invenis. Ponendo autem $f_1 . (i, k) = a_{i,k}$, satisfit conditioni $a_{i,k} = -a_{k,i}$, porro fit $H_i = A_i$; ideoque

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0,$$

sive Lemma de $n$ functionibus $n+1$ variabilium justum erit, dummodo de $n-1$ functionibus $n$ variabilium locum habet. Unde tantum necesse est ut Lemma pro una functione duarum variabilium constet. Pro una autem functione $f_1$

duarum variabilium $x$ et $y$ abeunt quantitates $A$ etc. in differentialia partialia $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ et $-\frac{\partial f_1}{\partial x}$, ideoque Lemma redit in formulam

$$\frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial x}}{\partial y} - \frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial y}}{\partial x} = 0,$$

quae est differentialium partialium proprietas fundamentalis supra commemorata.

Lemma generale etiam directe demonstrari potest absque illa reductione numeri $n$ ad numerum $n-1$. Nam cum $A_i$ vacet differentialibus, ipsius $x_i$ respectu sumtis, e quantitatibus $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, nulla implicare potest differentialia bis secundum eandem variabilem sumta. Differentialia autem secunda, secundum variabiles diversas $x_i$ et $x_k$ sumta, non provenire possunt nisi e solis duobus terminis

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}.$$

Unde ad probandum Lemma propositum sufficit ut demonstretur, in Aggregato $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ se mutuo destruere terminos per quantitates $\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k}$ multiplicatos. Quod facile patet. Ponamus enim

$$A_i = \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \ldots . + \alpha_n \frac{\partial f_n}{\partial x_k},$$

fit secundum Determinantium proprietatem, in priore demonstratione in usum vocatam,

$$A_k = -\left\{\alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \ldots . + \alpha_n \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right\}.$$

Quantitates $\alpha_1$, $\alpha_2$ etc. neque differentialibus secundum $x_i$ sumtis, neque differentialibus secundum $x_k$ sumtis afficiuntur. Unde substituendo ipsarum $A_i$ et $A_k$ expressiones antecedentes, de Aggregato

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k},$$

prorsus exulant differentialia secunda, secundum variabiles $x_i$ et $x_k$ sumta, terminis binis,

$$+ \alpha_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k \partial x_i} - \alpha_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k},$$

se mutuo destruentibus. Erant autem inter omnes terminos Aggregati propositi

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

soli termini $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ qui affici possint differentialibus $\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k}$, unde in Aggregato proposito termini differentialibus secundis secundum $x_i$ et $x_k$ sumtis affecti se mutuo destruunt. Unde cum $x_i$ et $x_k$ binae quaecunque variabiles esse possint a se diversae, illud Aggregatum totum evanescit. Q. d. e.

Quoties numerus variabilium, quas datae functiones $f_1, f_2, \ldots f_n$ implicant, ipsum functionum numerum $n$ superat, proponi potest, earum functionum Determinantia respectu quarumque $n$ variabilium formare. Quae vocabo functionum $f_1, f_2, \ldots f_n$ ***Determinantia Partialia*** secundum analogiam denominationis de differentialibus usitatae.

Si numerus variabilium est $n+1$ sicuti antecedentibus, erit numerus Determinantium Functionalium Partialium $n+1$; si numerus variabilium est $n+2$, dabuntur $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ Determinantia Functionalia Partialia, et ita porro. Eorum Determinantium Functionalium Partialium signa cum in arbitrio posita sint, casu quo variabilium numerus numerum functionum tantum unitate superat, supponam, signa omnium Determinantium ab eorum uno ita pendere, ut binorum Determinantium partialium alterum de altero deducatur, in signis differentialibus binarum variabilium independentium commutatione facta, omnium simul terminorum mutatis signis. Quem invenis esse habitum quantitatum $A$, $A_1$, ... ... $A_n$, quae sunt functionum $f_1, f_2, \ldots f_n$ Determinantia partialia. Videlicet de uno

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

deducitur $-A_i$, loco ipsorum

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$$

respective scribendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x}.$$

Pro una duarum variabilium $x$ et $y$ functione $f_1$ abibunt Determinantia partialia in differentialia partialia functionis $f_1$, alterum positivo alterum negativo signo sumtum,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}, \; -\frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \text{vel} \quad -\frac{\partial f_1}{\partial y}, \; \frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

Et quemadmodum inter differentialia partialia $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, locum habet formula fundamentalis,

$$\frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial y}}{\partial x} - \frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial x}}{\partial y} = 0,$$

ita $n+1$ variabilium $x$, $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ propositis $n$ functionibus $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ Lemmate antecedente constituitur inter Determinantia Partialia $A$, $A_1$, $A_2$, ... ... $A_n$ aequatio conditionalis fundamentalis,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0.$$

Quod igitur Lemma gravissimam manifestat analogiam Determinantium Functionalium et quotientium differentialium partialium.

Lemma traditum dedi olim in Commentatione, *Vol. VI. Diar. Crell. pg. 263 sqq. inserta, „De resolutione aequationum per series infinitas.“* Quod eo loco adhibui ad demonstrandam Propositionem quae et ipsa luculentam analogiam Determinantium Functionalium cum differentialibus constituit. Nam cum pateat seriei e solis variabilis $x$ potestatibus conflatae quotientem differentialem vacare termino $\frac{1}{x}$, demonstravi, *serierum* $f$, $f_1$, .... $f_n$, *conflatarum e solis variabilium* $x$, $x_1$, .... $x_n$ *potestatibus, Determinans Functionale*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

*vacare termino* $\frac{1}{x x_1 x_2 \ldots x_n}$. Quippe Determinans antecedens per Lemma nostrum aequatur quantitati

$$\frac{\partial . fA}{\partial x} + \frac{\partial . fA_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . fA_n}{\partial x_n},$$

cuius terminus primus evolutus vacare debet termino in $\frac{1}{x}$ ducto, secundus termino in $\frac{1}{x_1}$ ducto, et ita porro, ita ut in tota quantitate evoluta non obvenire possit terminus $\frac{1}{x x_1 x_2 \ldots x_n}$.

Quae propositio adhiberi potest ad amplificandum theoriam *Cauchyanam* residuorum dictam, eiusque ope radices systematis simultanei aequationum in series infinitas evolvi, quod in Commentatione citata videas.

Data occasione breviter adhuc innuam usum Lemmatis propositi in integralibus multiplicibus inter datos limites determinandis. Proponatur integrale multiplex,

$$\int U df df_1 \ldots df_n,$$

ponamusque limites, inter quos integratio afficienda sit, eo definiri, quod introducendo certas alias variabiles $x$, $x_1$, .... $x_n$ pro variabilibus independentibus, harum novarum variabilium limites a se invicem independentes sive constantes sint. Constat, novis variabilibus exhibitum integrale propositum fore,

$$\int U df\, df_1 \ldots\ df_n = \int U \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx\, dx_1 \ldots\ dx_n.$$

Variabilibus propositis $f, f_1, \ldots\ f_n$ expressa $U$ integrataque ipsius $f$ respectu, prodeat $\Pi$ ita ut sit

$$\Pi = \int U \partial f, \quad U = \frac{\partial \Pi}{\partial f},$$

erit

$$U \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Quod patet substituendo valores

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i},$$

et observando, post substitutionem factam evanescere quantitates omnes in

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_2}, \quad \ldots\ \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}$$

ductas. Fit autem e Lemmate proposito

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial . \Pi A}{\partial x} + \frac{\partial . \Pi A_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . \Pi A_n}{\partial x_n}.$$

Unde eruitur formula reductionis

$$\int U df\, df_1 \ldots\ df_n =$$

$$\int (\Pi A)\, dx_1 dx_2 \ldots\ dx_n + \int (\Pi A_1)\, dx\, dx_2 \ldots\ dx_n \ldots\ + \int (\Pi A_n)\, dx\, dx_1 \ldots\ dx_n.$$

Hic signo $(\Pi A_i)$ denoto, in functionibus $f, f_1, \ldots\ f_n$ ipsi $x$ substituendos esse binos eius limites constantes, binasque expressiones ipsius $\Pi A_i$ provenientes alteram de altera detrahendas esse. Hinc integrale $n+1$tuplex propositum videmus revocari ad $2n+2$ integralia $n$tuplicia. Quae singula eadem quidem formula exhiberi possunt

$$\int \Pi df_1\, df_2 \ldots\ df_n\ *),$$

sed pro singulis erit $\Pi$ diversa ipsarum $f_1, f_2, \ldots\ f_n$ functio, limitesque ipsarum $f_1, f_2, \ldots\ f_n$ diversi erunt. Singula deinde integralia $n$tuplicia eadem methodo ad $2n$ integralia $(n-1)$tuplicia revocari possunt, eaque ratione pergere licet, usque dum tota integratio inter limites propositos perfecta sit.

---

*) Habendo enim $x$ pro Constante, fit

$$\int \Pi A\, dx_1\, dx_2 \ldots\ d_n = \int \Pi df_1\, df_2 \ldots\ df_n,$$

cum sit

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

et similis formula pro reliquis integralibus valet.

Lemma traditum sub alia quoque forma proponi potest memoratu digna. Habeamus enim $x$, $x_1$, .... $x_n$ pro ipsarum $f$, $f_1$, .... $f_n$ functionibus, earumque quaeramus differentialia partialia, ipsius $f$ respectu sumta. Quae per regulas notas inveniuntur,

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{A}{R}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial f} = \frac{A_1}{R}, \quad .... \quad \frac{\partial x_n}{\partial f} = \frac{A_n}{R},$$

siquidem $R$ est Determinans propositum,

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f_1}{\partial x_1} .... \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Hinc formula nostra

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} ....+ \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0,$$

si reputamus esse

$$\frac{\partial R}{\partial f} = \frac{\partial R}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial f} + \frac{\partial R}{\partial x_1} . \frac{\partial x_1}{\partial f} ....+ \frac{\partial R}{\partial x_n} . \frac{\partial x_n}{\partial f},$$

formam induit sequentem,

$$0 = \frac{\partial R}{\partial f} + R \left\{ \partial . \frac{\frac{\partial x}{\partial f}}{\partial x} + \partial . \frac{\frac{\partial x_1}{\partial f}}{\partial x_1} ....+ \partial . \frac{\frac{\partial x_n}{\partial f}}{\partial x_n} \right\}$$

sive

$$0 = \frac{\partial \log R}{\partial f} + \frac{\partial . \frac{\partial x}{\partial f}}{\partial x} + \frac{\partial . \frac{\partial x_1}{\partial f}}{\partial x_1} ....+ \frac{\partial . \frac{\partial x_n}{\partial f}}{\partial x_n}.$$

In his formulis supponitur, ipsas $R$, $x$, $x_1$, .... $x_n$ primum pro quantitatum $f$, $f_1$, .... $f_n$ functionibus haberi omnesque secundum $f$ differentiari; deinde differentialia partialia $\frac{\partial x}{\partial f}$, $\frac{\partial x_1}{\partial f}$ etc. rursus per ipsas $x$, $x_1$, .... $x_n$ exprimi, et respective secundum $x$, $x_1$, .... $x_n$ differentiari. Commutando quantitates $x$, $x_1$ etc. cum quantitatibus $f$, $f_1$ etc. formula antecedens in aliam abit, quam in *Diar. Crell.* Vol. XXII. pag. 336 demonstravi.

### Novi Multiplicatoris definitio. Aequatio differentialis partialis cui satisfacit. Variae formae quas Multiplicatoris valor induere potest.

### §. 3.

Sint $X$, $X_1$, .... $X_n$ variabilium $x$, $x_1$, .... $x_n$ functiones quaecunque non simul omnes identice evanescentes; proposita aequatione differentiali partiali lineari primi ordinis,

$$0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} ....+ X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

solutiones ejus exstant $n$ a se invicem independentes. Quarum Determinantia partialia erunt inter se ut Coëfficientes aequationis differentialis partialis propositae $X, X_1, \ldots X_n$. Solutionibus enim illis a se independentibus vocatis

$$f_1, f_2, \ldots f_n,$$

habentur aequationes identicae,

$$0 = X\frac{\partial f_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial f_n},$$
$$0 = X\frac{\partial f_2}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = X\frac{\partial f_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

quae sunt $n$ aequationes lineares inter $n+1$ quantitates $X, X_1, \ldots X_n$, terminis carentes constantibus. Quibus aequationibus determinantur rationes quas ipsae $X, X_1$, etc. inter se tenent. Videlicet per regulas notas algebraicas invenitur, ipsas $X, X_1, \ldots X_n$ esse inter se ut quantitates $A, A_1, \ldots A_n$, §. pr. consideratas, quae erant complexus terminorum, in Determinante functionali

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

respective per $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ multiplicatorum, sive functionum $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots f_n$ Determinantia partialia. Sit $M$ factor per quem Coëfficientes $X, X_1, \ldots X_n$ multiplicati ipsa producant Determinantia partialia $A, A_1, \ldots A_n$, ita ut fiat:

$$1. \quad MX = A, \quad MX_1 = A_1, \quad \ldots \quad MX_n = A_n.$$

Posito

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

cum habeatur

$$R = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

sequitur

$$2. \quad R = M\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Iisdem substitutis formulis (1.) Lemma §. pr. demonstratum in hanc formulam abit:

$$3. \quad 0 = \frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}.$$

Habemus igitur Propositionem sequentem, qua Multiplicatoris $M$ continetur definitio.

**Propositio.**

„Proponatur expressio

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

in qua sint $X$, $X_1$, .... $X_n$ datae variabilium $x$, $x_1$, .... $x_n$ functiones: functionibus $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ rite determinatis, ipsa $f$ autem indeterminata manente, semper exstabit factor $M$, per quem multiplicata expressio proposita formam induat Determinantis functionalis

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots.\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

isque Multiplicator satisfaciet aequationi differentiali partiali,

$$0=\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1}\ldots.+\frac{\partial.MX_n}{\partial x_n}.$$"

E valoribus ipsius $M$ in sequentibus perpetuo excludo valorem $M=0$. Quem patet satisfacere aequationi (2.), qua Multiplicator definitur, dummodo statuatur functionum $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ unam reliquarum functionem esse; constat enim Determinans Functionale evanescere si functiones propositae non a se invicem sint independentes. Illo autem ipsius $M$ valore excluso, Propositio antecedens inverti potest. Videlicet *si Multiplicator $M$ definitur conditione ut pro functione indefinita $f$ expressio,*

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

*evadat Determinans functionale,*

$$R=\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

*functiones $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ necessario erunt solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis linearis,*

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Nam pro ipsa $f$, quae erat functio indefinita, sumendo aliquam functionum $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, identice evanescit Determinans $R$. Quod cum supponatur aequale expressioni,

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

atque factor $M$ a nihilo diversus statuatur, fieri debet ut substituendo ipsi $f$ functiones $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ identice habeatur,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

sive ut $f_1, f_2, \ldots f_n$ ipsae sint aequationis differentialis partialis propositae solutiones. Eruntque solutiones illae $f_1, f_2, \ldots f_n$ a se invicem independentes; si enim una reliquarum functio esset, Determinans $R$ identice evanesceret pro functione $f$ indefinita; unde etiam pro functione indefinita $f$ evanescere deberet expressio

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

quod fieri non potest nisi omnes $X$, $X_1$ etc. simul identice evanescunt.

Datis functionibus $f_1, f_2, \ldots f_n$ una quaelibet ex aequationum (1.) numero ad definiendum Multiplicatorem sufficit, veluti aequatio,

$$MX = A = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

e qua sequitur

$$4.\quad M = \frac{1}{X}\Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Qua tamen formula ut definiatur Multiplicator aequationis differentialis partialis propositae, addenda conditio est ut $X$ et $A$ non evanescant.

Pro duabus variabilibus $x$ et $x_1$ Multiplicator antecedentibus definitus cum ***Euleriano*** convenit. Sint enim $X$, $X_1$ datae variabilium $x$ et $x_1$ functiones, atque proponatur aequatio differentialis primi ordinis inter $x$ et $x_1$,

$$Xdx_1 - X_1dx = 0.$$

Est Multiplicator ***Eulerianus*** eiusmodi factor $M$ per quem multiplicata pars laeva aequationis antecedentis abit in differentiale completum functionis alicuius $f_1$, ita ut sit

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 = M(Xdx_1 - X_1dx),$$

sive,

$$MX = \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\qquad MX_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

E quibus formulis sequitur, pro functione indefinita $f$ induere expressionem,

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

formam Determinantis functionalis

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x},$$

et Multiplicatorem $M$ satisfacere aequationi differentiali partiali,

$$\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1}=0.$$

Quae pro duobus variabilibus independentibus sunt eaedem proprietates characteristicae, quae Multiplicatori generali assignavi.

Problema solvendi aequationem differentialem partialem propositam,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}....+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

cum duobus aliis problematis arctissime coniunctum est. Designante enim $\Pi$ quamcunque aequationis praecedentis solutionem, ex aequatione

$$\Pi=0,$$

petatur ipsius $x$ expressio per reliquas variabiles $x_1, x_2, .... x_n$: notum est eam fieri solutionem alterius aequationis differentialis partialis,

$$X=X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}....+X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Unde haec aequatio differentialis partialis ad aequationem differentialem partialem propositam revocari potest. Porro ad aequationis differentialis partialis propositae solutionem constat revocari posse integrationem completam systematis aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $n+1$ variabiles $x$, $x_1, .... x_n$, quod repraesentemus proportionibus,

$$dx:dx_1....:dx_n=X:X_1:....:X_n.$$

Videlicet si aequationis differentialis partialis propositae solutiones, a se independentes, sunt $f_1, f_2, .... f_n$, obtinentur aequationes, quibus illud aequationum differentialium vulgarium systema complete integratur, aequando solutiones illas Constantibus Arbitrariis. Et vice versa, si ex aequationibus integralibus completis petuntur variabilium functiones Constantibus Arbitrariis a se independentibus aequales, ab iisdemque Constantibus Arbitrariis ipsae vacuae: hae functiones erunt aequationis differentialis partialis propositae solutiones a se independentes. Propter hunc trium problematum consensum Multiplicatorem $M$ ad tria illa problemata perinde refero. Qua de re *ipsum $M$ perinde appellabo Multiplicatorem huius aequationis differentialis partialis,*

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}....+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

*vel huius,*

$$0=X-X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}....-X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

*vel etiam systematis aequationum differentialium vulgarium,*

$$dx:dx_1:dx_2....:dx_n=X:X_1:X_2....:X_n.$$

Ubi ad has refertur Multiplicator, quod plerumque usu venit, pro variis formis, quibus earum aequationes integrales completae proponuntur, variae obtinentur Multiplicatoris repraesentationes. Quas sequentibus exponam.

Si aequationes integrales proponuntur ipsa forma cuius modo mentionem iniecimus,

5. $f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad f_n = \alpha_n,$

designantibus $\alpha_1$ etc. Constantes Arbitrarias, functiones $f_1$ etc. non afficientes, ideoque $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ solutiones a se independentes aequationis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

erat Multiplicator,

$$6. \qquad M = \frac{1}{X}\Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Iam vero proponantur aequationes integrales completae hac forma maxime usitata, ut variabiles omnes per earum unam veluti $x$, et Constantes Arbitrarias exprimantur,

$$7. \qquad x_1 = \varphi_1(x), \quad x_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots\ldots \quad x_n = \varphi_n(x),$$

functionibus $\varphi_1$, $\varphi_2$ etc. involventibus praeter variabilem $x$ Constantes Arbitrarias $\alpha_1$ etc., erit

$$8. \qquad \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\Sigma\pm\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_n}},$$

D. F. §. 9. (3.) *). Unde fit,

$$9. \qquad M = \frac{1}{X\Sigma\pm\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_n}} = \frac{1}{X\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n}}.$$

Si vero generalius inter omnes $2n+1$ quantitates, $x, x_1, \ldots\ldots x_n$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, proponuntur $n$ aequationes integrales,

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \Pi_n = 0,$$

fit (D. F. §. 10. (5.)),

$$10. \qquad \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{(-1)^n\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\frac{\partial\Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial\Pi_n}{\partial\alpha_n}}.$$

Unde obtinetur, rejecto quod licet signo ancipiti,

$$11. \qquad M = \frac{1}{X}\cdot\frac{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\frac{\partial\Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial\Pi_n}{\partial\alpha_n}},$$

quae est Multiplicatoris expressio maxime generalis.

Formula (10.) ope investigatio valoris Determinantis functionalis haud raro egregie expeditur. Transponamus ex. gr. Constantes Arbitrarias in alte-

*) Commentationem de Determinantibus Functionalibus Vol. XXII Diarii Crelliani insertam designabo per D. F.

ram partem aequationum (1.), atque pro quolibet ipsius $i$ valore statuamus functionem $\Pi_i$ aequalem functioni $f_i - \alpha_i$, quocunque modo per aequationes,

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad f_{i+2} = \alpha_{i+2}, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

transformatae. Poterit in locum cuiusque aequationis $f_i = \alpha_i$ adhiberi aequatio $\Pi_i = 0$, unde systema aequationum sequentium,

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Pi_n = 0,$$

haberi poterit pro aequationum integralium completarum systemate. Quae ita sunt comparatae aequationes, ut quaelibet functio $\Pi_i$ non involvat quantitates $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$, quantitatem $\alpha_i$ autem in unico termino addito $-\alpha_i$. Unde erit

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_2} \ldots = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_{i-1}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_i} = -1,$$

sive quantitatibus $\frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_k}$ in figuram quadratam dispositis hunc in modum,

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_n}, \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_n}, \end{array}$$

quadratoque per diagonalem, a laeva ad dextram partem ductam, in duas partes diviso, termini in laeva parte positi omnes evanescunt. Quod ubi fit, abit Determinans in productum terminorum in ipsa diagonali positorum. Qui termini cum singuli fiant $-1$, eruitur

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_n} = \pm 1,$$

ideoque

$$12. \quad XM = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}.$$

Quae docet formula propositionem frequentissimae applicationis, *valentibus aequationibus* $f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$, *Determinans functionale,*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

*valorem non mutare, si ante differentiationes partiales transigendas quaeque functio* $f_i$ *per aequationes*

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad f_{i+2} = \alpha_{i+2}, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

***quascunque subeat mutationes.*** In hac propositione sunt $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$ Constantes; quae si iunguntur functionibus $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, ita ut ipsius $f_i - \alpha_i$ loco scribatur $f_i$, refertur propositio ad valorem quem induit Determinans functionale, functionibus ipsis evanescentibus. In applicatione huius propositionis facienda functiones $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ sive aequationes, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, .... $f_n = 0$, certo disponendae sunt ordine tali, ut quaeque aequatio $f_i = 0$ insequentium ope formam induere possit concinnam, simulque differentialia partialia functionis $f_i$ evadant simplicissima. Quin adeo eandem operationem indefinite repetere licet, siquidem post idoneas mutationes, pro certo functionum et aequationum ordine factas, eaedem functiones alio semperque alio ordine disponuntur et pro quaque nova dispositione mutationes vel eliminationes convenientes operantur. Quantascunque autem mutationes per varias istas dispositiones et eliminationes subire possunt functiones propositae $f_1$ etc., non tamen inde nascuntur functionum mutationis quae obtineri possunt, si ***eodem tempore*** ad unamquamque transformandam, nullo ordinis functionum respectu habito, omnes adhibentur $n$ aequationes, quae reliquas omnes functiones nihilo aequando proveniunt. Nam in propositione tradita unica tantum erat e $n+1$ functionibus, ad quam transformandam adhiberi poterant $n$ aequationes; praeter hanc una tantum erat ad quam transformandam $n-1$ aequationes adhiberi poterat, et ita porro. Functionibus in alium aliumque ordinem dispositis et pro quaque nova dispositione propositionis traditae applicatione facta, effici quidem potest ut unaquaeque functio sua vice adiumento $n$ aequationum transmutetur; sed differentia in eo constituitur, quod hac ratione aequationes ad transmutationes adhibendae non amplius proveniant nihilo aequando functiones propositas sed functiones et ipsas iam transmutatas. Veluti si $f$ per aequationem $f_1 = 0$ mutatur in $\varphi$, ac deinde $f_1$ per aequationem $\varphi = 0$ in $\varphi_1$: ipsa $\varphi_1$ non easdem induere potest formas, in quas mutari potest $f_1$ nihilo aequando ipsam functionem propositam $f$. Nam si valorem generalem functionis, in quam $f$ per aequationem $f_1 = 0$ mutari potest, designamus quod licet per

$$\varphi = f + \lambda f_1,$$

atque similiter valorem generalem functionis, in quam $f_1$ per aequationem $\varphi = 0$ mutatur, per

$$\varphi_1 = f_1 + \mu\varphi = (1 + \lambda\mu) f_1 + \mu f:$$

haec functio diversa erit a functione $f_1 + \mu\varphi$, in quam $f_1$ per aequationem $f = 0$ mutatur. Atque Determinans functionum $\varphi$ et $\varphi_1$ idem quidem erit atque functionum propositarum; functionum vero $f + \lambda f_1$, $f_1 + \mu f$ ab illo discre-

pabit, scilicet aequabitur Determinanti functionum $f$ et $f_1$, per factorem $1-\lambda\mu$ multiplicato. Quod pluribus illustrare placuit, ut emendarem errorem quem in Commentatione *de Determinantibus functionalibus* commisi proponendo, Determinantis functionalis valorem quem induat ipsis functionibus evanescentibus, immutatum manere, si unaquaeque functio mutationes subeat, quascunque nihilo aequando reliquas omnes subire possit. Generaliter si ponitur

$$\varphi_i = \lambda^i f + \lambda_1^i f_1 \ldots + \lambda_n^i f_n,$$

demonstrabitur per Determinantium proprietates, valentibus aequationibus

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots \quad f_n = 0,$$

fieri

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \Sigma + \lambda \lambda_1' \lambda_2'' \ldots \lambda_n^n \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Unde ut Determinantia functionum $f, f_1, \ldots f_n$ et $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ inter se aequalia existant, habetur conditio generalis,

$$\Sigma \pm \lambda \lambda_1' \ldots \lambda_n^n = 1.$$

E Propositione supra tradita, identidem pro aliis aliisque functionum dispositionibus repetita, innumera deducuntur quantitatum $\lambda_k^i$ systemata quae conditioni illi satisfaciunt.

Inter mutationes, quas functio variabilium $x$, $x_1$ etc. per aequationes inter easdem variabiles positas subire potest, referri potest eliminatio variabilium numeri numero aequationum aequalis. Unde in formula (12.) definire licet $\Pi_i$ ut functionem variabilium $x, x_1, \ldots x_i$, in quam abeat $f_i - \alpha_i$, si ope aequationum $f_{i+1} = \alpha_{i+1}$, $f_{i+2} = \alpha_{i+2}, \ldots f_n = \alpha_n$ variabiles $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots x_n$ eliminantur. Quo statuto, omnia evanescunt differentialia partialia $\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k}$, in quibus $k > i$; unde figura quadrata, quae a quantitatibus $\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k}$ formatur, ita comparata erit, ut in ea per diagonalem divisa, rursus termini in altera parte positi evanescant, ideoque fiat,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}.$$

Hinc formula (12.) abit in hanc,

$$13. \quad XM = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n},$$

sive Determinans functionale quo Multiplicator definitur in simplex productum redit. Forma autem aequationum integralium

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \ldots \Pi_n = 0,$$

quae illam simplicem Determinantis functionalis expressionem suppeditat, eadem

est atque per integrationem *successivam* proveniens, post quodque Integrale inventum una variabilium eliminata. Servata enim functionum $\Pi_1$, $\Pi_2$, .... $\Pi_n$ significatione antecedente, si eliminatur $x_n$ per Integrale,

$$\Pi_n = f_n - \alpha_n = 0,$$

erit $\Pi_{n-1} = 0$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 \ldots : X_{n-1},$$

cuius Integralis ope eliminata $x_{n-1}$ erit $\Pi_{n-2} = 0$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 \ldots : X_{n-2},$$

et ita porro. Si e functione $\Pi_i$ Constantes arbitrarias $\alpha_{i+1}$, $\alpha_{i+2}$, .... $\alpha_n$, quas implicat, ope aequationum,

$$\Pi_{i+1} = 0, \quad \Pi_{i+2} = 0, \ldots \quad \Pi_n = 0,$$

eliminamus, redit aequatio $\Pi_i = 0$ in aequationum differentialium propositarum Integrale $f_i - \alpha_i = 0$. Voco autem, ut in aliis Commentationibus, ***Integrale*** systematis aquationum differentialium vulgarium huiusmodi aequationem integralem, quae differentiata identica evadat per solas aequationes differentiales propositas, neque ipsa illa aequatione integrali neque ulla alia in auxilium advocata.

**Multiplicatoris expressio generalis. Bini Multiplicatores suppeditant Integrale. Expressio generalis functionum quarum detur Determinans datum.**

## §. 4.

Iam varias quae de Multiplicatore nostro tradi possunt proprietates exponam. Ac primum inquiram quomodo uno cognito Multiplicatore eruantur alii innumeri, sive Multiplicatoris investigabo formam generalem. Sit $M$ datus Multiplicator aequationis,

$$1. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

satisfacere debet $M$ secundum §. pr. huiusmodi aequationi,

$$2. \quad MX = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

designantibus $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ solutiones aequationis (1.) a se invicem indepentes. Sit $\mu$ alius quicunque Multiplicator, satisfaciens aequationi,

$$3. \quad \mu X = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

designantibus $F_1$, $F_2$, .... $F_n$ aliud systema solutionum eiusdem aequationis (1.) a se invicem independentium. Functiones $F_1$, $F_2$, etc. esse debent

solarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones; cognitis enim aequationis (1.) solutionibus $n$ a se invicem independentibus, quaevis alia eiusdem aequationis solutio harum $n$ solutionum functio est. Fit autem per formulam notam (D. F. §. 11. Prop. II.),

$$4. \quad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

siquidem habentur $F_1, F_2, \ldots F_n$ in laeva formulae parte pro variabilium $x, x_1, \ldots x_n$ functionibus, in dextra parte pro functionibus ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$. E (2.) — (4.) autem obtinetur haec formula,

$$5. \quad \mu = M \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

Unde sequitur vice versa, ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ quibuscunque sumtis functionibus a se independentibus $F_1, F_2, \ldots F_n$, Multiplicatorem $M$ ductum in harum functionum Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n},$$

alterum suppeditare Multiplicatorem $\mu$. Quaecunque enim sint $F_1, F_2, \ldots F_n$ ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones a se independentes, ex aequatiouibus (2.), (4.), (5.) sequitur formula (3.), in qua $F_1, F_2, \ldots F_n$ erunt aequationis (1.) solutiones a se invicem independentes, unde secundum §. pr. tradito quantitas $\mu$, formula (3.) determinata, aequationis (1.) erit Multiplicator.

Videmus ex antecedentibus, binorum quorumque Multiplicatorum Quotientem $\frac{\mu}{M}$ aequari functioni ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$, videlicet Determinanti ipsarum $F_1, F_2, \ldots F_n$, pro functionibus quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ habitarum, et vice versa, Multiplicatore $M$ ducto in Determinans quarumcunque $n$ functionum a se independentium quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$, alterum obtineri Multiplicatorem. Semper autem quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones $F_1, F_2, \ldots F_n$ invenire licet, quarum Determinans sit earundem quantitatum data quaecunque functio. Unde non modo binorum Multiplicatorum $M$ et $\mu$ Quotiens functioni aequatur ipsarum $f_1, f_1, \ldots f_n$, sed etiam vice versa, Multiplicatore $M$ in quamcunque functionem ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ ducto, rursus prodit Multiplicator. Et eum ipsarum, $f_1, f_2, \ldots f_n$, quaelibet functio aequationis (1.) solutio sit, neque aliae aequationis (1.) solutiones extare possint, nisi quae ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones sint, sequitur ex antecedentibus haec Propositio.

Propositio.

„Designante $M$ Multiplicatorem aequationis differentialis partialis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

erit Multiplicatoris forma generalis,

$$\Pi M,$$

designante $\Pi$ quamcunque aequationis propositae solutionem."

Cognita aequationis (1.) solutione $\Pi$ ac designante $\alpha$ Constantem Arbitrariam, aequatione $\Pi=\alpha$ determinatur variabilium $x_1, x_2, \ldots. x_n$ functio $x$, satisfaciens aequationi differentiali partiali,

$$6.\quad 0=X-X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}\ldots.-X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

nec non erit $\Pi=\alpha$ Integrale aequationum differentialium vulgarium simultanearum,

$$7.\quad dx:dx_1\ldots.:dx_n=X:X_1\ldots.:X_n.$$

Unde Propositio antecedens docet, ***cognitis aequationis differentialis partialis*** (6.) ***vel aequationum*** (7.) ***differentialium vulgarium binis Multiplicatoribus $M$ et $M_1$, non solo factore constante inter se diversis, aequationem***

$$\frac{M_1}{M}=\text{Const.}$$

***fore aequationis differentialis partialis*** (6.) ***solutionem vel systematis aequationum differentialium*** (7.) ***Integrale.***

Pluribus datis Multiplicatoribus $M, M_1, \ldots. M_k$, haec quoque quantitas,

$$MF\left(\frac{M_1}{M}, \frac{M_2}{M}, \ldots. \frac{M_k}{M}\right)$$

erit multiplicator. Designante enim $F$ ipsarum $\frac{M_1}{M}$ etc. functionem arbitrariam, non tantum fractiones $\frac{M_1}{M}$, $\frac{M_2}{M}$ etc., sed ipsa $F$ quoque aequationis (1.) solutio fit. Unde etiam aequatione $F=0$ sive quod idem est ***quacunque aequatione homogenea inter datos Multiplicatores posita determinatur aequationis*** (6.) ***solutio.*** Nec non designantibus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$ Constantes Arbitrarias, erunt

$$\frac{M_1}{M}=\alpha_1,\quad \frac{M_2}{M}=\alpha_2,\quad \ldots.\ \frac{M_k}{M}=\alpha_k,$$

Integralia aequationum differentialium vulgarium (7.).

Restat, ut paucis exponam quomodo inveniantur fnnctiones quarum Determinans datae variabilium functioni aequetur, quod semper fieri posse supra

innui. Immo videbimus idem innumeris modis succedere, videlicet functiones praeter unam omnes ex arbitrio sumi posse, una reliqua per solam Quadraturam determinata.

Designante $\Pi$ datam quamcunque quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functionem, simplicissima habetur solutio aequationis,

$$8. \quad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \Pi,$$

ponendo,

$$F_2 = f_2, \quad F_3 = f_3, \quad \ldots \quad F_n = f_n,$$

unde Determinans propositum in simplex differentiale abit,

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_1} = \Pi.$$

Quo igitur casu fit,

$$F_1 = \int \Pi df_1,$$

cui integrali functionem ipsarum $f_2, f_3, \ldots f_n$ arbitrariam addere licet, quippe quae inter integrationem pro Constantibus habentur. Aequationis (8.) solutio generalis obtinetur sequenti modo. Pro ipsis $F_2, F_3, \ldots F_n$ ex arbitrio sumantur ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones a se independentes, atque fingatur, reliquam functionem $F_1$ exhiberi per quantitates,

$$f_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad \ldots \quad F_n.$$

Functionis $F_1$ hoc modo repraesentatae differentialia partialia uncis includam, quo distinguantur a differentialibus eiusdem functionis per $f_1, f_2, \ldots f_n$ exhibitae, ita ut sit,

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_1} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial f_1} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_3}\right)\frac{\partial F_3}{\partial f_1} \ldots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_n}\right)\frac{\partial F_n}{\partial f_1},$$

et quoties index $i$ ab unitate diversus est,

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial f_i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial F_3}{\partial f_i} \ldots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_n}\right)\frac{\partial F_n}{\partial f_i}.$$

Quae ipsarum

$$\frac{\partial F_1}{df_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial f_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F_1}{\partial f_n}$$

expressiones si substituuntur in Determinante,

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n},$$

identice evanescunt singula aggregata per singula differentialia partialia

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial F_2}\right), \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_3}\right), \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_n}\right)$$

multiplicatae, unde simplex formula obtinetur,

$$9. \quad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) \Sigma \pm \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial f_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial F_n}{\partial f_n}$$

(D. F. §. 12. (4.)). E (8. et 9.) sequitur

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) = \frac{\Pi}{\Sigma \pm \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial f_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial F_n}{\partial f_n}},$$

qua formula exprimendo $f_2, f_3, \ldots f_n$ per $f_1, F_2, F_3, \ldots F_n$, sic quoque exhiberi potest,

$$10. \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) = \Pi \Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial F_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial F_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_n}{\partial F_n}$$

(D. F. §. 9. (3.)). Secundum hanc formulam, ut modo maxime generali variabilium $f_1, f_2, \ldots f_n$ inveniantur functiones, quarum Determinans datae earundem variabilium functioni $\Pi$ aequatur, ex arbitrio exprimantur $f_2, f_3, \ldots f_n$ per $f_1$ aliasque $n-1$ quantitates $F_2, F_3, \ldots F_n$, determinataque $F_1$ per formulam,

$$11. \quad F_1 = \int \Pi \Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial F_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial F_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_n}{\partial F_n} \partial f_1,$$

ipsae $F_1, F_2, \ldots F_n$, vice versa per $f_1, f_2, \ldots f_n$ expressae erunt functiones quaesitae.

Ponendo $\Pi = 1$ antecedentibus innumera obtinentur systemata functionum quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$, quarum Determinans unitati aequatur. Quibus omnibus idem respondet Multiplicator. Quoties enim

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = 1,$$

sequitur e (5.)

$$\mu = M.$$

Vice versa, si idem Multiplicator respondet binis systematis $n$ solutionum a se independentium aequationis differentialis partialis (1.), $f_1, f_2, \ldots f_n$ atque $F_1, F_2, \ldots F_n$, ita ut sit,

$$MX = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_n};$$

erunt $F_1, F_2, \ldots F_n$ quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones, quarum Determinans unitati aequatur.

**Multiplicatoris definitio per aequationem differentialem partialem. Conditio, ut Multiplicator aequari possit unitati.**

§. 5.

Vidimus §. 3. aequationis differentialis partialis,

$$1. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

Multiplicatorem quemcunque $M$ alii satisfacere aequationi differentiali partiali,

$$2. \quad \frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}.$$

Vice versa *quaecunque habetur solutio $\mu$ aequationis differentialis partialis,*

$$3. \quad \frac{\partial . \mu X}{\partial x} + \frac{\partial . \mu X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . \mu X_n}{\partial x_n} = 0,$$

*erit illa aequationis* (1.) *Multiplicator.*

Ponamus enim $\mu = \Pi . M$, abit aequatio (3.) in sequentem,

$$0 = \Pi\left(\frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}\right)$$
$$+ M\left(X\frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\right).$$

Partis dextrae Aggregatum in $\Pi$ ductum secundum (2.) evanescit; unde, cum supponamus ipsum $M$ non evanescere, sequitur,

$$0 = X\frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}.$$

Erit igitur $\Pi$ aequationis (1.) solutio ideoque secundum Propositionem §. pr. traditam, Multiplicatorem in solutionem aequationis (1.) quamcunque ductum reproducere Multiplicatorem, erit $\Pi . M = \mu$ Multiplicator, q. d. e.

Cum quilibet Multiplicator sit solutio aequationis (3.) et secundum antecedentia quaelibet aequationis (3.) solutio sit Multiplicator, poterit aequatio (3.) adhiberi ad Multiplicatorem definiendum. Habemus igitur Propositionem sequentem.

Propositio I.

„Designante $M$ solutionem quamcunque aequationis differentialis partialis,

$$\frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0,$$

semper dantur functiones $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, quae pro functione $f$ indefinita efficiant aequationem,

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}."$$

Videri possit parum lucri percipi e nova Multiplicatoris determinatione per aequationem differentialem partialem (3.). Aequationis (3.) enim solutio generalis non habetur nisi aequationis (1.) data sit solutio generalis sive eius innotescant $n$ solutiones particulares a se invicem independentes. His autem cognitis habetur Multiplicator per formulam (2.) §. pr. At observo ad Multiplicatorem eruendum tantum nos indigere una aliqua solutione particulari aequationis (3.) et quamquam aequationis (3.) solutio generalis a solutione aequationis (1.) pendet et pro complicatiore habenda est, fieri tamen potest ut aequationis (3.) innotescat solutio particularis, dum aequationis (1.) solutiones adhuc omnes ignoramus.

Inter solutiones aequationis differentialis partialis (1.) non referri solet, quae sponte se offert, $f = \text{Const.}$ Sed e solutionibus aequationis (3.) quae Multiplicatorem suggerunt quantitates constantes non excluduntur. Fit autem Multiplicator Constanti vel si placet unitati aequalis, si inter ipsas $X$, $X_1$ etc. locum habet aequatio,

$$4. \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

Eo casu ipsa expressio proposita,

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

pro functione $f$ indefinita aequivalet alicui Determinanti functionali,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

sive adhibendo notationes §. 3. usitatas statuere licet,

$$X = A, \quad X_1 = A_1, \quad \ldots \quad X_n = A_n.$$

Quod, si ea tenes quae §. 2. de Determinantibus functionalibus partialibus monui, sic quoque proponi potest.

### Propositio II.

„Si $n+1$ variabilium $x$, $x_1$, .... $x_n$ functiones $X$, $X_1$, .... $X_n$ satisfaciant conditioni,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

ipsae $n+1$ quantitates $X$, $X_1$, .... $X_n$ haberi possunt pro certarum $n$ functionum Determinantibus partialibus."

Haec Propositio analoga est notae elementari, si variabilium $x$ et $\lambda$ functiones $X$ et $Y$ satisfaciant conditioni, $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, ipsas $Y$ et $-X$

respective haberi posse pro eiusdem functionis differentialibus partialibus, variabilium $x$ et $y$ respectu sumtis.

Si inter quantitates $X$, $X_1$ etc. conditio (4.) locum habet, aequatio differentialis partialis (3.), qua Multiplicator definitur, in ipsam (1.) redit. Eo igitur casu quaecunque aequationis (1.) solutio eiusdem aequationis Multiplicator erit, siquidem iam unitatem vel numeros constantes inter solutiones referimus. Unde etiam patet, eo casu aequationum differentialium vulgarium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

Multiplicatorem fore quantitatem quamcunque, aut per se constantem, aut quae per aequationes integrales completas Constanti aequetur.

**Cognito systematis aequationum differentialium vulgarium Multiplicatore quocunque eruuntur Determinantia functionum quae per aequationes integrales completas valoribus variabilium initialibus aequivalent.**

§. 6.

Vidimus §. 3. designantibus $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ solutiones a se independentes aequationis,

$$1. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

harum functionum Determinantia partialia $A_1$, $A_2$, .... $A_n$ esse inter se ut aequationis (1.) Coëfficientes, sive fieri,

$$2. \quad A : A_1 \ldots : A_n = X : X_1 \ldots : X_n.$$

Unde omnia $A_1$, $A_2$, .... $A_n$ uno determinantur $A$. Antecedentibus autem demonstravi, designante $\mu$ Multiplicatorem aequationis (1.) quemcunque sive quamcunque solutionem aequationis

$$3. \quad \frac{\partial . X\mu}{\partial x} + \frac{\partial . X_1\mu}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . X_n\mu}{\partial x_n} = 0,$$

fieri $\mu = \Pi M$, ideoque

$$4. \quad \mu X = \Pi . A = \Pi . \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ldots . \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

ubi $\Pi$ certa quaedam est ipsarum $f_1$, $f_2$ .... $f_n$ functio sive aequationis (1.) solutio. Hinc e data quacunque aequationis (3.) solutione $\mu$ cognoscitur valor Determinantis $A$, dummodo determinata erit functio $\Pi$. ***Eruitur autem functio $\Pi$, dummodo Determinantis $A$ innotescat valor quem pro $x = 0$ induit.*** Generaliter enim, ut functio $f$ aequationi differentiali partiali (1.) satisfaciens omnino determinata sit, poscitur et sufficit ut aliqua cognoscatur functio, cui illa aequalis evadat ubi inter variabiles $x$, $x_1$, .... $x_n$ data aliqua

aequatio locum habet, veluti si ipsius $f$ datur valor quem pro $x = 0$ induit. Hinc si ponimus pro $x = 0$ abire $\mu$, $X$, $A$ in variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functiones $\mu^0$, $X^0$, $A^0$; functio $\Pi$ eo determinabitur quod esse debeat aequationis (1.) solutio atque pro $x = 0$ aequalis evadet variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functioni

$$\frac{\mu^0 X^0}{A^0}.$$

Eiusmodi solutio autem ut inveniatur sint $f_1^0$, $f_2^0$, .... $f_n^0$ variabilium $x_1$, $x_2$, ... ... $x_n$ functiones, in quas pro $x = 0$ abeunt $f_1$, $f_2$, .... $f_n$; exprimatur porro variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functio $\frac{\mu^0 X^0}{A^0}$ per $f_1^0$, $f_2^0$, .... $f_n^0$; in qua expressione ponendo ipsarum $f_1^0$, $f_2^0$, .... $f_n^0$ loco ipsas $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, prodibit functio quaesita $\Pi$. Quippe functio sic inventa erit aequationis (1.) solutio et pro $x = 0$ abibit in variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functionem $\frac{\mu^0 X^0}{A^0}$.

Functionem $A^0$ casu prae ceteris notando a priori assignare licet, videlicet quoties $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ tales sunt aequationis (1.) solutiones *quae pro* $x = 0$ *in ipsas variabiles* $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ *abeunt.* Tunc enim habetur

$$f_1^0 = x_1, \quad f_2^0 = x_2, \quad .... \quad f_n^0 = x_n,$$

ideoque

$$A^0 = \Sigma \pm \frac{\partial f_1^0}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2^0}{\partial x_2} .... \frac{\partial f_n^0}{\partial x_n} = 1.$$

Hinc secundum regulam traditam functio $\Pi$ e functione $\mu^0 X^0$ eruitur substituendo variabilibus $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functiones $f_1$, $f_1$, .... $f_n$, sive quod idem est, substituendo in ipsa $\mu X$ variabilibus $x$, $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ quantitates 0, $f_1$, $f_2$, .... $f_n$. Id quod sequentem suppeditat Propositionem.

### Propositio I.

„Sint $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ solutiones aequationis

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} .... + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

quae pro $x = 0$ in ipsas variabiles $x$, $x_2$, .... $x_n$ abeunt; sit $\mu$ quantitas quaecunque satisfaciens aequationi

$$\frac{\partial . X\mu}{\partial x} + \frac{\partial . X_1 \mu}{\partial x_1} .... + \frac{\partial . X_n \mu}{\partial x_n} = 0,$$

atque sit $\Pi$ ipsarum $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ functio quae e producto $\mu X$ provenit substituendo variabilibus $x$, $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ quantitates 0, $f_1$, $f_2$, .... $f_n$: erit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} .... \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\mu X}{\Pi},$$

sive generalius, designante $f$ functionem indefinitam, erit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\mu}{\Pi} \left\{ X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}.$$

Observo hac occasione generaliter, datis aequationis (1.) solutionibus $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, quae pro $x = 0$ ipsas $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ abeant, quamvis aliam eiusdem aequationis solutionem $\Pi$ per ipsas $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ absque omni eliminationis negotio exhiberi. Scilicet sufficit in functione $\Pi$ variabilibus $x$, $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ substituere quantitates 0, $f_1$, $f_2$, .... $f_n$.

Casu speciali, quem sub finem §. pr. consideravi, posita insuper $X = 1$, e Propositione praecedente emergit haec:

Propositio II.

„Sint $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ tales solutiones aequationis,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

quae pro $x = 0$ respective in $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ abeant, sitque identice,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

erit,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 1,$$

atque reliqua functionum $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ Determinantia partialia $A_1$, $A_2$, .... $A_n$ in ipsas redeunt quantitates $X_1$, $X_2$, .... $X_n$."

Convenit Propositiones antecedentibus inventas ad systemata aequationum differentialium vulgarium referre. Proponatur enim systema aequationum differentialium vulgarium,

$$dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots : X_n,$$

eiusque integratione completa facta, pro Constantibus Arbitrariis adhibeantur valores quos $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ pro $x = 0$ induunt; resolutione deinde aequationum integralium erui poterunt variabilium $x$, $x_1$, .... $x_n$ functiones illis Constantibus Arbitrariis aequales, quae ipsae erunt functiones $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, in Propp. I. et II. consideratae. Generaliter Integralia completa sint,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

designantibus $\alpha_1$, $\alpha_2$ etc. Constantes Arbitrarias quascunque, a quibus ipsae $f_1$, $f_2$ etc. vacuae supponuntur. Quorum Integralium ope expressis $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ per $x$ et Constantes Arbitrarias $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$, fit secundum formulas de Determinantibus functionalibus traditas,

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} \right\}^{-1}.$$

Unde formula (4.) docet, cognito aequationum differentialium vulgarium propositarum Multiplicatore aliquo $\mu$, sive aequationis (3.) solutione, fieri

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial a_n} = \frac{C}{\mu X},$$

designante $C$ functionem Constantium Arbitrariarum. Quoties sunt $a_1, a_2, \ldots a_n$ valores initiales variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$, ipsi $x = 0$ respondentes, Determinans functionale, in laeva parte aequationis antecedentis collocatum, ponendo $x = 0$ in *unitatem* abit. Quo igitur casu Constans $C$ ex ipsa $\mu X$ eruitur ponendo variabilium $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ loco valores $0, a_1, a_2, \ldots a_n$. Casu speciali quo Multiplicator unitatem aequat, e Propositione II. eruitur sequens prae ceteris simplex Propositio.

## Propositio III.

„Proponantur aequationes differentiales vulgares simultaneae,

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = X_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial x_n}{\partial x} = X_n,$$

in quibus sint $X_1, X_2, \ldots X_n$ tales variabilium $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, functiones quae satisfaciant aequationi,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0;$$

integratione completa expressis $x_1, x_2, \ldots x_n$ per $x$ earumque valores initiales $a_1, a_2, \ldots a_n$, erit non tantum pro $x = 0$, sed pro valore ipsius $x$ indefinito,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial a_n} = 1.$$"

Quae licet a proposito meo aliena utile videbatur obiter adnotare.

Quo rectius intelligantur quae supra monui de definienda solutione $f$ aequationis differentialis partialis (1.), sequentia adiicio. Sit $\varphi$ functio in quam abire debet $f$ pro aequatione aliqua inter variabiles $x, x_1, \ldots x_n$ data. Si $\varphi$ et ipsa aequationis (1.) solutio est, erit $f = \varphi$ functio quaesita, quaecunque sit illa aequatio. Si $\varphi$ non est aequationis (1.) solutio, fieri non debet ut aequatio illa ad aliam inter quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$ revocari possit, sive ut ex aequatione illa peti possit solutio aequationis differentialis partialis,

$$X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Nisi forte eiusmodi solutio sit *singularis* seu non redeat in aequationem inter quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$, quo casu nihil impedit quo minus functio $f$ definiatur

ope valoris quem pro data illa aequatione induit. Infra autem videbimus pro aequationis differentialis partialis antecedentis solutione singulari fieri,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \infty,$$

ubi ipsae $X$, $X_1$ etc. cum a factoribus communibus tum a denominatoribus purgatae supponuntur. Ita non definiri poterit $f$ ope valoris quem pro $x = 0$ induit, ubi pro $x = 0$ habetur $X = 0$ nec simul $\frac{\partial X}{\partial x} = \infty$. Quod obiter observo.

### Multiplicatoris definitio per aequationem differentialem vulgarem.

### §. 7.

Multiplicatorem, quem antecedentibus per aequationem differentialem partialem definivi, etiam per formulam differentialem vulgarem definire licet. Quae nova forma aequationis praeceteris indagando Multiplicatori apta est.

Primum aequationem differentialem partialem, qua Multiplicator $\mu$ definitur, sic exhibeo,

$$1. \quad 0 = X\frac{\partial \mu}{\partial x} + X_1\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial \mu}{\partial x_n} + \mu\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\},$$

vel dividendo per $\mu$,

$$2. \quad 0 = X\frac{\partial \log \mu}{\partial x} + X_1\frac{\partial \log \mu}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial \log \mu}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

Per aequationes autem differentiales vulgares quarum $\mu$ est Multiplicator,

$$3. \quad dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots : X_n,$$

aequationem praecedentem brevius sic repraesentare licet,

$$4. \quad 0 = X\frac{d \log \mu}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

Hinc poterit aequationum differentialium vulgarium (3.) Multiplicator $\mu$ definiri ut *functio quae solarum aequationum differentialium propositarum* (3.) *ope, nulla in auxilium vocata aequatione integrali, aequationi* (4.) *satisfaciat.* Quippe quod fieri non potest nisi $\mu$ *identice* satisfaciat aequationi (2.) qua Multiplicator definiebatur.

Sequitur ex antecedentibus, ad investigandum Multiplicatorem circumspiciendum esse, an aequationum differentialium (3.) ope contingat, expressioni

$$\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}\frac{dx}{X}$$

formam conciliare alicuius differentialis completi $dU$. Quippe hoc patrato fit

e (4.) Multiplicator,

$$5. \quad \mu = e^{-\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) \frac{dx}{X}} = e^{-U}.$$

Hanc indagandi Multiplicatoris methodum in aliis Commentationibus per varia exempla illustrabo, in quibus integrationem quae Multiplicatorem suggerit videbimus praestari posse, aequationum differentialium vulgarium propositarum nullo Integrali cognito. Esse tamen poterit formulae (4.) usus etiam si aequationes differentiales complete integratae sunt. Tum enim formula (4.) docet, formationi Determinantis functionalis, quam determinatio Multiplicatoris requirebat, substitui posse Quadraturam, minus interdum molestam. Etenim ope integrationis completae quantitas ipsi $\frac{d \log \mu}{dx}$ aequalis per solam $x$ et Constantes Arbitrarias exhiberi potest, unde ipsum $\log \mu$ per Quadraturam obtines,

$$6. \quad \log \mu = -\int \frac{dx}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right).$$

Post integrationem factam substituendo Constantibus Arbitrariis variabilium $x$, $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functiones aequivalentes, prodibit ipsius $\log \mu$ expressio, aequationi differentiali partiali (2.) satisfaciens.

Post aequationum (3.) integrationem completam expressis $x_1$, $x_1$, .... $x_n$ per $x$ et Constantes Arbitrarias $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$ fit secundum §. pr.

$$7. \quad \log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \log \frac{C}{\mu X},$$

designante $C$ Constantium Arbitrariarum functionem. Unde, omissa quod licet Constante, e formula (6.) eruitur

$$8. \quad \log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \log \frac{1}{X} + \int \frac{dx}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right).$$

Quae formula immutata manere debet, omnibus $X$, $X_1$, .... $X_n$ per factorem quemcunque communem multiplicatis. Quod ut pateat observo, per aequationes differentiales vulgares propositas aequationem (4.) aucta symmetria sic proponi posse:

$$9. \quad 0 = d \log \mu + \frac{\partial \log X}{\partial x} dx + \frac{\partial \log X_1}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial \log X_n}{\partial x_n} dx_n.$$

Unde e formula (7.) eruitur:

$$\log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \log \frac{C}{\mu X}$$

$$= \log \frac{1}{X} + \int \left(\frac{\partial \log X}{\partial x} dx + \frac{\partial \log X_1}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial \log X_n}{\partial x_n} dx_n\right).$$

Si in hac formula simul omnes $X$, $X_1$ etc. in factorem communem $\nu$ ducuntur, augetur integrale quantitate,

$$\int\left(\frac{\partial \log \nu}{\partial x}dx + \frac{\partial \log \nu}{\partial x_1}dx_1 \ldots . + \frac{\partial \log \nu}{\partial x_n}dx_n\right) = \int d\log\nu = \log\nu.$$

Eadem autem quantitate minuitur $\log \frac{1}{X}$, unde tota expressio immutata manet, q. d. e.

Si in formula (8.) ponimus $X = 1$, prodit Propositio sequens.

**Propositio.**

„Facta integratione completa aequationum differentialium vulgarium,

$$\frac{dx_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = X_2, \quad \ldots . \quad \frac{dx_n}{dx} = X_n,$$

exhibeantur $x_1, x_2, \ldots . x_n$ per $x$ et Constantes Arbitrarias, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$, erit,

$$\log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}.\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots . \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \int\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) dx,$$

quantitate sub signo et ipsa per $x$ et Constantes Arbitrarias expressa."

Si in Propositione antecedente ipsae $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ designant variabilium valores initiales, valori $x = 0$ respondentes, integrationem inde a valore $x = 0$ fieri oportet. Ope huius Propositionis vel formulae generalioris (8.) fieri potest ut Quadratura alias satis abscondita eruatur; sicuti vice versa si Quadratura in promtu est, valor inde eruitur Determinantis functionalis.

Propositio antecedens primum a cl. ***Liouville*** tradita est in Commentatione ***„sur la variation des constantes arbitraires,"*** ipsius Diario Mathematico (Vol. III. pg. 342) inserta. Eadem sequitur e formula iam supra citata D. F. §. 9. (1.), loco $f$, $f_1$ etc. scribendo $x_1, x_2, \ldots . x_n$ atque $x$ loco $\alpha$, loco $x_1, x_2$ etc. autem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$. Scilicet est ea consequentia lemmatis quod circa variationem logarithmi Determinantis loco citato dedi. Habeantur enim $n$ systemata aequationum linearium inter $n$ incognitas $u_1, u_2, \ldots . u_n$, quae systemata iisdem gaudeant Coëfficientibus incognitarum et tantum terminis prorsus constantibus inter se discrepent, unde etiam omnibus idem erit Determinans. Denotentur in $k$to aequationum linearium systemate termini constantes, in altera parte aequationum positi, respective per variationes Coëfficientium quibus in singulis aequationibus incognita $u_k$ afficitur, atque e primo systemate aequationum petatur valor ipsius $u_1$, e secundo valor ipsius $u_2$, et ita porro: omnium horum valorum summa aequivalebit variationi logarithmi Determinantis.

In signis: sit $(u_k)_k$ valor ipsius $u_k$ petitus e systemate aequationum,

$$10. \quad \begin{cases} a_1' u_1 + a_2' u_2 \ldots + a_n' u_n = \delta a_k', \\ a_1'' u_1 + a_2'' u_2 \ldots + a_n'' u_n = \delta a_k', \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_1^{(n)} u_1 + a_2^{(n)} u_2 \ldots + a_n^{(n)} u_n = \delta a_k^{(n)}, \end{cases}$$

erit

$$11. \quad (u_1)_1 + (u_2)_2 \ldots + (u_n)_n = \delta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)}.$$

Faciamus iam, in aequationibus differentialibus

$$\frac{dx_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx} = X_n,$$

substitui variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ valores per $x$ et Constantes Arbitrarias $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$ exhibitas, qua substitutione prodire debent aequationes identicae Quas si ipsarum $\alpha_i$ respectu differentiamus, obtinemus $nn$ huiusmodi aequationes,

$$12. \quad d \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} = \left\{ \frac{\partial X_k}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial X_k}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \ldots + \frac{\partial X_k}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} \right\} dx.$$

Ipsi $i$ tribuendo valores 1, 2, .... $n$, ex aequatione antecedente prodeunt $n$ aequationes lineares, in quibus habentur pro incognitis quantitates $\frac{\partial X_k}{\partial x_1} dx$, $\frac{\partial X_k}{\partial x_2} dx$ etc. Prodeunt $n$ eiusmodi systemata aequationum linearum tribuendo ipsi quoque $k$ valores 1, 2, .... $n$; in omnibusque illis aequationum linearium systematis incognitae iisdem gaudebunt Coëfficientibus. Hinc si in aequationibus (10.) ponimus

$$a_k^{(i)} = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i},$$

atque variationibus substituimus differentialia, aequationes (10.) abeunt in aequationes (12.), unde eruitur

$$(u_k)_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_k} dx.$$

Unde e (11.) sequitur

$$\left\{ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right\} dx = d \log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}$$

qua formula integrata Propositio supra tradita obtinetur.

Aequationis $X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots . - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$

**pars laeva Multiplicatore suo efficitur Determinans functionale completum. Pro solutione singulari Multiplicator fit infinitus. Multiplicatorem nihilo aut infinito aequando obtinetur aequatio integralis.**

§. 8.

Quemadmodum, proposito una plurium variabilium functione, destinguimus inter differentialia eius partialia, in quibus variabiles omnes pro independentibus habentur, et differentiale completum, in quo omnes ab earum una ***indefinite*** pendent, ita, propositis $n$ functionibus $n+m$ variabilium, praeter earum Determinantia partialia, de quibus supra dixi, in quibus variabiles omnes pro independentibus habentur, in considerationem venire potest ***Determinans completum,*** quod formatur habendo numerum $m$ variabilium pro reliquarum $n$ functionibus ***indefinitis.*** Designantibus $A$ et $B$ ipsarum $x$ et $y$ functiones, aequationem differentialem,

$$A + B \frac{dy}{\partial x} = 0,$$

docuit ***Eulerus,*** semper in talem duci posse Multiplicatorem, ut altera aequationis pars evadat differentiale completum sive differentiale certae functionis variabilium $x$ et $y$, in qua $y$ pro functione ipsius $x$ habetur ***indefinita.*** Similiter ***aequatio differentialis partialis,***

$$1. \quad X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots . - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = 0,$$

***in qua*** $X, X_1, \ldots . X_n$ ***designant variabilium*** $x, x_1, \ldots . x_n$ ***functiones, semper in talem duci potest Multiplicatorem ut altera aequationis pars evadat Determinans functionale completum sive Determinans certarum*** $n$ ***functionum variabilium*** $x, x_1, x_2, \ldots . x_n$, ***in quibus habetur*** $x$ ***pro variabilium*** $x_1, x_2, \ldots . x_n$ ***functione indefinita.*** Functio in aequationem (1.) ducenda ipse est aequationis (1.) ***Multiplicator*** supra appellatus et antecedentibus fusius explicatus. Unde nova nostri et ***Euleriani*** Multiplicatoris similitudo emergit novaque inter Determinantia functionalia et differentialia analogia.

Demonstratio Propositionis antecedentis sic patet. Designantibus rursus $f_1, f_2, \ldots . f_n$ solutiones a se independentes aequationis,

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

supra vidimus, semper dari Multiplicatorem $M$, in quem ductae ipsae $X, X_1, \ldots . X_n$ evadant functionum $f_1, f_2, \ldots . f_n$ Determinantia partialia, ita ut po-

nendo pro functione $f$ indefinita,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

identice sit,

$$MX = A, \quad MX_1 = A_1, \quad \ldots \quad MX_n = A_n.$$

Hinc eruitur

$$2. \quad M\left\{X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}\right\} = A - A_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - A_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

At in Commentatione de Det. F. §. 17. (6.) demonstravi, siquidem in functionibus $f_1, f_2, \ldots f_n$ habeatur $x$ pro variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functione indefinita, fieri,

$$3. \quad \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = A - A_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - A_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Qua in formula uncis innui haberi $x$ pro reliquarum variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functione. Scilicet in Determinante Functionali (3.) substituendo ipsorum $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$ expressiones

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_k},$$

mutuo destruuntur termini omnes, in quibus inter se multiplicata inveniuntur differentialia partialia $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x}{\partial x_2}$ etc., ita ut horum differentialium non nisi ipsa expressio *linearis* remaneat, quae dextram partem aequationis (3.) constituit. E (2.) et (3.) sequitur formula,

$$4. \quad M\left\{X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}\right\} = \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Unde ducta aequatione (1.) in Multiplicatorem eius $M$, altera eius pars identice aequatur Determinanti functionum $f_1, f_2, \ldots f_n$, in quibus $x$ pro variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functione habetur indefinita. Q. d. e.

Formula (4.) methodum suppeditat, ut *Lagrangii* appellatione utar, syntheticam ad eruendam aequationis (1.) solutionem generalem. Nam secundum (4.) aequatio (1.) identice convenit cum sequente,

$$5. \quad \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Quoties autem $f_1, f_2, \ldots f_n$ sunt variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functiones

earumque Determinans identice evanescit, semper et sine ulla exceptione inter functiones $f_1, f_2, \ldots f_n$ aliqua locum habere debet aequatio, et vice versa, si qua inter functiones $f_1, f_2, \ldots f_n$ locum habet aequatio, earum Determinans evanescit (D. F. §. 7.). Hinc docet formula (5.), ut ipsius $x$ expressio per $x_1, x_2, \ldots x_n$ sit aequationis (1.) solutio, sufficere et posci, post eius substitutionem ipsas $f_1, f_2, \ldots f_n$ abire in tales variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functiones, inter quas una quaecunque locum habeat aequatio. Unde vice versa dabitur solutio generalis petendo functionis quaesitae valorem ex aequatione arbitraria inter $f_1, f_2, \ldots f_n$ posita,

$$\Pi(f_1, f_2, \ldots f_n) = 0;$$

sive quod idem est, obtinetur aequationis (1.) solutio nihilo aequando solutionem quamcunque aequationis,

$$6. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

Haec egregia methodus aequationem differentialem partialem (1.) ad (6.) revocandi cum ea convenit quam olim ill. ***Lagrange*** tradidit (Hist. Ac. Ber. ad a. 1779 pag. 154), ubi primum hanc quaestionem aggressus est. Quae prolixior quidem videri possit methodus quam aliae quibus ipse ***Lagrange*** aliique postea usi sunt; qua de re ipse auctor eam ad exemplum tantum trium variabilium applicuit. Sane supponendo aequationem inter $x, x_1, \ldots x_n$ quaesitam certe unam involvere Constantem Arbitrariam $\alpha$, eamque aequationem ipsius $\alpha$ respectu resolutam fieri $f = \alpha$, aequatio proposita (1.) extemplo ad (6.) reducitur. Sed eadem ratione omnes quoque inveniri solutiones a Constantibus Arbitrariis prorsus vacuas, non ita bene per alias methodos constat atque illam ***Lagrangianam.*** Scilicet aequatio identica (4.) docet, nullam dari exceptionem solutionis traditae, nisi forte exstet solutio pro qua Multiplicator $M$ evadat infinitus. Quodsi igitur more consueto solutionem eiusmodi exceptionalem seu quae generali se subducit appellamus ***singularem,*** methodus hic tradita rigorose demonstrat, ***si qua extet aequationis*** (1.) ***solutio singularis, semper eam reddere Multiplicatorem aequationis infinitum.*** Quod novam nostri Multiplicatoris similitudinem cum ***Euleriano*** manifestat.

Loco aequationis differentialis partialis (1.) consideremus systema aequationum differentialium vulgarium cum ea connexum, atque systema aequationum integralium ***singulare*** appellemus quod e completo provenit tribuendo uni pluribusve Constantibus Arbitrariis valores particulares seu unam pluresve relationes inter Constantes Arbitrarias statuendo: quo facto ex antecedentibus haec eruitur

Propositio I.

*„Proponantur aequationes differentiales*

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

*earumque extet systema aequationum integralium singulare, $n-1$ Constantes Arbitrarias involvens: eliminatis Constantibus Arbitrariis e $n$ aequationibus integralibus, prodit aequatio quae Multiplicatorem systematis aequationum differentialium propositarum reddit infinitum.*"

Ut Propositio haec demonstretur, primum generaliter ponamus aequationes integrales datas $n-1$ Constantibus Arbitrariis affici. Quarum aequationum ubi $n-1$ resolvuntur Constantium Arbitrarium respectu, quod semper fieri posse suppono, harumque valores provenientes in $n$ta aequatione integrali substituuntur, obtinebitur aequatio a Constantibus Arbitrariis vacua. E qua petatur unius variabilium veluti $x$ valor per reliquas variabiles $x_1$, $x_2$ etc. expressus, atque in differentiali eius,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2 \ldots . + \frac{\partial x}{\partial x_n} dx_n,$$

substituantur aequationes differentiales propositae,

$$7. \quad dx : dx_1 \ldots . : dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n;$$

eruitur

$$X = \frac{\partial x}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} X_2 \ldots . + \frac{\partial x}{\partial x_n} X_n,$$

sive ille ipsius $x$ valor suppeditabit aequationis differentialis partialis (1.) solutionem. Scilicet non fit ut aequatio antecedens ex aliis $n-1$ aequationibus integralibus datis fluat, quippe e quibus supponitur non deduci posse alteram aequationem a Constantibus Arbitrariis liberam. Eritque solutio illa aut particularis aut singularis, prout aequatio a Constantibus Arbitrariis libera, cuius ope ipsa $x$ per reliquas variabiles exprimebatur, in aequationem inter quantitates $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ redit aut non redit. Iam demonstrabo, etiam systema aequationum integralium propositum iisdem casibus aut particulare aut singulare fore. Substituamus enim eum ipsius $x$ valorem in $n-1$ aequationibus integralibus, quarum ope Constantes Arbitrariae eliminabantur, simulque in functionibus $X_1$, $X_2$, .... $X_n$ aequationibus illis, ut $n-1$ Constantes Arbitrarias involventibus, *complete* integrantur aequationes differentiales

$$8. \quad dx_1 : dx_2 \ldots . : dx_n = X_1 : X_2 \ldots . : X_n.$$

Unde quibuscunque aequationibus integralibus, $n-1$ Constantes Arbitrarias involventibus, semper haec forma conciliari potest, ut earum una exhibeatur una variabilium $x$ per reliquas variabiles $x_1$, $x_2$ etc., reliquae $n-1$ aequationes

autem sint Integralia completa aequationum differentialium (8.), in quibus ille ipsius $x$ valor in functionibus $X_1$, $X_2$, .... $X_n$ substitutus est. Ponamus aequationem illam a Constantibus Arbitrariis vacuam, e qua valor ipsius $x$ petitus est, redire in aequationem aliquam $F = 0$, designante $F$ quantitatum $f_1$, $f_2$, ... $f_n$ functionem. Designantibus $F$, $F_1$, .... $F_{n-1}$ earundem $f_1$, $f_2$, .... $f_n$ functiones a se invicem independentes, dabitur aequationum differentialium propositarum (7.) integratio completa per formulas

$$9. \quad F = \alpha, \quad F_1 = \alpha_1, \quad .... \quad F_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

designantibus $\alpha$, $\alpha_1$ etc. Constantes Arbitrarias. Ex aequatione $F = \alpha$ petito ipsius $x$ valore eoque in functionibus $F_1$, $F_2$, .... $F_{n-1}$, $X_1$, $X_2$, .... $X_n$ substituto, evadunt

$$F_1 = \alpha_1, \quad F_2 = \alpha_2, \quad .... \quad F_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

Integralia completa aequationum differentialium,

$$dx_1 : dx_1 .... : dx_n = X_1 : X_2 .... : X_n,$$

quae cum aequationibus differentialibus (8.) supra consideratis conveniunt ponendo $\alpha = 0$. Unde ponendo $\alpha = 0$ in aequationum differentialium propositarum Integralibus completis (9.), prodit systema aequationum integralium propositarum. Quippe quae redibant in aequationem qua ipsa $x$ exprimitur per reliquas variabiles et quae cum aequatione $F = 0$ conveniebat, atque in aequationum differentialium (8.) Integralia completa, quae ex aequationibus $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \alpha_2$, .... $F_{n-1} = \alpha_{n-1}$ obtinentur, eliminata $x$ ope aequationis $F = 0$. Unde aequationibus differentialibus (7.) integratis systemate aequationum, $n-1$ Constantes Arbitrarias involventium, quoties aequatio eliminatione Constantium Arbitrariarum proveniens redit in aequationem inter ipsas $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, illud aequationum integralium systema erit particulare, utpote e completo proveniens tribuendo Constanti Arbitrariae valorem particularem. Hinc vice versa, si illud aequationum integralium systema non est particulare, aequatio eliminatione $n-1$ Constantium Arbitrariarum proveniens non redit in aequationem inter quantitates $f_1$, $f_2$, .... $f_n$, ideoque solutio quam suppeditat aequationis differentialis partialis (1.) erit singularis. Cuiusmodi solutione, cum secundum antecedentibus probata efficiatur $M = \infty$, demonstratum est quod propositum erat, ***quoties systema aequationum differentialium vulgarium integretur systemate aequationum singulari, numerum Constantium Arbitrariarum involvente unitate minorem quam completum involvit, Constantium Arbitrariarum eliminatione provenire aequationem, qua Multiplicator systematis aequationum differentialium abeat in infinitum.*** Et in hac propositione supponitur, quantitates $X$, $X_1$ etc. ita a

denominatoribus purgatas esse, ut earum nulla pro illa aequatione integrali seu solutione singulari infinita evadat.

Propositionis antecedentis alia haec est demonstratio. Integratione completa exprimantur $x_1, x_2, \ldots x_n$ per $x$ et Constantes Arbitrarias $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Ponamus aequationibus differentialibus satisfieri posse statuendo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ esse ipsius $x$ functiones; sequitur e formula,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x} dx + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} d\beta_2 \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} d\beta_n,$$

haec

$$\frac{X_i}{X} dx = \frac{\partial x_i}{\partial x} dx + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} d\beta_2 \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} d\beta_n$$

At eliminando quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sequitur ex aequationibus integralibus positis,

$$\frac{X_i}{X} = \frac{\partial x_i}{\partial x},$$

quippe quod prodire debebat ponendo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ esse Constantes; illis autem eliminatis quantitatibus perinde est sive constantes sive variabiles fuerint. Substituendo aequationem antecedentem eruitur pro singulis ipsius $i$ valoribus,

$$10. \quad \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} d\beta_2 \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} d\beta_n = 0.$$

Ut satisfiat $n$ aequationibus quae ponendo $i = 1, 2, \ldots n$ ex antecedente fluunt, neque simul sit $d\beta_1 = d\beta_2 \ldots = d\beta_n = 0$ sive $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ Constantes sint, evadere debet

$$11. \quad \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \beta_n} = 0.$$

Quoties poscitur ut functiones $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ involvant $n-1$ Constantes Arbitrarias, non fieri potest ut aequatio (11.) in relationem inter solas variabiles $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ redeat, sed fieri debet ut e (11.) peti possit ipsius $x$ valor per $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ expressus; quo substituto in quantitatibus $\frac{\partial x_i}{\partial \beta_k}$, habebuntur e (10.) $n-1$ aequationes differentiales primi ordinis inter quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, quibus complete integratis prodibunt $n-1$ aequationes inter quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, $n-1$ Constantibus Arbitrariis affectae. Quibus $n-1$ aequationibus iuncta aequatione qua $x$ per $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ exprimebatur, ipsarumque $\beta_1, \beta_2$ etc. loco substitutis variabilium $x, x_1, \ldots x_n$ functionibus, quibus per integrationem completam aequivalent, obtinetur systema aequationum integralium singularium, $n-1$ Constantibus Arbitrariis affectum. Fit autem se-

cundum §. 6.,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \beta_n} = \frac{C}{X_\mu},$$

designante $C$ quantitatum $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ functionem atque $\mu$ aequationum differentialium propositarum Multiplicatorem. Unde, cum supponatur aequationem (10.) non redire in relationem inter quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, porro ipsam $X$ non infinitam evadere, sequitur e (10.) $\mu = \infty$, q. d. e.

Secundum ea quae §. 7. tradidi, Multiplicator $M$ systematis aequationum differentialium post earum integrationem completam factam sic erui potest. Sint rursus Integralia completa,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

eorum ope exprimatur

$$-\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}$$

per $x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Qua expressione integrata ipsius $x$ respectu, prodeat

$$\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

secundum §. 7. erit Multiplicator

$$e^{\varphi(x, f_1, f_2, \ldots f_n)}.$$

Haec quantitas ut infinita evadat per solutionem seu aequationem integralem singularem, hoc est per solutionem seu aequationem integralem quae non redeat in aequationem inter solas quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$ (quod semper fieri vidimus quoties omnino eiusmodi aequatio singularis extat) ex ea aequatione talis provenire debet valor ipsius $x$ per quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$ expressus, quae quantitatem $\varphi(x, f_1, f_2, \ldots f_n)$ reddat infinitam. A *fortiori* igitur pro ea ipsius $x$ valore infinita evadere debet quantitas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\},$$

cum generaliter *quoties pro certo ipsius $x$ valore infinita evadat functio aliqua $\varphi(x)$, pro eadem etiam infinita evadit functio $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ vel adeo $\frac{\partial \varphi}{\varphi \partial x}$* *). Supponimus autem, aequatione singulari non in infinitum abire quantitatem $X$, unde haec emergit

Propositio II.

*„Quoties extat solutio singularis aequationis differentialis partialis,*

$$X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

*) Demonstrationem huius propositionis quivis sibi supplere potest.

*pro eadem fit*

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \infty.$$"

Difficilius videtur solidis argumentis evincere propositionem inversam, videlicet quoties aequatio

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \infty$$

suppeditet aequationis differentialis partialis (1.) solutionem, eam fore singularem. Neque video solidam dari demonstrationem in casu elementari aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, cum in demonstrationibus passim traditis minus recte supponatur, functionem quae pro $\alpha = 0$ evanescat semper evolvi posse secundum ipsius $\alpha$ dignitates positivas.

Sub finem demonstretur de Multiplicatore nostro haec gravissima

## Propositio III.

„*Quoties aequatio* $M = 0$ *aut* $M = \infty$ *est aequatio legitima, semper ea suppeditat solutionem aequationis differentialis partialis, seu aequationem integralem systematis aequationum differentialium vulgarium, cuius* $M$ *est Multiplicator.*"

Sit $M$ aut $\frac{1}{M}$ aequale functioni $u$, ita ut aequatio $u = \infty$ alterutram significet aequationum $M = 0$ aut $\frac{1}{M} = 0$. Eam aequationem legitimam dico si eius ope quaeque variabilium quas continet determinatur ut functio reliquarum, eiusque differentialia quoque prorsus definiantur differentialibus reliquarum variabilium. Statim patet non esse legitimam aequationem $u = \infty$, si est $u = 1$; sed eo dicendi modo etiam non erit legitima huiusmodi aequatio $\frac{1}{x+y} = 0$, quippe qua non definitur, ut ipsius $x$ functio, sed enunciatur tantum $x + y$ esse functionem quamcunque per Constantem infinite magnam multiplicatam: neque definitur ipsius $y$ incrementum quod capit, ubi $x$ in $x + dx$ abit, cum aequatio $x + y = \infty$ salva maneat si $x$ et $y$ incrementa quaecunque a se independentia capiunt. Addo, si ex aequatione $u = \infty$ fluat variabilis $x$ valor per $x_1, x_2, \ldots x_n$ expressus, fractiones $\frac{\partial u}{\partial x_i} : \frac{\partial u}{\partial x}$ per aequationem $u = \infty$ infinitas evadere non posse, cum negative sumtae aequentur differentialibus partialibus functionis variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$, cui $x$ aequalis invenitur. His praeparatis propositio tradita sic patet. Secundum aequationem differentialem partialem qua $M$ defi-

nitur, sequitur ex aequatione $u = \infty$,

$$12. \quad X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} \cdot$$
$$= \pm \frac{1}{\frac{\partial \log u}{\partial x}} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right\}.$$

Iam si supponitur, uti supra, aequatione $u = \infty$ nullam quantitatem $X, X_1, \ldots X_n$ infinitam reddi, quaelibet quantitatum ad dextram, $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x}$, pro $u = \infty$ evanescit, etsi $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ pro $u = \infty$ infinitum fiat. Quod sufficit probare de quantitate $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x_i}$, cum fractio $\frac{\partial u}{\partial x_i} : \frac{\partial u}{\partial x}$ valorem finitum habeat. Generale autem habetur lemma cuius demonstrationi difficultatibus non obnoxiae hic brevitatis causa supersedeo, *si binae functiones pro certo variabilis valore altera infinita fiat, altera finita maneat, prioris differentiale pro eodem variabilis valore infinite maius fore quam posterioris differentiale.* Petendo autem ex aequatione $u = \infty$ valorem ipsius $x_i$, pro eo ipsius $x_i$ valore secundum suppositionem factam $X_i$ finita manet dum $\log u$ infinitus evadit, unde fractiones $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x_i}$ ideoque etiam fractiones $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x}$ pro $u = \infty$ evanescunt. Unde evanescente aequationis (12.) parte dextra, aequatio $u = \infty$ suppeditat aequationis differentialis partialis (1.) solutionem, ideoque etiam aequationem integralem systematis aequationum differentialium vulgarium (7.)

Notione aequationis legitimae supra propositae solvitur paradoxon quod in theoria integrationum singularium obvenit. Constat enim rarissime aequationes differentiales gaudere integrationibus singularibus. At methodus *Lagrangiana* quandam prae se fert generalitatis speciem, quae in errorem inducere possit, ac si de quavis integratione completa deducere liceat singularem. Scilicet ill. *Lagrange,* de aequationibus $y = f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, ipsum $\alpha$ eliminare iubet; at in rarissimis casibus quando $y = f(x, \alpha)$ est aequatio integralis completa, Constante Arbitraria $\alpha$ affecta, fit $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ aequatio legitima, qua sola hic uti licet. Idem ad methodum valet, qua supra de systemate aequationum integralium completarum deduxi aequationum integralium singularium systema, quod numerum Constantium Arbitrariarum unitate minorem implicat.

## Caput secundum.

## De usu novi Multiplicatoris in aequationibus differentialibus integrandis. Principium ultimi Multiplicatoris.

### De Multiplicatore aequationum differentialium transformatarum e propositarum derivando.

### §. 9.

In aequationibus differentialibus propositis,

$$1. \quad dx : dx_1 \ldots . : dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

loco variabilium $x, x_1, \ldots . x_n$ aliae introducantur $w, w_1, \ldots . w_n$, quae supponuntur datae variabilium $x, x_1, \ldots . x_n$ functiones a se independentes, unde etiam $x, x_1, \ldots . x_n$ erunt quantitatum $w, w_1, \ldots . w_n$ functiones independentes. Cum fiat,

$$dw_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} dx + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} dx_1 \ldots . + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} dx_n,$$

sequitur ex aequationibus (1.):

$$2. \quad dw : dw_1 \ldots . : dw_n = W : W_1 \ldots . : W_n,$$

ponendo,

$$3. \quad W_i = \Delta \left\{ \frac{\partial w_i}{\partial x} X + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} X_1 \ldots . + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} X_n \right\},$$

ubi $\Delta$ factor adhuc indeterminatus sit. Porro fit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) \frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right) \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \ldots . + \left(\frac{\partial f}{\partial w_n}\right) \frac{\partial w_n}{\partial x_i},$$

siquidem uncis, quibus includimus differentialia partialia, innuimus functiones differentiandas per novas variabiles $w, w_1, \ldots . w_n$ exhibitas esse. Antecedente formula substituta et advocata (3.) sequitur *pro quacunque functione f:*

$$4. \quad \Delta \left\{ X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$$
$$= W \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) + W_1 \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right) \ldots . + W_n \left(\frac{\partial f}{\partial w_n}\right).$$

Aequationum (1.) Multiplicator $M$ definiebatur aequatione,

$$5. \quad M \left\{ X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Similiter datur aequationum (2.) Multiplicator $N$ per formulam,

$$6. \quad N \left\{ W \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) + W_1 \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right) \ldots . + W_n \left(\frac{\partial f}{\partial w_n}\right) \right\}$$
$$= \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \ldots . \left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right).$$

At secundum propositionem notam (*De Determ. Funct.* §. 11. *Prop.* II. §. 9. (3.)) fit,

$$7. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right) \cdot \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}.$$

Unde e (4.), (5.) obtinetur pro quacunque functione $f$:

$$8. \quad \frac{M}{\Delta}\left\{W\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) + W_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \ldots + W_n\left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right)\right\}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \cdot \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right).$$

Quam formulam comparando cum (6.) sequitur, *posito in formula* (3.),

$$9. \quad \Delta = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right),$$

*fieri* $N = M$ *sive aequationum differentialium propositarum* (1.) *atque transformatarum* (2.) *eundem fore Multiplicatorem.*

Servando factori $\Delta$ valorem (9.), cum sit idem $M$ aequationum (1.) et (2) Multiplicator, fit e proprietate Multiplicatoris fundamentali,

$$10. \quad 0 = X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n}$$
$$+ M\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\},$$

$$11. \quad 0 = W\left(\frac{\partial M}{\partial w}\right) + W_1\left(\frac{\partial M}{\partial w_1}\right) \ldots + W_n\left(\frac{\partial M}{\partial w_n}\right)$$
$$+ M\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) \ldots + \left(\frac{\partial W_n}{\partial w_n}\right)\right\}.$$

At ponendo $M$ pro functione indefinita $f$ in formula (4.) fit,

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} = \frac{1}{\Delta}\left\{W\frac{\partial M}{\partial w} + W_1\frac{\partial M}{\partial w_1} \ldots + W_n\frac{\partial M}{\partial w_n}\right\}.$$

Unde de aequatione (11.) per $\Delta$ divisa detrahendo aequationem (10.) et dividendo per $M$ eruitur:

$$12. \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) \ldots + \left(\frac{\partial W_n}{\partial w_n}\right)\right\}.$$

Quae est formula memoratu digna, in qua $X$, $X_1$, .... $X_n$ sunt functiones quaecunque, ipsae autem $\Delta$, $W$, $W_1$, .... $W_n$ formulis (9.) et (3.) definiuntur.

Si quantitates $W$, $W_1$ etc. per factorem communem $\Delta$ dividimus, per eundem multiplicandus erit aequationum (2.) Multiplicator. Unde si definimus

quantitates $W_i$ formula

$$W_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} X + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} X_1 \ldots + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} X_n,$$

aequationum differentialium,

$$dw : dw_1 \ldots dw_n = W : W_1 \ldots : W_n,$$

erit Multiplicator $\Delta . M$. Ponamus

$$t = \int \frac{dx}{X},$$

poterunt aequationes differentiales (1.) sic proponi:

$$13. \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n;$$

unde sequitur,

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial w_i}{\partial x} X + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} X_1 \ldots + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} X_n,$$

sive,

$$\frac{dw_i}{dt} = W_i.$$

*Aequationum* (1.) *Multiplicatorem in sequentibus etiam appellabo Multiplicatorem aequationum* (13.). Unde antecedentibus inventa sic poterunt enunciari:

Propositio I.

„Designantibus $X, X_1, \ldots X_n$ variabilium $x, x_1, \ldots x_n$ functiones quaslibet, proponantur aequationes differentiales,

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

quarum sit $M$ Multiplicator; in quibus aequationibus ipsarum $x$, $x_1$ etc. loco aliae introducantur variabiles $w, w_1, \ldots w_n$; quo facto si obtinentur aequationes differentiales,

$$14. \quad \frac{dw}{dt} = W, \quad \frac{dw_1}{dt} = W_1, \quad \ldots \quad \frac{dw_n}{dt} = W_n,$$

harum aequationum Multiplicator erit $\Delta . M$, posito

$$\Delta = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right).$$"

Ubi rursus quantitates $W_i$ formula (3.) definimus, formulam (12.) sic proponere licet.

## Propositio II.

„Ipsarum $x, x_1, \ldots x_n$ loco introducendo $w, w_1, \ldots w_n$, ponendoque

$$dt = \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \cdot dt,$$

ex aequationibus differentialibus

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

proveniant sequentes,

$$\frac{dw}{dt} = W, \quad \frac{dw_1}{dt} = W_1, \quad \ldots \quad \frac{dw_n}{dt} = W_n,$$

erit

$$\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} dt = \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) \ldots + \left(\frac{\partial W_n}{\partial w_n}\right)\right\} dt.$$"

In antecedentibus suppositum est, neque ipsas $X$, $X_1$ etc. implicare variabilem $t$ neque eam variabilem afficere relationes quae inter variabiles propositas $x, x_1, \ldots x_n$ atque novas $w, w_1, \ldots w_n$ intercedunt. ***Si quantitates $X$, $X_1$ etc. praeter variabiles $x$, $x_1$ etc. ipsa quoque $t$ afficiuntur, aequationum*** (13.) ***Multiplicatorem eundem dicere placet atque aequationum,***

$$15. \quad dt : dx : dx_1 \ldots dx_n = 1 : X : X_1 \ldots : X_n.$$

Designantibus $x$, $x_1$ etc. ipsarum $t, w, w_1, \ldots w_n$, sive $w$, $w_1$ etc. ipsarum $t, x, x_1, \ldots x_n$ functiones, ponamus rursus ex aequationibus differentialibus (13.) vel (15.) sequi aequationes (14.) sive aequationes,

$$16. \quad dt : dw : dw_1 \ldots dw_n = 1 : W : W_1 \ldots : W_n,$$

atque aequationum (15.) Multiplicatorem esse $M$, aequationum (16.) Multiplicatorem $\Delta . M$. Quibus statutis, secundum antecedentia ad $n+2$ variabiles amplificata erit,

$$\Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right).$$

Sed habetur $\left(\frac{\partial t}{\partial t}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial t}{\partial w_i}\right) = 0$, unde,

$$\Sigma \pm \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right) = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right).$$

Hinc sequitur, ***Propositionem I. ad eum quoque casum valere, quo quantitates $X$, $X_1$ etc. atque functiones novis variabilibus aequandae $w$, $w_1$ etc. praeter ipsas $x$, $x_1$ etc. variabili $t$ afficiuntur.***

Si tantum pro parte variabilium aliae introducuntur, ipsius $\Delta$ expressio simplicior evadit. Propositis enim aequationibus (13.)

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1. \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

quarum est $M$ Multiplicator, si tantum loco variabilium $x, x_1, \ldots\ldots x_\mu$ aliae introducuntur $w, w_1, \ldots\ldots w_\mu$, ita ut aequationes differentiales transformatae fiant,

$$\frac{dw}{dt} = W, \quad \frac{dw_1}{dt} = W_1. \quad \ldots\ldots \quad \frac{dw_\mu}{dt} = W_\mu;$$

$$\frac{dx_{\mu-1}}{dt} = X_{\mu-1}; \quad \frac{dx_{\mu-2}}{dt} = X_{\mu-2}. \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

fit harum Multiplicator $\Delta..M$, posito.

$$\Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots\ldots \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial w_\mu}\right) = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial w_\mu}{\partial x_\mu}}.$$

sicuti ex expressione generali ipsius $\Delta$ patet ponendo $w_{\mu+1} = x_{\mu-1}$; $w_{\mu-2} = x_{\mu+2}$ etc. Quae formulae variis applicationibus idoneae sunt.

**Multiplicator aequationum differentialium ope Integralium completorum reductarum e Multiplicatore propositarum eruitur. Pro reductionibus diversis Multiplicatores alii de aliis deducuntur.**

## §. 10.

Per formulas §. pr. traditas facile solvitur quaestio. si aequationum differentialium

$$1. \quad dx : dx_1 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \ldots\ldots : X_n.$$

inventa sint $m$ Integralia.

$$2. \quad w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}.$$

designantibus $\alpha, \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{m-1}$ Constantes Arbitrarias, aequationum differentialium ope illorum Integralium reductarum Multiplicatorem e Multiplicatore propositarum investigandi. Sint enim $w_m, w_{m-1}, \ldots\ldots w_n$ aliae variabilium $x, x_1, \ldots\ldots x_n$ functiones a se ipsis et ab ipsis $w, w_1, \ldots\ldots w_{m-1}$ independentes, inter quas propositum sit aequationes differentiales exhibere reductas. Poterunt $w, w_1, \ldots\ldots w_n$ ipsarum $x, x_1, \ldots\ldots x_n$ loco pro variabilibus in Calculum introduci. Quo facto secundum §. pr. abeunt aequationes differentiales vulgares (1.) in sequentes:

$$3. \quad dw : dw_1 : dw_2 \ldots\ldots : dw_n = W : W_1 : W_2 \ldots\ldots : W_n,$$

siquidem statuitur

$$4. \quad W_i = \Delta\left\{\frac{\partial w_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial w_i}{\partial x_n}\right\}.$$

Ponendo factorem $\Delta$, quem ex arbitrio determinare licet, fieri,

$$5. \quad \Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right) = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}},$$

vidimus §. pr. Multiplicatorem aequationum differentialium propositarum (1.) eundem evadere Multiplicatorem aequationum transformatarum (3.). Unde designante $M$ aequationum (1.) Multiplicatorem, identice erit

$$6. \quad \left(\frac{\partial . MW}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial . MW_1}{\partial w_1}\right) \ldots + \left(\frac{\partial . MW_n}{\partial w_n}\right) = 0,$$

qua in formula $M$, $W$, $W_1$, .... $W_n$ per variabiles $w$, $w_1$, .... $w_n$ expressae finguntur. At cum sint (2.) aequationum differentialium (1.) Integralia, sequitur esse $w$, $w_1$, .... $w_{m-1}$ solutiones aequationis differentialis partialis

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

unde patet e formula (4.), identice fieri,

$$7. \quad W = 0, \quad W_1 = 0, \quad \ldots \quad W_{m-1} = 0.$$

Unde aequatio (6.) in hanc reducitur,

$$8. \quad \left(\frac{\partial . MW_m}{\partial w_m}\right) + \left(\frac{\partial . MW_{m+1}}{\partial w_{m+1}}\right) \ldots + \left(\frac{\partial . MW_n}{\partial w_n}\right) = 0.$$

In aequatione antecedente expressae sunt $MW_m$, $MW_{m+1}$ etc. per $w$, $w_1$, ... ... $w_n$, sed differentiationes partiales solarum $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$ respectu transiguntur. Unde in aequatione praecedente ipsis $w$, $w_1$, .... $w_{m-1}$ substituere licet Constantes Arbitrarias aequivalentes $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{m-1}$. Idem si facimus in aequationibus differentialibus (3.), obtinemus aequationes differentiales per inventa Integralia (2.) reductas,

$$9. \quad dw_m : dw_{m+1} \ldots : dw_n = W_m : W_{m+1} \ldots : W_n,$$

in quibus sunt $W_m$, $W_{m+1}$, .... $W_n$ ipsarum $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$ et Constantium Arbitrariarum $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{m-1}$ functiones, in quas quantitates (4.) per inventa Integralia (2.) abeunt. Simulque docet aequatio identica (8.) ipsum $M$, per $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$ atque $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{m-1}$ expressum, fore aequationum quoque reductarum (9.) Multiplicatorem.

Antecedentibus valores quantitatum $W_i$ per talem factorem $\Delta$ multiplicavi, ut aequationum differentialium (1.) atque (3.) Multiplicator $M$ idem fiat. Si in formulis (4.) hunc factorem omittimus sive omnes quantitates $W_i$ per factorem $\Delta$ dividimus, ipsum $M$ per eundem multiplicari debebat, sive aequationum (3.) vel (9.) Multiplicator poni debebat $\Delta . M$ (§. 9.). Quod si facimus, antecedentibus inventa sic proponere licet.

## Propositio I.

„Aequationum differentialium

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

quarum sit $M$ Multiplicator, inventa sint $m$ Integralia,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots . \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

quorum ope variabiles $x, x_1, \ldots . x_n$ omnes exprimantur per Constantes Arbitrarias $\alpha, \alpha_1, \ldots . \alpha_{m-1}$ atque variabilium $x, x_1, \ldots . x_n$ functiones

$$w_m, \quad w_{m+1}, \quad \ldots . w_n,$$

ponendo

$$W_i = X \frac{\partial w_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial w_i}{\partial x_n},$$

dabuntur inter variabiles $w_m, w_{m+1}, \ldots . w_n$ aequationes differentiales,

$$dw_m : dw_{m+1} \ldots . : dw_n = W_m : W_{m+1} \ldots . : W_n,$$

harumque Multiplicator erit

$$\Delta . M,$$

siquidem ponitur

$$\Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w_m}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_{m+1}}\right) \ldots . \left(\frac{\partial x_{n-m}}{\partial w_n}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \ldots . \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_{m+1}}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial w_n}{\partial x_{n-m}} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \ldots . \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n}\right\}^{-1}.$$

Quae est Propositio in theoria Multiplicatoris fundamentalis. Determinans inversum, quo $\Delta$ exprimitur, sic quoque scribi potest,

$$\left\{\Sigma + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial w_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

cum permutatione functionum $w, w_1$ etc. valor Determinantis tantum signum mutare queat, quod hic non curamus.

Pro ipsis $w_m, w_{m+1}, \ldots . w_n$ etiam $n-m+1$ quantitates e numero ipsarum $x, x_1, \ldots . x_n$ sumere licet. Si statuimus

$$w_m = x, \quad w_{m+1} = x_1, \quad \ldots . \quad w_n = x_{n-m},$$

fit,

$$10. \quad \Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \ldots . \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \ldots . \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n}\right\}^{-1}.$$

Porro e (4.) obtinetur,

$$W_m = X, \quad W_{m+1} = X_1, \quad \ldots . \quad W_n = X_{n-m}.$$

Hinc eruitur

## Propositio II.

„Aequationum differentialium

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

quarum $M$ est Multiplicator, inventis $m$ Integralibus,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots . \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

si exhibentur $x_{n-m+1}$, $x_{n-m+2}$, $\ldots . x_n$ per $x$, $x_1$, $\ldots . x_{n-m}$ atque Constantes Arbitrarias $\alpha$, $\alpha_1$, $\ldots . \alpha_{m-1}$, aequationum differentialium reductarum

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_{n-m} = X : X_1 \ldots . : X_{n-m},$$

evadit Multiplicator,

$$M\Sigma \pm \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right)\ldots . \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \ldots . \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n}\right\}^{-1}.“$$

Si eaedem aequationes differentiales propositae per diversa Integralium systemata reducuntur, Multiplicatores diversorum aequationum differentialium reductarum systematum ex eorum uno deduci possunt. Qua in re semper supponitur, unumquodque Integrale quod reductioni inservit sua affici Constante Arbitraria, ideoque aequationes differentiales reductas omnes ingredi Constantes Arbitrarias, quibus Integralia quorum ope reductio effecta est afficiuntur.

Sint enim rursus Integralia reductioni adhibenda,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots . \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

atque aequationes differentiales reductae, inter variabiles $w_m$, $w_{m+1}$, $\ldots . w_n$ exhibitae,

$$11. \quad dw_m : dw_{m+1} \ldots . : dw_n = W_m : W_{m+1} \ldots . : W_n.$$

Eaedem aequationes differentiales propositae (1.) ope Integralium,

$$u = \beta, \quad u_1 = \beta_1, \quad \ldots . \quad u_{k-1} = \beta_{k-1},$$

reducantur ad has, inter variabiles $u_k$, $u_{k+1}$, $\ldots . u_n$ exhibitas,

$$12. \quad du_k : du_{k+1} \ldots . : du_n = U_k : U_{k+1} \ldots . : U_n.$$

Sit $M$ Multiplicator aequationum differentialium propositarum, sint respective $N$ et $K$ Multiplicatores aequationum differentialium reductarum (11.) et (12.): erit secundum Prop. I.

$$13. \quad N = M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial w_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

$$K = M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

unde

$$14. \quad K = N \frac{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}}.$$

Quae formula supponit, in aequationibus differentialibus reductis (11.) et (12.) ita definiri quantitates differentialibus proportionales ut fiat,

$$\frac{\partial w_m}{W_m} = \frac{\partial u_k}{U_k}.$$

Si ipsae $w$, $w_1$, .... $w_n$ per $u$, $u_1$, .... $u_n$ exprimuntur, formulam (14.) notae propositionis beneficio (D. F. §. 10. (5.)) concinnius sic exhibere licet,

$$15. \quad K = N\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial u_n}.$$

Quae formula generalis duos amplectitur casus, quo aequationes differentiales propositae per eadem Integralia reducuntur, sed reductae inter diversas variabiles exhibentur, et quo per diversa Integralia reductae inter easdem variabiles exhibentur.

Etenim ponendo $k = m$ atque

$$u = w, \quad u_1 = w_1, \quad \ldots \quad u_{m-1} = w_{m-1},$$

sequitur e (15.), si eaedem aequationes differentiales propositae per eadem Integralia,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

reducantur ad $n-m$ aequationes differentiales inter $n-m+1$ variabiles $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$ vel ad alias inter variabiles $u_m$, $u_{m+1}$, .... $u_n$, fieri

$$16. \quad K = N\Sigma \pm \frac{\partial w_m}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial w_{m+1}}{\partial u_{m+1}} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial u_n},$$

ubi $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$ expressae supponuntur per variabiles $u_m$, $u_{m+1}$, .... $u_n$ atque Constantes Arbitrarias $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{m-1}$.

Si vero rursus $k = m$ atque

$$u_m = w_m, \quad u_{m+1} = w_{m+1}, \quad \ldots \quad u_n = w_n,$$

vel si aequationes differentiales propositae per hoc $m$ Integralium systema

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

aut per hoc,

$$u = \beta, \quad u_1 = \beta_1, \quad \ldots \quad u_{m-1} = \beta_{m-1},$$

reducuntur ad $n-m$ aequationes differentiales diversas inter easdem $n-m+1$ variabiles $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$: abit formula (15.) in hanc,

$$17. \quad K = N\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \beta_1} \cdots \frac{\partial w_{m-1}}{\partial \beta_{m-1}},$$

siquidem in formando Determinante Functionali supponitur expressas esse $w$, $w_1$, .... $w_{m-1}$ per variabiles $w_m$, $w_{m+1}$, .... $w_n$ atque Constantes Arbitrarias $\beta$, $\beta_1$, .... $\beta_m$.

**Principium ultimi Multiplicatoris sive quomodo cognito Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium ultima integratio ad Quadraturas revocatur.**

## §. 11.

Propositionum I. et II. §. pr. prae ceteris memorabilis est casus $m = n-1$, quo omnibus praeter unum inventis Integralibus una integranda restat aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Eo casu Multiplicator aequationis differentialis reductae redit in Multiplicatorem ***Eulerianum***, qui eam per se integrabilem reddit sive ad Quadraturas revocat. Unde ponendo $n = m-1$ e Propp. I. et II. §. pr. memorabiles prodeunt Propositiones, quae novum constituunt principium, e quo Calculus Integralis haud parum incrementi capit. Quod ***principium ultimi Multiplicatoris*** appellare convenit.

### Propositio I.

„***Propositis aequationibus differentialibus***

$$dx : dx_1 .... : dx_n = X : X_1 .... : X_n$$

***habeatur Multiplicator M sive solutio quaecunque aequationis differentialis partialis,***

$$\frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} .... + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0;$$

***porro inventa sint Integralia praeter unum omnia,***

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad .... \quad w_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

***designantibus $\alpha$ etc. Constantes Arbitrarias, quibus ipsae functiones $w$, $w_1$ etc. non afficiantur; sumtis ex arbitrio duabus ipsarum $x$, $x_1$, .... $x_n$ functionibus $w_{n-1}$, $w_n$, fiat,***

$$X \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x_1} .... + X_n \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x_n} = W_{n-1},$$

$$X \frac{\partial w_n}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_n}{\partial x_1} .... + X_n \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = W_n,$$

***erit ultimum Integrale***

$$\int \frac{M\{W_n dw_{n-1} - W_{n-1} dw_n\}}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} . \frac{\partial w_1}{\partial x_1} .... \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \text{Const.}"$$

### Propositio II.

„***Inventis aequationum differentialium,***

$$dx : dx_1 .... : dx_n = X : X_1 .... : X_n,$$

*Integralibus praeter unum omnibus,*

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad w_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

*ac designante M solutionem quamcunque aequationis differentialis partialis,*

$$0 = \frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n},$$

*exprimantur*

$$x_2, \quad x_3, \quad \ldots\ldots \quad x_n, \quad X, \quad X_1, \quad M$$

*per x et $x_1$ atque Constantes Arbitrarias*

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad \alpha_{n-2}:$$

*erit ultima aequatio integralis,*

$$\int \frac{M\{X_1\,dx - X\,dx_1\}}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n}} = \text{Const.}"$$

In duabus Propositionibus antecedentibus quantitas sub integrationis signo posita evadit differentiale completum, ubi expressiones in bina differentialia ducta per easdem duas variabiles exhibentur inter quas aequatio differentialis reducta locum habet. Similiter in sequentibus etsi pressis verbis non adnotetur, quoties formula integralis Constanti Arbitrariae aequiparatur, innuitur sub signo integrationis haberi differentiale completum.

In Propp. antecedentibus loco divisionis per Determinantia Functionalia,

$$\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n},$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n},$$

etiam multiplicatio institui potuisset per Determinantia Functionalia sensu inverso formata (Det. Funct. §. 9.). Quod ubi fit, erit in altera Propositione ultima aequatio integralis,

$$1. \quad \int M \Delta (W_n\,dw_{n-1} - W_{n-1}\,dw_n) = \text{Const.},$$

posito

$$2. \quad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial w_{n-1}} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_n}$$

$$= \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

vel in altera

$$3. \quad \int M \Delta (X_1\,dx - X\,dx_1) = \text{Const.},$$

posito

$$4. \quad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}} = \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n}\right\}^{-1}$$

In formandis Determinantibus functionalibus (2.) et (4.) supponitur, aut ipsa $n-2$ Integralia dari novasque quoque variabiles $w_{n-1}$, $w_n$ per $x$, $x_1$, .... $x_n$ expressas esse, aut per integrationes transactas variabiles omnes expressas esse per binas $w_{n-1}$, $w_n$ vel $x$, $x_1$ atque per Constantes Arbitrarias quae singulis integrationibus accedunt. Generalius si reductio ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles efficitur ope $n-1$ aequationum integralium quarumcunque,

$$\Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0, \quad \ldots. \quad \Pi_{n-2} = 0,$$

quae afficiuntur totidem Constantibus Arbitrariis

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \ldots. \quad \alpha_{n-2},$$

poni poterit in formula (2.)

$$5. \qquad \Delta = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \ldots. \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_3} \ldots. \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial x_1}},$$

vel in formula (4.),

$$6. \qquad \Delta = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \ldots. \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_3} \ldots. \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_n}}$$

(Cf. *Det. Funct.* §. 10.). Formula antecedens prae ceteris cum fructu adhibetur. Aequationibus enim integralibus inventis saepissime per varias eliminationes eiusmodi formas induere licet, pro quibus Determinantia functionalia, quae numeratorem et denominatorem fractionis antecedentis constituunt, sine molestia inveniantur. Commode etiam adhiberi potest ad Determinantia functionalia formanda propositio, valorem Determinantium functionalium,

$$X \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots. \frac{\partial w_n}{\partial x_n}, \qquad X \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots. \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n},$$

non mutari, si ante differentiationes partiales transigendas functio quaeque $w_i$ ope aequationum,

$$7. \qquad w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots. \quad w_{i-1} = \alpha_{i-1},$$

mutationes quascunque subeat. Inservire possunt aequationes (7.) ad eliminandas e quaque functione $w_i$ variabiles

$$x_n, \quad x_{n-1}, \quad \ldots. \quad x_{n-i+1}.$$

Quo facto si abit $w_i$ in $\Pi_i$, erunt

$$\Pi - \alpha = 0, \quad \Pi_1 - \alpha_1 = 0, \quad \ldots. \quad \Pi_{n-2} - \alpha_{n-2} = 0,$$

aequationes integrales, quales per integrationem et eliminationem successivam

inveniuntur. Porro fit

$$8. \quad X \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}.$$

Cf. §. 3. Si vero adhibentur variabilium expressiones quales ex eliminatione successiva prodeunt, videlicet ipsius $x_n$ expressio per $x$, $x_1$, .... $x_{n-1}$, $\alpha$; ipsius $x_{n-1}$ expressio per $x$, $x_1$, .... $x_{n-2}$, $\alpha$, $\alpha_1$ etc., abit Determinans

$$X \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}}$$

in productum

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \alpha_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-2}}\right),$$

ubi uncis innuo esse $x_{n-i}$ ipsarum $x$, $x_1$, .... $x_{n-i-1}$, $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_i$ functionem. Quibus substitutis in (4.), fit

$$9. \quad \Delta = \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \alpha_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-2}}\right) = \frac{1}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}}.$$

Hinc sequentes emergunt Propositiones.

### Propositio III.

„Aequationum differentialium vulgarium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

quarum $M$ est Multiplicator, inventis per integrationem et eliminationem successivam aequationibus integralibus praeter unam omnibus,

$$\Pi = \alpha, \quad \Pi_1 = \alpha_1, \quad \ldots \quad \Pi_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

ubi $\Pi_i$ est functio variabilium $x$, $x_1$, .... $x_{n-i}$ atque Constantium Arbitrariarum $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{i-1}$: fit ultima aequatio integralis,

$$\int \frac{M\{X_1 dx - X dx_1\}}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}} = \text{Const.}"$$

### Propositio IV.

„Aequationum differentialium vulgarium

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

quarum $M$ est Multiplicator, inventis per integrationem et eliminationem successivam expressionibus ipsius $x_n$ per $x$, $x_1$, .... $x_{n-1}$ atque Constantem Arbitrariam $\alpha$; ipsius $x_{n-1}$ per $x$, $x_1$, .... $x_{n-2}$ atque Constantes Arbitrarias $\alpha$, $\alpha_1$ etc., denique ipsius $x_2$ per $x$, $x_1$ atque Constantes Arbitrarias $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{n-2}$, dabitur aequatio inter $x$ et $x_1$ per formulam,

$$\int \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \alpha_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-2}}\right) M(X_1 dx - X dx_1) = \text{Const.}"$$

In utraque Propositione functiones sub signo integrationis ope aequationum integralium inventarum per $x$ et $x_1$ exprimendae sunt.

Quod e Multiplicatore aequationum differentialium propositarum eruitur Multiplicator aequationis differentialis, in quam post inventa praeter unum omnia Integralia problema redit, id eo maioris momenti est, quia huius ultimae aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles valde latere potest Multiplicator, dum systematis aequationum differentialium propositarum sponte se offert. Veluti quod in gravissimis quaestionibus evenit, si ipsarum $X$, $X_1$ etc. expressiones ita sunt comparatae, ut identice habeatur,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots . + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

aequationum differentialium propositarum Multiplicator *unitati* aequalis evadit; aequationis autem postremo integrandae Multiplicator secundum antecedentia aequatur Determinanti Functionali, cui valor complicatus competere potest. Casu illo particulari in quatuor Propositionibus antecedentibus ponere licet $M = 1$; quod ubi ex gr. in Prop. IV. facimus, emergit haec:

Propositio V.

*„Proponantur aequationes differentiales simultaneae,*

$$dx : dx \ldots . : dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

*designantibus $X$, $X_1$, etc. variabilium $x$, $x_1$ etc. functiones pro quibus identice habeatur,*

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots . + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0;$$

*inventis aequationum propositarum $n-1$ Integralibus, $n-1$ Constantes Arbitrarias $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{n-2}$ involventibus, exprimantur $X$ et $X_1$ atque variabiles $x_2$, $x_3$, .... $x_n$ per $x$, $x_1$ atque istas Constantes Arbitrarias $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{n-2}$: erit ultimum Integrale,*

$$\int \left( \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \ldots . \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}} \right) \{ X_1 dx - X dx_1 \} = \text{Const.},$$

*ubi expressio sub integrationis signo differentiale completum existit.“*

Propositionis antecedentis afferam exempla pro $n = 2$ et $n = 3$.

I. „Proponantur aequationes differentiales

$$dx : dy : dz = X : Y : Z,$$

designantibus $X$, $Y$, $Z$ variabilium $x$, $y$, $z$ functiones, pro quibus identice fiat,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

invento uno Integrali involvente Constantem Arbitrariam $\alpha$, exprimantur $X$, $Y$, $z$ per $x$, $y$, $\alpha$, erit alterum Integrale,

$$\int \frac{\partial z}{\partial \alpha} \{Y dx - X dy\} = \text{Const.}"$$

II. „Proponantur aequationes differentiales

$$dt : dx : dy : dz = T : X : Y : Z,$$

designantibus $T$, $X$, $Y$, $Z$ variabilium $t$, $x$, $y$, $z$ functiones, pro quibus identice fiat,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

inventis duobus Integralibus involventibus Constantes Arbitrarias $\alpha$ et $\beta$, exprimantur $T$, $X$, $y$, $z$ per $t$, $x$, $\alpha$, $\beta$; erit tertium Integrale,

$$\int \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) (X dt - T dx) = \text{Const.}"$$

Quae exempla non sine molesto calculo verificantur.

**Quibus casibus Multiplicator aequationum differentialium per aequationes integrales *particulares* reductarum ex aequationum differentialium propositarum Multiplicatore eruitur. Principium ultimi Multiplicatoris sine Determinantium adiumento comprobatum.**

§. 12.

Si aequationes integrales, aequationibus differentialibus reducendis adhibitae, sunt particulares, in genere non licet Multiplicatorem aequationum differentialium reductarum e Multiplicatore propositarum deducere. In Prop. II. §. 10., quae docet quomodo aequationum differentialium propositarum et reductarum Multiplicatores a se invicem pendeant, possunt quidem Constantibus Arbitrariis quibus Integralia afficiuntur valores particulares tribui: supponitur autem ipsa cognita esse aequationum differentialium propositarum Integralia generalia. Quae tamen suppositio necessaria non est. Etenim si aequationes integrales reductioni adhibendae alia post aliam investigantur, sufficit unamquamque aequationem integralem inventam ita comparatam esse, ut differentiata per aequationes differentiales propositas identica reddatur, simul omnibus ***ipsam praecedentibus*** aequationibus integralibus accitis. Neque vero propositum succederet si ex aequationibus integralibus reductioni adhibitis duae pluresve ita comparatae essent, ut quaeque earum differentiata per aequationes differentiales propositas identica reddi non possit nisi simul omnes reliquae aequationes integrales, nullo ordine observato, in auxilium vocentur.

Antecedentia cum e formulis traditis patent tum ope propositionis elementaris directe demonstrantur, quoties aequationes integrales alia post aliam inventae ad variabiles successive eliminandas adhibentur. Sit enim aequationum differentialium propositarum primum Integrale inventum,

$$F = \alpha;$$

cujus ope e quantiiatibus $X$, $X_1$, .... $X_{n-1}$ eliminetur $x_n$. Ponendo $m = 1$ in Prop. II §. 10. sequitur, ***Multiplicatorem aequationum differentialium reductarum,***

$$1. \quad dx : dx_1 .... : dx_{n-1} = X : X_1 .... : X_{n-1},$$

***aequari Multiplicatori aequationum differentialium propositarum diviso per*** $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ ***sive quantitati***

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}},$$

***in qua variabilis*** $x_n$ ***per aequationem*** $F = \alpha$ ***eliminanda est.*** Constans $\alpha$ in hac propositione fundamentali arbitraria est ideoque valor ei quicunque tribui potest particularis.

Tributo in functionibus $X$, $X_1$, .... $X_{n-1}$ Constanti $\alpha$ quam implicant valore particulari, sit aequationum (1.) Integrale,

$$F_1 = \alpha_1.$$

Quod non erit Integrale aequationum differentialium propositarum. Quippe aequatio $dF_1 = 0$ per aequationes differentiales propositas identica non redditur nisi simul Constans $\alpha$ ubique functioni $F$ aequatur. Quae Constantis $\alpha$ eliminatio ubi fit in functione $F_1$, aequatio $F_1 = \alpha_1$ evadit Integrale aequationum differentialium propositarum. Sed ea Constantis $\alpha$ eliminatio fieri non potest si ei in aequationibus differentialibus reductis (1.) tribuitur valor particularis, neque igitur eo casu ex aequationum differentialium reductarum Integrali Integrale propositarum restituere licet.

Eliminata $x_{n-1}$ ope aequationis $F_1 = \alpha_1$, obtinentur e (1.) aequationes differentiales denuo reductae,

$$2. \quad dx : dx_1 .... dx_{n-2} = X : X_1 .... : X_{n-2}.$$

Quarum Multiplicator secundum eandem regulam derivatur e Multiplicatore aequationum (1.), atque hic e Multiplicatore aequationum differentialium propositarum erutus est, videlicet dividendo per $\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}$, unde prodit aequationum (2.) Multiplicator.

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}},$$

quae quantitas variabilibus $x_n$ et $x_{n-1}$ per aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$ eliminatis solarum $x$, $x_1$, .... $x_{n-2}$ functio evadit. Unde aequationum differentialium (2.) erutus est Multiplicator, quamquam reductio facta est per duas aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$, quarum tantum altera est aequationum differentialium propositarum Integrale, altera non est neque ad tale revocari potest, si Constanti $\alpha$ tributus est valor particularis.

Rursus tributo Constanti $\alpha_1$ valore particulari quocunque, aequationum (2.) quaeratur Integrale, quo invento aequationes differentiales (2.) ulterius reduci possunt, reductarumque per eandem regulam constabit Multiplicator. Sic pergendo successive eruantur $m$ aequationes integrales,

$$3. \quad F = \alpha, \quad F_1 = \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad F_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

in quibus $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{m-1}$ sint Constantes particulares quaecunque; quarum aequationum integralium ope revocatis $X$, $X_1$, .... $X_{n-m}$ ad solarum $x$, $x_1$, .... $x_{n-m}$ functiones, aequationum differentialium ad quas successiva eliminatione pervenitur,

$$4. \quad dx : dx_1 \ldots : dx_{n-m} = X : X_1 \ldots : X_{n-m},$$

eruitur Multiplicator,

$$5. \quad \frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}}},$$

quae quantitas et ipsa per aequationes (3.) ad solarum $x$, $x_1$, .... $x_{n-m}$ functionem revocanda est. Aequationes (3.) reductionibus successivis inservientes hic ita comparatae sunt ut quaeque $F_i=\alpha_i$ sit Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-i} = X : X_1 \ldots : X_{n-i},$$

variabilibus $x_n$, $x_{n-1}$, .... $x_{n-i+1}$ e $X$, $X_1$, .... $X_{n-i}$ eliminatis ope aequationum ipsam $F_i=\alpha_i$ praecedentium,

$$F = \alpha, \quad F_1 = \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad F_{i-1} = \alpha_{i-1}.$$

Si $m=n-1$, formula (5.) suppeditat Multiplicatorem aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles $x$ et $x_1$,

$$6. \quad X_1 dx - X dx_1 = 0,$$

quae post inventas aequationes integrales,

$$7. \quad F = \alpha, \quad F_1 = \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad F_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

unica integranda restat. Multiplicatore sic invento,

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_2}},$$

laeva pars aequationis (6.) evadit differentiale completum, unde eius integratio ad Quadraturas revocatur sive fit ultima aequatio integralis,

$$8. \quad \int \frac{M(X_1 dx - X dx_1)}{\frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_2}} = \text{Const.}$$

Qua in formula adiumento aequationum integralium inventarum (7.) quantitates, sub integrationis signo in differentialia $dx$ et $dx_1$ ductae, per solas $x$ et $x_1$ exprimendae sunt.

Cum antecedentibus Constantes $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{n-2}$ sint particulares *quaecunque,* earum valorem etiam generalem seu indefinitam servare licet, quo facto formula (8.) redit in Prop. III. §. pr. Vice versa Prop. III. §. pr., in qua designant $\alpha$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{n-2}$ Constantes Arbitrarias, eum quoque amplectitur casum quo post quamque novam integrationem Constanti Arbitrariae qua afficitur valor tribuitur particularis. Quod intelligitur observando, aequationibus differentialibus Constantes Arbitrarias involventibus, idem earum Integrale obtineri posse, sive ante sive post integrationem Constantibus Arbitrariis illis valores particulares tribuas.

Necessarium non est, ut quaeque nova aequatio integralis inveniatur ut Integrale ipsarum aequationum differentialium ad quas propositae reducuntur eliminato per aequationes integrales ante inventas aequali variabilium numero; generalius ea esse poterit Integrale aequationum differentialium propositarum, per aequationes integrales ante ipsam inventas quocunque modo transformatarum. Aequationum enim differentialium propositarum per Integrale $F = \alpha$ transformatarum sit Integrale $F_1 = \alpha_1$; aequationum differentialium propositarum per binas aequationes $F = \alpha$, $F_1 = \alpha_1$ transformatarum sit Integrale $F_2 = \alpha_2$, per tres aequationes $F = \alpha$, $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \alpha_2$ transformatarum sit Integrale $F_3 = \alpha_3$, et ita porro, ubi Constantes $\alpha$, $\alpha_1$ etc. poterunt arbitrariae esse sive particulares quaecunque. Quibus positis, ex aequatione integrali $F = \alpha$ et aequationibus differentialibus propositis sequi debet, $dF_1 = 0$; unde per aequationem $F = \alpha$ eliminata $x_n$ e functionibus $X$, $X_1$, .... $X_{n-1}$, $F_1$, fieri debet $F_1 = \alpha_1$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 \ldots : X_{n-1}.$$

Ex aequationibus integralibus $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$ et aequationibus differentialibus propositis sequi debet $dF_2=0$; unde per aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$ eliminatis $x_n$ et $x_{n-1}$ e functionibus $X$, $X_1$, .... $X_{n-2}$, fieri debet $F_2=\alpha_2$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_{n-2} = X : X_1 \ldots . : X_{n-2},$$

et ita porro. Generaliter si primum functiones $F_1$, $F_2$ etc. ratione illa generaliori qua eas definivi obtinebantur, ac deinde e quaque $F_i$ eliminantur $x_n$, $x_{n-1}$, .... $x_{n-i+1}$ per aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$, .... $F_{i-1}=\alpha_{i-1}$, eaedem functiones $F$, $F_1$, $F_2$ etc. prodeunt quas in formulis (5. et. 8.) consideravi. Ea autem reductione adhibita abit Determinans functionale

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \ldots . \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}}$$

in simplex productum

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \ldots . \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}},$$

quod formulae (5.) denominatorem afficit (§. 3.). Unde si functionibus $F$, $F_1$, $F_2$ etc. generaliorem significatum servare placet, formula (5.) evadere debet,

$$9. \quad \frac{M}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \ldots . \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}}},$$

ideoque etiam formula (8.)

$$10. \quad \int \frac{M\{X_1 dx - X dx_1\}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \ldots . \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_2}} = \text{Const.}$$

Definitio functionum $F$, $F_1$ etc. amplectitur casum quo omnes aequationes $F_i=\alpha_i$ sunt ipsarum aequationum differentialium Integralia generalia. Unde e simplice propositione elementari tradita derivatur principium ultimi Multiplicatoris, si reductio ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles per Integralia generalia fit, simulque monstrantur casus maxime generales quibus invenire liceat ultimum Multiplicatorem, etsi aequationes integrales reductioni adhibitae sint particulares.

Addam demonstrationem propositionis fundamentalis qua antecedentibus vidimus principium ultimi Multiplicatoris via maxime elementari adeoque absque ullo Determinantium adiumento superstrui.

Propositio.

„*Sit $F$ solutio quaecunque aequationis*

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

*exclusa Constante; sit porro M solutio quaecunque aequationis*

$$\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1}\ldots.+\frac{\partial.MX_n}{\partial x_n}=0,$$

*Constante non exclusa: posito*

$$N=\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}},$$

*ipsisque* $N$, $X$, $X_1$, .... $X_{n-1}$ *per* $x$, $x_1$, .... $x_{n-1}$, $F$ *expressis, fit* $N$ *solutio aequationis*

$$\frac{\partial.NX}{\partial x}+\frac{\partial.NX_1}{\partial x_1}\ldots.+\frac{\partial.NX_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=0.$$"

**Demonstratio.**

Ponatur

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}=u;$$

differentiando variabilis $x_n$ respectu aequationem identicam,

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+X_1\frac{\partial F}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}=0,$$

prodit,

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x_n}.\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}.\frac{\partial F}{\partial x_1}\ldots.+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}.\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Innuendo uncis quibus differentialia partialia includantur exhiberi $X$, $X_1$ etc. per $x$, $x_1$, .... $x_{n-1}$, $F$, fit

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_n}=\left(\frac{\partial X_i}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_n}=\left(\frac{\partial X_i}{\partial F}\right)u.$$

Quam formulam in aequatione praecedente substituendo atque per $u$ dividendo prodit,

$$X\frac{\partial\log u}{\partial x}+X_1\frac{\partial\log u}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial\log u}{\partial x_n}$$
$$+\left(\frac{\partial X}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial X_1}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_1}\ldots.+\left(\frac{\partial X_n}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Haec formula detrahatur de sequente, quae ex ea qua $M$ definitur fluit,

$$X\frac{\partial\log M}{\partial x}+X_1\frac{\partial\log M}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial\log M}{\partial x_n}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\ldots.+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0,$$

simulque observetur haberi pro indicis $i$ valoribus 1, 2, .... $n-1$,

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial X_i}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

prodit ponendo $\frac{M}{u} = N$,

$$X\frac{\partial \log N}{\partial x} + X_1\frac{\partial \log N}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial \log N}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) \ldots + \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0.$$

Fit autem

$$\begin{aligned} & X\frac{\partial \log N}{\partial x} + X_1\frac{\partial \log N}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial \log N}{\partial x_n} \\ = {} & X\left(\frac{\partial \log N}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_1}\right) \ldots + X_{n-1}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_{n-1}}\right) \\ & + \frac{\partial \log N}{\partial F}\left\{X\frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}\right\} \\ = {} & X\left(\frac{\partial \log N}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_1}\right) \ldots + X_{n-1}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_{n-1}}\right), \end{aligned}$$

aggregato in $\left(\frac{\partial \log N}{\partial F}\right)$ ducto identice evanescente. Unde aequatio antecedens sic quoque exhiberi potest:

$$X\left(\frac{\partial \log N}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_1}\right) \ldots + X_{n-1}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) \ldots + \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

quae per $N$ multiplicata suppeditat,

$$\left(\frac{\partial . NX}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial . NX_1}{\partial x_1}\right) \ldots + \left(\frac{\partial . NX_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0,$$

quae est formula demonstranda.

Vidimus supra, propositione antecedente iteratis vicibus adhibita erui aequationum differentialium reductarum Multiplicatorem e Multiplicatore propositarum. Sed ad hunc finem non necesse est ut hic ipse cognoscatur sed sufficit eius cognoscere valorem quem per aequationes integrales reductioni adhibitas induere potest. Si problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter $x$ et $x_1$ revocatum est, definitur $M$ aequationibus,

$$11. \quad \frac{d \log M}{dx} = -\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} X_1 dx = X dx_1,$$

in quibus *post differentiationes partiales factas* eliminandae sunt $x_2$, $x_3$, ... ... $x_n$. Si aequationes integrales, quarum ope reductiones et eliminationes propositae operantur, particulares sunt, evenire potest ut e formulis (11.) erutur valor ipsius $M$ in principio ultimi Multiplicatoris requisitus, neque tamen

inveniri queat ipsius $M$ valor generalis sive ipsarum aequationum differentialium propositarum Multiplicator. Directe aequationis differentialis,

$$X_1 dx - X dx_1 = 0,$$

definitur Multiplicator $P$ per formulam,

$$12. \quad \frac{d \log P}{dx} = -\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right\},$$

in cuius dextra parte $X$ et $X_1$ *ante differentiationes partiales transigendas* per solas $x$ et $x_1$ exprimendae sunt. Potest autem evenire ut via non pateat qua ipsum $P$ e (12.) eruatur, dum ipsius $M$ determinatio per formulam (11.) in promtu est. Quae adeo, nullis cognitis aequationibus integralibus, in amplis gravissimisque problematis succedit, unde pro quibuscunque aequationibus integralibus reductioni adhibitis sive completis sive dicta ratione inventis particularibus ultimus Multiplicator constat.

**De usu Multiplicatoris in integrandis systematis quibusdam aequationum differentialium specialibus.**

§. 13.

Systema aequationum differentialium propositarum ita comparatum esse potest ut ultima Integratio sponte in Quadraturam redeat. Quod evenit si unius variabilis differentiale tantum, non ipsa in aequationibus differentialibus invenitur. Ponamus ipsam $x$ esse variabilem a qua simul omnes functiones vacuae sint $X, X_1, \ldots X_n$: redire constat integrationem $n$ aequationum differentialium inter $n+1$ variabiles,

$$1. \quad dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots : X_n,$$

in integrationem $n-1$ aequationum differentialium inter $n$ variabiles unamque Quadraturam. Integratis enim aequationibus,

$$2. \quad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X_1 : X_2 \ldots : X_n,$$

quae sunt $n-1$ aequationes differentiales inter $n$ variabiles $x_1, x_2, \ldots x_n$, exhiberi poterunt variabiles $x_1, x_2, \ldots x_n$ per earum unam veluti $x_1$: unde, expressa $\frac{X}{X_1}$ per $x_1$, dabit simplex Quadratura ipsius $x$ valorem,

$$3. \quad x = \int \frac{X dx_1}{X_1} + \text{Const.}$$

Iam cognito aequationum differentialium (1.) Multiplicatore quaeritur, quemnam ex eo fructum ad integrationem perficiendam percipere liceat, cum ultima integratio sua sponte in Quadraturam redeat. Quod ut cognoscatur, inter duo casus distinguendum erit, prout datus aequationum differentialium (1.) Multiplicator a variabili $x$ afficiatur sive non afficiatur.

Aequationum differentialium (2.) systema vocabo *proprium*, quo distinguatur a systemate *proposito* aequationum differentialium (1.), cuius integratio componitur ex integratione systematis proprii et Quadratura. Si datus systematis propositi Multiplicator $M$ et ipse a variabili $x$ vacuus est, idem erit systematis proprii Multiplicator. Tum enim evanescente termino $\frac{\partial . MX}{\partial x}$, satisfaciet aequationum differentialium (1.) Multiplicator aequationi,

$$\frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} + \frac{\partial . MX_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0,$$

eadem autem aequatione definitur aequationum differentialium (2.) Multiplicator. Quoties igitur datus systematis propositi (1.) Multiplicator et ipse variabili $x$ vacat, systematis proprii ultima integratio ad Quadraturas revocari potest, sive quod idem est, ***systematis aequationum differentialium propositarum duae ultimae integrationes per Quadraturas absolvuntur.***

Vice versa si datur systematis proprii (2.) Multiplicator $N$, qui erit solarum variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ functio, idem erit systematis propositi (1.) Multiplicator. Evanescente enim termino $\frac{\partial . NX}{\partial x}$, functio $N$, quae huic aequationi satisfacere debet,

$$0 = \frac{\partial . NX_1}{\partial x_1} + \frac{\partial . NX_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial . NX_n}{\partial x_n},$$

etiam huic satisfaciet qua systematis propositi Multiplicator definitur,

$$0 = \frac{\partial . NX}{\partial x} + \frac{\partial . NX_1}{\partial x_1} \ldots . + \frac{\partial . NX_n}{\partial x_n}.$$

Inventis autem omnibus systematis proprii Integralibus,

$$4. \quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots . \quad f_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

ubi Constantes Arbitrariae $\alpha_1$ etc. dextram aequationum partem occupant, erit aequationum (2.) Multiplicator,

$$5. \quad N = \frac{1}{X_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots . \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Qui igitur systematis quoque propositi Multiplicator erit. Unde si systematis propositi datur Multiplicator $M$, variabilem $x$ implicans, simulque systema proprium complete integratum est, duo innotescunt systematis propositi Multiplicatores $M$ et $N$. Quibus cognitis, secundum §. 4. systematis propositi constabit Integrale,

$$6. \quad \frac{N}{M} = \frac{1}{MX_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots . \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = \text{Const.}$$

Quo Integrali dabitur $x$ per $x_1, x_2, \ldots x_n$, sive ope Integralium (4.) expressis $x_2, x_3, \ldots x_n$ per $x_1$, dabitur $x$ per $x_1$. Unde *si innotescit systematis propositi Multiplicator variabili $x$ affectus, post systematis proprii integrationem completam, non amplius opus erit Quadratura, quam formula* (3.) *poscebat ad inveniendum ipsius $x$ valorem per $x_1$ expressum.*

Fieri potest ut solo cognito systematis propositi Multiplicatore variabili $x$ affecto, absque ulla integratione eruantur systematis proprii unum plurave Integralia. Expressa enim per (4.) quantitate $\frac{X}{X_1}$ per $x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, in functione

$$\int \frac{X \partial x_1}{X_1},$$

post factam integrationem, Constantium $\alpha_1$, $\alpha_2$ etc. loco restituamus functiones $f_1$, $f_2$ etc., quo facto prodeat variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functio

$$\xi = \int \frac{X\, dx_1}{X_1} :$$

erit e (3.), designante $\alpha_n$ novam Constantem Arbitrariam,

$$x - \xi = \alpha_n$$

systematis propositi Integrale. Sit rursus variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ functio $N$ systematis proprii ideoque etiam systematis propositi Multiplicator, erit secundum §. 4. expressio generalis Multiplicatoris systematis propositi,

$$M = \Pi(x - \xi, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}) . N.$$

Cognito igitur valor ipsius $M$, variabili $x$ affecto, erit $\frac{\partial \log M}{\partial x}$ ipsarum $x - \xi$, $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ functio,

$$\frac{\partial \log M}{\partial x} = \Phi(x - \xi, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}).$$

Unde ponendo

$$7. \quad \frac{\partial \log M}{\partial x} = u,$$

atque ex hac aequatione quaerendo ipsius $x$ valorem per $u, x_1, x_2, \ldots x_n$ expressum, prodit

$$x = \xi + \psi(u, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}),$$

designante $\psi$ certam ipsarum $u, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ functionem. Quaerendo igitur e (7.) ipsius $x$ valorem per $u, x_1, x_2, \ldots x_n$ expressum, atque in ea expressione ipsius $u$ loco ponendo varios valores constantes arbitrarios, differentiae quantitatum provenientium erunt solarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones, ideoque Constantibus Arbitrariis aequiparatae suppeditabunt systematis proprii

Integralia. Methodus hic tradita semper succedit si non tantum $M$ sed etiam $\frac{\partial \log M}{\partial x}$ ipsam $x$ involvit atque $\psi$ non solius $u$ vel $\Phi$ non solius $x-\xi$ functio est. Quoties autem $\Phi = \frac{\partial \log M}{\partial x}$ solius $x-\xi$ functio est, erit $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ipsius $\Phi$ functio. Unde *e systematis propositi Multiplicatore cognito $M$ semper deducere licet absque integratione systematis proprii unum plurave Integralia, quoties* $\frac{\partial^2 \log M}{\partial x^2}$ *non ipsius* $\frac{\partial \log M}{\partial x}$ *functio est.* Similiter demonstratur, *cognito systematis propositi Integrali, variabili $x$ affecto, $v = \alpha$, designante $\alpha$ Constantem Arbitrariam, ex eo semper derivari posse unum plurave systematis proprii Integralia, nisi* $\frac{\partial v}{\partial x}$ *ipsius $v$ functio sit.* Nam cum esse debeat $v$ quantitatum $x-\xi, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ functio, ex aequatione $v = \alpha$ sequitur huiusmodi

$$x = \xi + \psi(\alpha, f_1, f_2, \ldots f_{n-1});$$

unde eruendo e $v = \alpha$ ipsius $x$ valore in eoque ponendo ipsius $\alpha$ loco varios valores constantes arbitrarios, differentiae expressionum provenientium Constantibus Arbitrariis aequiparatae suppeditabunt systematis proprii Integralia.

Ut habeatur exemplum quo systematis propositi Multiplicator variabili $x$ affectus innotescit ideoque post systematis proprii integrationem completam ipsa $x$ per $x_1, x_2, \ldots x_n$ absque Quadratura exprimitur, ponamus $X = 1$ simulque fieri

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = c,$$

designante $c$ quantitatem constantem; quod inter alia evenit, si $X_1$, $X_2$ etc. variabilium $x_1$, $x_2$ etc. functiones sunt lineares. Dabitur systematis propositi Multiplicator per formulam

$$\frac{d \log M}{dx} + c = 0, \text{ unde } M = e^{-cx}.$$

Hinc sequitur e (6.) sumendo logarithmos,

$$x = -\frac{1}{c} \log \left( \frac{1}{X_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right) + \text{Const.}$$

Cognitione igitur Multiplicatoris in hoc exemplo non reductionem aequationis differentialis ad Quadraturas sed Quadraturam lucramur.

Antecedentibus demonstratum est, *si aequationum differentialium* (1.), *in quibus $X$, $X_1$ etc. solarum $x_1, x_2, \ldots x_n$ functiones sunt, detur Multiplicator et ipse variabili $x$ vacans, duas postremas integrationes per Quadraturam absolvi; si Multiplicator variabili $x$ afficiatur, ultimam aequationem integralem ipsam sine Quadratura obtineri.* Quae propositio sic amplificatur.

Ponamus functiones $X_{m+1}$, $X_{m+2}$, .... $X_n$ vacuas esse a variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$, simulque $X$, $X_1$, .... $X_m$ nisi ab iisdem variabilibus vacuae sunt, certe satisfacere conditioni,

$$7. \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} .... + \frac{\partial X_m}{\partial x_m} = 0.$$

Eo casu aequationes differentiales propositae (1.) sic tractabuntur, ut primum aequationum differentialium inter solas $x_{m+1}$, $x_{m+2}$, .... $x_n$ locum habentium,

$$8. \quad dx_{m+1} : dx_{m+2} .... : dx_n = X_{m+1} : X_{m+2} .... : X_n,$$

quaerantur Integralia,

$$9. \quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad .... \quad f_{n-m-1} = \alpha_{n-m-1},$$

eorumque ope exprimantur variabiles $x_{m+1}$, $x_{m+2}$, .... $x_n$ per earum unam $x_{m+1}$; quibus factis superest ut integrentur aequationes differentiales inter ipsas $x$, $x_1$, .... $x_{m+1}$ locum habentes,

$$10. \quad dx : dx_1 .... : dx_{m+1} = X : X_1 .... : X_{m+1}.$$

Per conditionem (7.) constat, aequationum differentialium propositarum (1.) Multiplicatorem, a variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$ vacuum, eundem esse aequationum differentialium (8.) Multiplicatorem, et vice versa harum Multiplicatorem ipsarum quoque aequationum differentialium (1.) Multiplicatorem esse. Designante enim $M$ quantitatem a variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$ vacuam, sequitur e (7.),

$$\frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} .... + \frac{\partial . MX_m}{\partial x_m} = 0,$$

unde pro eiusmodi ipsius $M$ valore conditio ut $M$ aequationum (1.) sit Multiplicator,

$$\frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} .... + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0,$$

convenit cum conditione ut $M$ aequationum (8.) Multiplicator sit,

$$\frac{\partial . MX_{m+1}}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial . MX_{m+2}}{\partial x_{m+2}} .... + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0.$$

***Aequationum differentialium*** (10.) ***semper assignare licet Multiplicatorem.*** Nam cum ipsarum $x_{m+2}$, $x_{m+3}$, .... $x_n$ expressiones per $x_{m+1}$ e (9.) petitae ab ipsis $x$, $x_1$, .... $x_m$ vacuae sint, conditio (7.) valebit etiam post harum expressionum substitutionem. Qua substitutione cum $X_{m+1}$ in solius $x_{m+1}$ functionem abeat, valebit etiam aequatio (7.), si loco ipsarum $X_i$ ponitur $\frac{X_i}{X_{m+1}}$. Unde sequitur, ***aequationum differentialium*** (10.) ***Multiplicatorem esse*** $\frac{1}{X_{m+1}}$. Qua de re ***aequationum differentialium*** (10.) ***ultima integratio semper solis Quadraturis absolvitur.***

Si datur Multiplicator aequationum differentialium propositarum (1.), va-

riabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$ non affectus, idem erit aequationum (8.) Multiplicator, ideoque eo casu cum aequationum (8.) tum aequationum (10.) ultima integratio Quadraturis absolvitur. Iam vero sit aequationum differentialium propositarum (1.) datus Multiplicator $M$ variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$ affectus. Inventis aequationum differentialium (8.) Integralibus (9.), earum fit Multiplicator

$$N = \frac{1}{X_{m+1}} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{m+3}} \cdots \frac{\partial f_{n-m-1}}{\partial x_n}$$

idemque ex antecedentibus fit Multiplicator aequationum differentialium propositarum (1.). Quarum igitur cognitis duobus Multiplicatoribus $M$ et $N$, datur absque Quadratura Integrale

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{MX_{m+1}} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{m+3}} \cdots \frac{\partial f_{n-m-1}}{\partial x_n} = \text{Const.}$$

Quod substituendo ipsarum $x_{m+2}$, $x_{m+3}$, .... $x_n$ valores per $x_{m+1}$ exhibitos in aequationum (10.) Integrale abit. Harum aequationum praeterea vidimus ultimam integrationem Quadraturis absolvi. Unde propositis aequationibus differentialibus,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

in quibus functiones $X_{m+1}$, $X_{m+2}$, .... $X_n$ variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$ vacant simulque fit

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial X_m}{\partial x_m} = 0,$$

si datur Multiplicator et ipse variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_m$ vacans, duae integrationes per Quadraturas absolvuntur; si vero datus Multiplicator variabilibus $x$, $x_1$, .... $x_n$ afficitur, una aliqua aequatio integralis absque omni Quadratura constabit atque altera integratio Quadraturis efficietur.

Antecedentia exemplo esse possunt, ad aequationes differentiales integrandas e Multiplicatoris cognitione semper fructum aliquem percipi, etsi ultima integratio absque eius auxilio Quadraturis absolvi possit. Neque nessarium est ut in antecedentibus aequationes (4.) sint Integralia ipsarum aequationum differentialium (2.), vel aequationes (9.) sint Integralia ipsarum aequationum differentialium (8.). Nam secundum ea quae §. 12. tradidi, Constanti Arbitrariae post quamque novam integrationem accedenti valorem tribuere licet particularem quemcunque. Sufficit ut quaelibet aequatio $f_i = \text{Const.}$ sit Integrale aequationum differentialium quocunque modo transformatarum per aequationes integrales ante eam inventas,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_{i-1} = \alpha_{i-1},$$

in quibus ad dextram habentur quantitates constantes quaecunque particulares.

## Caput tertium.

# Theoria Multiplicatoris systematis aequationum differentialium ad varia exempla applicata.

### De Multiplicatore systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis.

### §. 14.

Aequationum differentialium systema, quo altissima quaeque variabilium dependentium differentialia per differentialia inferiora ipsasque variabiles exprimuntur, constat in systema redire aequationum differentialium primi ordinis, si cuiusque variabilis dependentis differentialia altissimo inferiora ipsis variabilibus adscribantur. Designantibus enim $x$, $y$ etc. variabilis independentis $t$ functiones, proponantur inter $t$, $x$, $y$ etc. aequationes differentiales,

$$1. \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B, \text{ etc.}$$

ipsaeque $A$, $B$ etc. non altioribus afficiantur differentialibus quam $(p-1)^{to}$ ipsius $x$, $(q-1)^{to}$ ipsius $y$ etc. Patet, habendo pro novis variabilibus dependentibus differentialia, quae *Lagrangiano* more per indices denoto,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \ldots \quad x^{(p-1)} = \frac{d^{p-1} x}{dt^{p-1}},$$

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \ldots \quad y^{(q-1)} = \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}}, \text{ etc.},$$

aequationibus differentialibus (1.) has alias substitui posse *primi* ordinis:

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} dt : dx : dx' \ldots : dx^{(p-2)} : dx^{(p-1)} \\ \quad : dy : dy' \ldots : dy^{(q-2)} : dy^{(q-1)} \text{ etc.} \\ = 1 : x' : x'' \ldots : x^{(p-1)} : A \\ \quad : y' : y'' \ldots : y^{(q-1)} : B \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Quibus in aequationibus variabilium numerus summam ordinum altissimorum differentialium in (1.) unitate superat.

Multiplicator aequationum differentialium primi ordinis (2.), cum quibus aequationes differentiales (1.) conveniunt, etiam a me in sequentibus appellabitur

aequationum (1.) Multiplicator. Unde ut omnia theoremata de Multiplicatore aequationum differentialium primi ordinis in duobus Capitibus praecedentibus in medium prolata ad Multiplicatores aequationum differentialium cuiuslibet ordinis (1.) applicentur, sufficit ut pro aequationibus ibi propositis,

$$3. \quad dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots : X_n,$$

sumantur aequationes (2.).

Si aequationes differentiales primi ordinis (2.) et (3.) inter se comparamus, videmus in illis specialitatem quandam formae locum habere, videlicet quantitates primis differentialibus proportionales, quae generaliter variabilium functiones sunt, maximam partem in ipsas abire variabiles, neque vero in eas quarum differentialibus proportionales ponuntur. Quo habitu speciali fit ut aequationum (2.) Multiplicator, quem aequationum (1.) quoque Multiplicatorem voco, definiatur formula quae, tantopere licet aucto in (2.) variabilium numero, non pluribus constat terminis, quam si ipsae primi ordinis fuissent aequationes differentiales propositae (1.). Consideremus enim formulam ad definiendum aequationum (3.) Multiplicatorem propositam §. 7. (4.),

$$(4.) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = -X \frac{d \log M}{dx}.$$

Si pro aequationibus (3.) sumimus aequationes (2.) fit $x = t$, $X = 1$; porro variabilibus $x_1$, $x_2$ etc. substituendae sunt

$$x,\ x',\ x'',\ \ldots\ x^{(p-2)},\ x^{(p-1)},$$
$$y,\ y',\ y'',\ \ldots\ y^{(q-2)},\ y^{(q-1)},\ \text{etc.};$$

functionibus denique $X_1$, $X_2$ etc. substituendae sunt quantitates

$$x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ x^{(p-1)},\ A,$$
$$y',\ y'',\ y''',\ \ldots\ y^{(q-1)},\ B,\ \text{etc.}$$

Iam in (4.), quoties est $X_i$ una e variabilibus $x$, $x_1$, $x_2$ etc., ab ipsa $x_i$ diversa, evanescit terminus $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$, uti generaliter fit si functio $X_i$ ipsam $x_i$ non implicat. Unde sumendo pro (3.) aequationes (2.), abit aggregatum (4.) in hanc expressionem simplicem,

$$5. \quad \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} + \text{etc.} = -\frac{d \log M}{dt}.$$

Hac formula Multiplicator $M$ definitur systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis (1.).

Sequitur e (5.), quoties simul ipsum $A$ a differentiali $(p-1)^{to}$ ipsius $x$, ipsum $B$ a differentiali $(q-1)^{to}$ ipsius $y$ etc. vacuum sit, sive generalius, *quoties aggregatum*

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} \text{ etc.}$$

*identice evanescat, statui posse* $M = 1$. Si aggregatum (5.) non identice evanescit, ad indagandum Multiplicatorem circumspiciendum erit differentiale completum, cui idem aggregatum sua sponte vel etiam per aequationes differentiales propositas aequetur.

Principium ultimi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium cuiuslibet ordinis applicatum.

§. 15.

Aequationum differentialium propositarum (1.) §. pr. Integralibus praeter unum omnibus inventis, quantitates

$$(A.) \quad \begin{cases} t,\ x,\ x',\ \ldots\ x^{(p-1)}, \\ y,\ y',\ \ldots\ y^{(q-1)} \text{ etc.} \end{cases}$$

omnes exprimere licet per duas $u$ et $v$, pro quibus sumere licet binas e quantitatibus (*A.*) vel earum functiones quaslibet. Differentialia $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, substituendo differentialibus $x^{(p)}$, $y^{(q)}$ etc. si opus est valores $A$, $B$ etc., et ipsa aequantur quantitatum $t$, $x$, $x'$ etc. functionibus. Quae functiones, Integralium inventorum ope per $u$ et $v$ expressae, si denotantur per

$$U = \frac{du}{dt}, \qquad V = \frac{dv}{dt},$$

dabitur inter $u$ et $v$ aequatio differentialis primi ordinis, ultima quae integranda restat,

$$1. \quad V\,du - U\,dv = 0.$$

Secundum ea quae §. 11. tradidi, cognito aequationum differentialium propositarum Multiplicatore $M$ erui potest factor $N$ qui eius ultimae aequationis differentialis (1.) laevam partem efficiat differentiale completum, quem *ultimum Multiplicatorem* appello. *Habendo enim, quod per Integralia inventa licet, quantitates* (*A.*) *pro functionibus ipsarum u et v Constantiumque Arbitrariarum quas Integralia implicant, earumque functionum formando Determinans* $\Delta$, *fit ultimus Multiplicator* $N = \Delta . M$.

*Principium ultimi Multiplicatoris*, quod propositione antecedente continetur, etiam sic concipi potest,

*diviso ultimae aequationis differentialis* (1.) *Multiplicatore per Determinans $\Delta$, conditionem Eulerianam pro Multiplicatore valentem transformari in aliam conditionem ab Integralibus reductioni adhibitis independentem, cui formulandae sufficiant solae aequationes differentiales propositae.*

Videlicet aequatio conditionalis, cui aequationis (1.) Multiplicator $N$ satisfacere debet, fit

$$\frac{\partial.NU}{\partial u}+\frac{\partial.NV}{\partial v}=0.$$

Quae ponendo

$$M=\frac{N}{\Delta}$$

et substituendo Constantibus Arbitrariis functiones quantitatum ($A$.) aequivalentes transformabitur in hanc,

$$\frac{d\log M}{dt}+\frac{\partial A}{\partial x^{(\rho-1)}}+\frac{\partial B}{\partial y^{(\varphi-1)}}\text{ etc.}=0,$$

cui formandae sufficiunt aequationes differentiales propositae (1.).

Sint $\Pi_1=0$, $\Pi_2=0$ etc. aequationes integrales reductioni adhibitae binaeque aequationes quibus $u$ et $v$ ab ipsis $t$, $x$, $x'$ etc. pendent, sive etiam aliae quaecunque aequationes cum illis aequivalentes: constat e Determinantium functionalium proprietatibus, *aequari $\Delta$ fractioni, cuius denominator sit functionum $\Pi_1$, $\Pi_2$ etc. Determinans formatum quantitatum* ($A$.) *respectu, numerator autem earundem functionum Determinans, quantitatum $u$ et $v$ Constantiumque Arbitrariarum respectu formatum.* Si pro $u$ et $v$ ipsae sumuntur $t$ et $x$, pro aequationibus $\Pi_1=0$, $\Pi_2=0$ etc. solae sumendae sunt aequationes integrales simulque $t$ et $x$ in binis Determinantibus formandis de numero variabilium tollendae sunt. Porro aequatio (1.) in hanc abit,

$$dx-Vdt=0,$$

ubi $V$ est ipsius $\frac{dx}{dt}$ valor, Integralium inventorum ope per $t$ et $x$ expressus. Si aequationes $\Pi_1=0$, $\Pi_2=0$ etc. inventae sunt per integrationem successivam, ita ut in quaque aequatione insequente, in qua nova accedit Constans Arbitraria, simul unius variabilis differentiale altissimum ad ordinem proxime inferiorem sit depressum, alterutrum Determinans in unicum terminum abit. Sic proposita unica aequatione differentiali $n^{ti}$ ordinis inter $t$ et $x$,

$$\frac{d^nx}{dt^n}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\ldots.\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

integratione successiva inventae sint aequationes,

$$2.\quad \begin{cases} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = f_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}, \alpha_1\right), \\ \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} = f_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}, \alpha_1, \alpha_2\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx}{dt} = f_{n-1}(t, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}), \end{cases}$$

in quibus $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_{n-1}$ sunt Constantes Arbitrariae: simpliciter erit

$$\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}},$$

cum alterum Determinans in ipsam unitatem abeat. Si functio $f$ ab ipso $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ vacuum est, fit aequationis differentialis propositae Multiplicator $= 1$. Quo igitur casu hoc eruitur ultimum Integrale:

$$\int \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} \{dx - f_{n-1}(t, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})\, dt\} = \text{Const.},$$

ubi quantitas sub integrationis signo, per $t$ et $x$ expressa, fit differentiale completum. Ut per solas $t$ et $x$ exprimatur valor producti

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}},$$

sufficit ut in eo ***successive*** substituantur differentialium $\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}$, $\frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}$, .... $\frac{dx}{dt}$ valores $f_2$, $f_3$, .... $f_{n-1}$.

**Formula symbolica qua Multiplicator systematis aequationum differentialium impliciti definiri potest.**

## §. 16.

Aequationes differentiales, e quibus petantur altissimorum differentialium valores,

$$1.\quad x^{(p)} = A, \quad y^{(q)} = B, \quad \text{etc.}$$

ponamus forma dari implicita,

$$2.\quad \varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \text{etc.}$$

E quibus aequationibus ut eruantur valores differentialium partialium

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}}, \quad \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}}, \quad \text{etc.},$$

quarum summa aequat ipsum $-\frac{d \log M}{dt}$, statuo

$$3.\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(p)}} = a, & \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(q)}} = a_1, \quad \text{etc.}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^{(p)}} = b, & \frac{\partial \psi}{\partial y^{(q)}} = b_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

nec non

$$4.\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(p-1)}} = \alpha, & \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(q-1)}} = \alpha_1, \quad \text{etc.}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^{(p-1)}} = \beta, & \frac{\partial \psi}{\partial y^{(q-1)}} = \beta_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

formoque aequationes

$$5.\quad \begin{cases} au + a_1 u_1 \text{ etc.} + \alpha v + \alpha_1 v_1 \text{ etc.} = 0, \\ bu + b_1 u_1 \text{ etc.} + \beta v + \beta_1 v_1 \text{ etc.} = 0. \end{cases}$$

Resolutione aequationum (5.) si determinantur $u$, $u_1$ etc. ut functiones lineares quantitatum $v$, $v_1$ etc., erit quod ex elementis calculi differentialis sequitur,

$$6.\quad \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} = \frac{\partial u}{\partial v}, \qquad \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1}, \quad \text{etc.}$$

unde prodit

$$7.\quad d \log M = -\left\{ \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \text{ etc.} \right\} dt.$$

Iam e formulis, quas de aequationum linearium resolutione et Determinantium proprietatibus tradidi, sequitur, *si in aequationibus linearibus* (5.) *ponatur*

$$8.\quad \begin{cases} \alpha\, dt = \delta a, & \alpha_1\, dt = \delta a_1, \quad \text{etc.}, \\ \beta\, dt = \delta b, & \beta_1\, dt = \delta b_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

*fieri*

$$9.\quad -\left\{ \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \text{ etc.} \right\} dt = \delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .$$

Unde formula, qua Multiplicator $M$ definitur, proponi potest hac forma *symbolica*,

$$10.\quad d \log M = \delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .$$

Cui formulae ea inest significatio ut variando per regulas notas ipsum $\lg \Sigma \pm a b_1 \ldots$ atque elementorum variationibus singulis substituendo valores (8.), obtineatur expressio ipsi $d \log M$ aequalis.

Si statuitur

$$11.\quad \begin{cases} \alpha\, dt - \lambda\, da = \Delta a, & \alpha_1\, dt - \lambda\, da_1 = \Delta a_1, \quad \text{etc.}, \\ \beta\, dt - \lambda\, db = \Delta b, & \beta_1\, dt - \lambda\, db_1 = \Delta b_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

characteristicae $\delta$ substituendum est $\lambda d + \Delta$, unde abit (10.) in hanc formulam,

$$12.\quad d \log M = \lambda\, d . \log \Sigma \pm a b_1 \ldots . + \Delta . \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .,$$

sive, designante $\lambda$ Constantem,

$$13.\quad d \log \frac{M}{\{\Sigma \pm a b_1 \ldots .\}^\lambda} = \Delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .$$

Quae formula cum commodo adhibetur, quoties variationum $\Delta a$, $\Delta b$ etc. valores valoribus variationum $\delta a$, $\delta b$ etc. simpliciores sunt.

Sint $n$ aequationes differentiales inter $t$ et variabiles dependentes $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ propositae,

$$14. \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots \quad \varphi_n = 0,$$

sintque altissima differentialia in iis obvenientia et quorum valores ex iis petere liceat,

$$x_1^{(m_1)}, \quad x_2^{(m_2)}, \quad \ldots \quad x_n^{(m_n)}.$$

Statuendo secundum antecedentia,

$$15. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = a_k^{(i)}, \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}} dt = \delta a_k^{(i)} = \lambda\, da_k^{(i)} + \Delta a_k^{(i)}, \end{cases}$$

fit

$$16. \quad \begin{cases} d \log M = \delta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)}, \\ d \log \dfrac{M}{\{\Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)}\}^\lambda} = \Delta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)}. \end{cases}$$

Accuratius examinemus casum quo fit

$$17. \quad a_k^{(i)} = a_i^{(k)},$$

unde elementa $a_k^{(i)}$ ad numerum $\frac{n(n+1)}{2}$ reducere licet. Differentialia partialia uncis includendo aut non includendo, prout ista reductio facta est aut non facta est, habetur, si $i$ et $k$ inter se diversi sunt,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right) = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}} + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}, \quad \left(\frac{\partial R}{\partial a_i^{(i)}}\right) = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(i)}}.$$

Designante $R$ Determinans

$$R = \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)},$$

constat per notas Determinantium proprietates, si aequationes (17.) locum habeant, etiam fieri

$$18. \quad \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}},$$

unde

$$19. \quad \left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right) = 2 \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}.$$

Cum in symbolis adhibitis variationes $\delta a_k^{(i)}$ vel $\Delta a_k^{(i)}$ ab ipsis $a_k^{(i)}$ independentes sint, ex aequationibus (17.) non etiam variationum aequalitas sequitur, unde in formanda Determinantis variatione pro diversis haberi debent $\delta a_k^{(i)}$ et $\delta a_i^{(k)}$ vel

$\Delta a_k^{(i)}$ et $\Delta a_i^{(k)}$, ideoque post institutam ipsius $R$ variationem demum aequationum (17.) usus faciendus est. At observandum est, in Determinantis variatione binorum elementorum $a_k^{(i)}$ et $a_i^{(k)}$ variationum tantum summam obvenire, cum per (18.) et (19.) habeatur,

$$\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\delta a_k^{(i)} + \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}}\delta a_i^{(k)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right)\{\delta a_k^{(i)} + \delta a_i^{(k)}\}.$$

Quae formula docet, in Determinante $R$ etiam ante eius variationem instituendam poni posse $a_k^{(i)} = a_i^{(k)}$, modo ipsi $\delta a_k^{(i)} = \delta a_i^{(k)}$ tribuatur valor $\frac{1}{2}\{\delta a_k^{(i)} + \delta a_i^{(k)}\}$. Quoties igitur aequationes (17.) locum habent sive fit

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i)}},$$

valebunt adhuc aequationes (16.), etsi Determinantis elementa ad numerum $\frac{n.n+1}{2}$ inter se inaequalium revocentur, dummodo statuatur

$$20. \quad \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i-1)}}\right\}.dt = \delta a_k^{(i)} = \lambda\, da_k^{(i)} + \Delta a_k^{(i)}.$$

***Quod si igitur aequationes differentiales propositae*** (14.) ***ita comparatae sunt, ut habeatur***

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i)}},$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i-1)}}\right\} dt = \lambda\, d.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}},$$

***designante $\lambda$ Constantem, evanescet variatio $\Delta$ dabiturque Multiplicator***

$$M = \left\{\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1^{(m_1)}} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2^{(m_2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n^{(m_n)}}\right\}^{\lambda}.$$

Cuius propositionis applicatio infra dabitur.

Observo ipsum $R$ pro Determinante functionali haberi posse; erit enim $R$ functionum $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ Determinans, si sola altissima differentialia $x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_2)}$, etc. pro variabilibus sumuntur quarum respectu Determinans formetur. Quarum variabilium valores cum supponamus ex aequationibus (14.) peti posse, non fieri potest ut Determinans $R$ identice evanescat; alioquin enim functiones $\varphi_1$, $\varphi_2$, etc. earum variabilium respectu non a se invicem independentes forent. V. ***Comm. de Det. Funct.*** §§. 3 sqq. Si vero per ipsas (14.) evanescit Determinans $R$, id indicio est, duo valorum variabilium systemata inter se aequalia evadere, unde aequationum praeparatione quadam opus est qua radicibus duplicibus liberentur.

Iam praecepta generalia variis applicabo exemplis.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium linearium.

## §. 17.

Proponantur aequationes differentiales lineares primi ordinis,

$$1.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A'_1 x_1 + A'_2 x_2 \ldots + A'_n x_n = X_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = A''_1 x_1 + A''_2 x_2 \ldots + A''_n x_n = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = A_1^{(n)} x_1 + A_2^{(n)} x_2 \ldots + A_n^{(n)} x_n = X_n, \end{cases}$$

quarum Coëfficientes $A_k^{(i)}$ solius $t$ functiones designant. Systematis aequationum (1.) Multiplicator $M$ definitur formula differentiali,

$$\frac{d \log M}{dt} = -\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} = -\{A'_1 + A''_2 \ldots + A_n^{(n)}\},$$

unde

$$2.\quad M = e^{-\int \{A'_1 + A''_2 \ldots + A_n^{(n)}\} dt}.$$

Hac formula cognito $M$, sequitur e §. 15., *si aequationes differentiales lineares* (1.) *per quascunque* $n-1$ *aequationes integrales,* $n-1$ *Constantibus Arbitrariis affectas, ad unicam aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles reducantur, eius quoque ultimae aequationis integrationem per Quadraturas absolvi posse.* Quod hactenus non constabat nisi aequationes quoque integrales reductioni adhibitae lineares erant.

Aequationibus (1.) alterum systema aequationum differentialium linearium coniugatum est,

$$3.\quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\{A'_1 y_1 + A''_1 y_2 \ldots + A_1^{(n)} y_n\}, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\{A'_2 y_1 + A''_2 y_2 \ldots + A_2^{(n)} y_n\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} = -\{A'_n y_1 + A''_n y_2 \ldots + A_n^{(n)} y_n\}. \end{cases}$$

Aequationibus (1.) respective per $y_1, y_2, \ldots y_n$ atque aequationibus (3.) respective per $x_1, x_2, \ldots x_n$ multiplicatis omniumque aequationum provenientium additione facta, termini ad dextram positi omnino abeunt, expressio ad laevam autem fit differentiale aggregati $x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n$; unde integratione facta eruitur,

$$4.\quad x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n = \text{Const.}$$

Quot habentur aequationum (3.) solutiones particulares, tot formula (4.) suppeditantur aequationum (1.) Integralia, et quot habentur solutiones particulares aequationum (1.), tot eadem formula suppeditantur aequationum (3.) Integralia. Aequationum (3.) Multiplicator invenitur

$$N = e^{\int \{A_1' + A_2'' \ldots + A_n^{(n)}\} dt},$$

unde ***binorum systematum aequationum differentialium linearium inter se coniugatorum Multiplicatores M et N valoribus reciprocis gaudent.***

Functionum $y_1, y_2, \ldots y_n$ denotemus $n$ systemata a se independentia per

$$y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots y_n^{(k)},$$

tribuendo successive indici superiori $k$ valores $1, 2, \ldots n$. Unde aequationum (1.) proveniunt $n$ Integralia huiusmodi,

$$f_k = x_1 y_1^{(k)} + x_2 y_2^{(k)} \ldots + x_n y_n^{(k)} = \alpha_k,$$

designantibus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ Constantes Arbitrarias. Secundum Multiplicatoris definitionem, initio huius Commentationis adhibitam, fit

$$5. \quad M = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm y_1' y_2'' \ldots y_n^{(n)}.$$

Unde obtinetur formula,

$$6. \quad \Sigma \pm y_1' y_2'' \ldots y_n^{(n)} = e^{-\int \{A_1' + A_2'' \ldots + A_n^{(n)}\} dt}.$$

Quae sic directe demonstratur.

Designante enim $R$ Determinans ad laevam, fit

$$dR = \Sigma\Sigma \frac{\partial R}{\partial y_i^{(k)}} dy_i^{(k)}$$
$$= -\Sigma\Sigma \frac{\partial R}{\partial y_i^{(k)}} \{A_i' y_1^{(k)} + A_i'' y_2^{(k)} \ldots + A_i^{(n)} y_n^{(k)}\} dt,$$

extensa duplici summatione ad omnes indicum $i$ et $k$ valores $1, 2, \ldots n$. Summando primum indicis $k$ respectu, evanescunt termini in $A_i'$, $A_i''$ etc. ducti praeter eos qui in $A_i^{(i)}$ ducuntur,

$$-A_i^{(i)} \left\{ \frac{\partial R}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial R}{\partial y_i''} y_i'' \ldots + \frac{\partial R}{\partial y_i^{(n)}} y_i^{(n)} \right\} dt$$
$$= -A_i^{(i)} . R\, dt,$$

sicuti notis Determinantium proprietatibus patet. Hinc altera summatio indicis $i$ respectu instituta suggerit,

$$dR = -\{A_1' + A_2'' \ldots A_n^{(n)}\} dt,$$

cuius aequationis integratione formula (6.) obtinetur.

Si aequationes differentiales lineares proponuntur quae altiora quam prima differentialia involvunt, secundum §. 14. (5.) statim earum quoque Multiplicator obtinetur. Brevitatis causa duas tantum consideremus aequationes,

$$7.\quad \begin{cases} \frac{d^p x}{dt^p} = Ax + A_1\frac{dx}{dt} \ldots + A_{p-1}\frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} \\ \qquad + Bx + B_1\frac{dy}{dt} \ldots + B_{q-1}\frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \\ \frac{d^q x}{dt^q} = A'x + A'_1\frac{dx}{dt} \ldots + A'_{p-1}\frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} \\ \qquad + B'y + B'_1\frac{dy}{dt} \ldots + B'_{q-1}\frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \end{cases}$$

in quibus Coëfficientes $A$, $A_1$ etc. solius $t$ functiones designant; fit earum aequationum Multiplicator,

$$M = e^{-\int\{A_{p-1}+B'_{q-1}\}dt}.$$

Ponamus, addendo aequationes (7.) respective per $\lambda$ et $\mu$ multiplicatas produci aequationem per se integrabilem: secundum conditiones integrabilitatis fieri debet,

$$8.\quad \begin{cases} \frac{d^p\lambda}{dt^p} = -\frac{d^{p-1}(A_{p-1}\lambda + A'_{p-1}\mu)}{dt^{p-1}} + \frac{d^{p-2}(A_{p-2}\lambda + A'_{p-2}\mu)}{dt^{p-2}} \ldots \pm(A\lambda + A'\mu), \\ \frac{d^q\mu}{dt^q} = -\frac{d^{q-1}(B_{q-1}\lambda + B'_{q-1}\mu)}{dt^{q-1}} + \frac{d^{q-2}(B_{q-2}\lambda + B'_{q-2}\mu)}{dt^{q-2}} \ldots \pm(B\lambda + B'\mu), \end{cases}$$

quod est aequationum differentialium systema proposito coniugatum. Quod, si $p$ et $q$ inter se inaequales sunt, non ea gaudet forma qua §. 14. supposui aequationes differentiales exhibitas esse, videlicet ut altissima differentialia inveniantur per inferiora ipsasque variabiles expressa. Si $p > q$, ut ea forma obtineatur, aequatio posterior $p-q-1$ vicibus iteratis differentianda est et aequationum ope provenientium eliminanda sunt e priore ipsius $\mu$ differentialia superiora $(q-1)^{to}$. Hac eliminatione priorem aequationem novi non ingrediuntur termini $(p-1)^{to}$ ipsius $\lambda$ differentiali affecti, unde in ea immutatus manet unicus terminus differentiale $\frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}$ implicans,

$$-A_{p-1}\frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}.$$

Porro in aequatione posteriore unicus extat terminus ipso $\frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}$ affectus,

$$-B'_{q-1}\frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}.$$

Unde secundum §. 14. aequationum (8.), dicto modo praeparatarum, eruitur Multiplicator

$$N = e^{\int \{A_{p-1} + B'_{q-1}\} dt}.$$

Videmus igitur, bina quoque systemata coniugata (7.) et (8.) Multiplicatoribus reciprocis gaudere. Similiter pro pluribus aequationibus demonstratur, in systemate coniugato per eliminationes, ad formam normalem obtinendam instituendas, hos non mutari terminos qui valorem ipsius $\frac{d \log N}{dt}$ afficiunt, unde facile sequitur, binorum systematum coniugatorum Multiplicatores semper evadere inter se reciprocos.

Observo, formam normalem aequationibus (8.) conciliari posse sine differentiationibus et eliminationibus, cum earum loco hoc pateat substitui posse systema aequationum differentialium linearium primi ordinis inter $p+q+1$ variabiles,

$$9. \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = -\{A_{p-1}\lambda + A'_{p-1}\mu + \lambda_1\}, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = -\{A_{p-2}\lambda + A'_{p-2}\mu + \lambda_2\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\lambda_{p-1}}{dt} = -\{A\lambda + A'\mu\}, \\ \frac{d\mu}{dt} = -\{B_{q-1}\lambda + B'_{q-1}\mu + \mu_1\}, \\ \frac{d\mu_2}{dt} = -\{B_{q-2}\lambda + B'_{q-2}\mu + \mu_2\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\mu_{q-1}}{dt} = -\{B\lambda + B'\mu\}. \end{cases}$$

Aequationes (9.) eodem gaudent Multiplicatore $N$ supra invento. Quod adnotari meretur. Nam valor supra inventus $N$ Multiplicatori aequationum (8.) conveniebat supponendo eas locum tenere aequationum differentialium primi ordinis, in quibus praeter $t$, $\lambda$, $\mu$ pro variabilibus habeantur

$$(A.) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt}, \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \cdots \frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}, \\ \frac{d\mu}{dt}, \frac{d^2\mu}{dt^2}, \cdots \frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}; \end{cases}$$

dum aequationes (9.) sunt inter $t$, $\lambda$, $\mu$ aliasque variabiles

$$(B.) \quad \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{p-1}, \\ \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{q-1}. \end{cases}$$

Aliis autem variabilibus introductis vidimus in secundo Capite mutari Multiplicatorem, videlicet cum dividi per novarum variabilium Determinans, ipsarum formatum variabilium respectu quarum loco introductae sunt. Unde, cum utrique aequationum systemati *idem* conveniat Multiplicator $N$, sequitur, si quantitates ($B$.) per $t$, $\lambda$, $\mu$ et quantitates ($A$.) exprimantur, Determinans quantitatum ($B$.), ipsarum ($A$.) respectu formatum, aequari Constanti, ac reapse aequale invenitur unitati.

### Aequationes differentiales secundi ordinis quarum assignare licet Multiplicatorem. Exempla *Eulcriana.*

### §. 18.

Paullo immorabor applicationi theoriae novi Multiplicatoris ad aequationes differentiales secundi ordinis inter duas variabiles, qui est casus simplicissimus post aequationes differentiales primi ordinis, ad quas *Eulerianus* Multiplicator refertur. Ac primum per theoremata §§. 14, 15 tradita patet,

„*si proponatur aequatio* $\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+B=0$, *in qua* $A$ *solius* $x$, $B$ *utriusque* $x$ *et* $y$ *functiones quaecunque sunt, atque integratione prima eruatur* $\frac{dy}{dx}=u$, *designante* $u$ *variabilium* $x$ *et* $y$ *et Constantis Arbitrariae* $\alpha$ *functionem, fore alterum Integrale,*

$$\int e^{\int A\,dx}.\frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy-u\,dx) = Const.$$"

Quantitatem sub maiore integrationis signo esse differentiale completum, sic verificari potest. Nam ut aequatio differentialis proposita proveniat differentiatione aequationis $\frac{dy}{dx}=u$, locum habere debet aequatio *identica,*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}+Au+B = 0.$$

Qua ipsius $\alpha$ respectu differentiata et per $e^{\int A\,dx}$ multiplicata prodit,

$$\frac{\partial.e^{\int A\,dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\partial x}+\frac{\partial.e^{\int A\,dx}u\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\partial y} = 0,$$

quae est conditio requisita, ut quantitas

$$e^{\int A\,dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy-u\,dx)$$

differentiale completum sit.

Generalius e §§. 14, 15 sequitur, *si proponatur aequatio,*

$$1. \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}+B=0,$$

*in qua et $\varphi$ et $B$ variabilium $x$ et $y$ functiones quaecunque sunt, atque integratione prima inventum sit $\frac{dy}{dx}=u$, designante $u$ variabilium $x$ et $y$ et Constantis Arbitrariae $\alpha$ functionem, fieri aequationem inter $x$ et $y$ quaesitam,*

$$2. \quad \int e^{\varphi}\frac{\partial u}{\partial\alpha}(dy-u\,dx) = \text{Const.}$$

Aequationis (1.) tractavit *Eulerus* specimina quibus ei integratio prima successit (Cf. Calc. Integr. Vol. I. Sect. I. Cap. VI. pgg. 162 sqq.). At aequationes differentiales primi ordinis, ad quas ea ratione pervenit, tanta irrationalitate erant implicatae, ut de integratione directa desperans alia artificia circumspexerit. Atque missum facto Integrali invento contigit ei, aequationes differentiales secundi ordinis propositas differentiando alias deducere lineares, Coëfficientibus constantibus affectas, quarum nota integratio propositarum quoque ei suppeditavit integrationem completam. At per antecedentem formulam (2.) illarum aequationum differentialium primi ordinis quamvis complicatarum assignare licet Multiplicatores. Adiungam ipsam variabilium separationem, qua elucescat, revera adiectis illis Multiplicatoribus aequationes sponte integrabiles fore.

Exempla *Euleriana* forma paullo generaliori exhibebo, quod sine calculi complicatione fieri potest.

Exemplum I.

$$y^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+by-cx=0.$$

($b$ et $c$ Constantes.)

Secundum *Eulerum* aequationis propositae fit Integrale primum, quod si placet differentiando comprobare licet,

$$y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+bxy^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(by-3cx)yy\frac{dy}{dx}$$
$$+cy^3+b^2y^2x-2bcyx^2+c^2x^3=\alpha,$$

designante $\alpha$ Constantem Arbitrariam. Cuius aequationis resolutione eruatur

$$y\frac{dy}{dx}=yu=v,$$

designante $v$ radicem aequationis cubicae

$$3. \quad v^3+bxv^2+y(by-3cx)v$$
$$+cy^3+b^2y^2x-2bcyx^2+c^2x^3=\alpha.$$

Comparando aequationem differentialem propositam cum (1.) fit

$$\varphi = 2\log y, \quad e^{\varphi} = y^2,$$

unde secundum (2.) invenitur alterum Integrale

$$\int y^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy - u\,dx) = \int \frac{\partial v}{\partial \alpha}(y\,dy - v\,dx) = \text{Const.}$$

Fit autem e (3.)

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{3vv + 2bxv + y(by - 3cx)}.$$

Quem aequationis $y\,dy - v\,dx = 0$ Multiplicatorem esse, propter ipsius $v$ irrationalitatem non facile cognoscitur, et minus adhuc separatio variabilium in promtu est. Quam sic assequor.

Aequationem (3.) bene vidit ***Eulerus*** hac ratione exhiberi posse,

$$4. \quad f.f'.f'' = \alpha,$$

posito

$$5. \quad \begin{cases} f = v + \lambda y + \frac{c}{\lambda} x, \\ f' = v + \lambda' y + \frac{c}{\lambda'} x, \\ f'' = v + \lambda'' y + \frac{c}{\lambda''} x, \end{cases}$$

designantibus $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ radices diversas aequationis cubicae,

$$6. \quad \lambda^3 + b\lambda - c = 0,$$

unde $\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0$, $\lambda\lambda'\lambda'' = c$. Ex aequationibus (4.) et (5.) sequitur

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f''}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{1}{f'f'' + f''f + ff'},$$

unde expressio

$$\frac{y\,dy - v\,dx}{f'f'' + f''f + ff'}$$

fieri debet differentiale completum. Invenitur autem e (5.):

$$\begin{aligned} d(f' - f'') &= (\lambda' - \lambda'')(dy - \lambda\,dx), \\ d(f'' - f) &= (\lambda'' - \lambda)(dy - \lambda' dx), \\ d(f - f') &= (\lambda - \lambda')(dy - \lambda'' dx), \\ \lambda f.d(f' - f'') + \lambda' f'.d(f'' - f) + \lambda'' f''.d(f - f') &= \\ = \Lambda.(y\,dy - v\,dx), & \end{aligned}$$

siquidem ponitur

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda^2(\lambda' - \lambda'') + \lambda'^2(\lambda'' - \lambda) + \lambda''^2(\lambda - \lambda') \\ &= (\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')(\lambda' - \lambda'') = 0, \end{aligned}$$

atque adnotatur fieri

$$\lambda^3(\lambda'-\lambda'')+\lambda'^3(\lambda''-\lambda)+\lambda''^3(\lambda-\lambda') = \Delta(\lambda+\lambda'+\lambda'') = 0.$$

Hinc substitutendo $\lambda''=-(\lambda+\lambda')$ fit

$$\Delta(y\,dy-v\,dx) = \lambda\{(f+f')df-d.ff'\} - \lambda'\{(f'+f')df-d.ff'\},$$

unde denuo substituendo, quod e (4.) sequitur,

$$d.ff' = -f'.\frac{df'}{f'}, \quad d.f'f'' = -f'f''.\frac{df}{f},$$

eruitur

$$\frac{y\,dy-v\,dx}{f'f''+f''f+ff'} = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\lambda\,df'}{f'}-\frac{\lambda'\,df}{f}\right\}.$$

Quod per se integrabile est atque nihilo aequiparatum integratumque suppeditat:

$$\frac{\log f}{\lambda}-\frac{\log f'}{\lambda'} = \text{Const.},$$

quod alterum Integrale est.

## Exemplum II.

$$2y^3\frac{d^2y}{dx^2}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-ay^2+bx^2-c=0.$$

(*a*, *b*, *c* Constantes.)

Secundum ***Eulerum*** huius aequationis integratione prima obtinetur $y\,dy-v\,dx=0$, designante $v$ radicem aequationis biquadraticae,

$$7. \quad (aa-4b)y^2-2(abx^2+av^2-4bxv)+\left(\frac{c-bx^2+v^2}{y}\right)^2 = \alpha,$$

atque $\alpha$ Constantem Arbitrariam. Comparando aequationem differentialem propositam cum (1.) fit

$$\varphi = \log y, \quad e^{\varphi} = y,$$

unde e (2.) eruitur aequatio integralis inter $x$ et $y$ quaesita,

$$\int y\frac{\partial u}{\partial \alpha}\{dy-u\,dx\} = \int\frac{\partial v}{\partial \alpha}.\frac{y\,dy-v\,dx}{y} = \text{Const.}$$

Ponamus $a=\lambda+\lambda'$, $b=\lambda\lambda'$, abit (7.) in hanc formam,

$$8. \quad (\lambda-\lambda')^2y^2-2\{\lambda(v-\lambda'x)^2+\lambda'(v-\lambda x)^2\} + \left\{\frac{c-\lambda\lambda'x^2+v^2}{y}\right\}^2 = \alpha.$$

Ponatur

$$9. \quad v-\lambda'x = (\lambda-\lambda')p, \quad v-\lambda x = (\lambda'-\lambda)p',$$

unde

$$10.\quad \begin{cases} x = p+p', \quad v = \lambda p+\lambda' p', \\ \sqrt{\lambda}.p+\sqrt{\lambda'}.p' = \dfrac{v+\sqrt{(\lambda\lambda')}x}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda'}}, \quad \sqrt{\lambda}.p-\sqrt{\lambda'}.p' = \dfrac{v-\sqrt{(\lambda\lambda')}x}{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'}}; \end{cases}$$

abit (8.) in hanc aequationem,

$$11.\quad y^2+\left\{\frac{c}{\lambda-\lambda'}+\lambda p^2-\lambda' p'^2\right\}^2\frac{1}{y^2} = 2\left\{\lambda p^2+\lambda' p'^2+\frac{\alpha}{2(\lambda-\lambda')^2}\right\}.$$

Hinc fit

$$12.\quad y = \sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')},$$

siquidem ponitur

$$13.\quad \varepsilon = \frac{\alpha}{4(\lambda-\lambda')^2}+\frac{c}{2(\lambda-\lambda')}, \quad \varepsilon' = \frac{\alpha}{4(\lambda-\lambda')^2}+\frac{c}{2(\lambda'-\lambda)}.$$

E formulis (9.) et (13.) sequitur

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = -\frac{\partial p'}{\partial \alpha} = \frac{1}{\lambda-\lambda'}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \alpha} = \frac{1}{4(\lambda-\lambda')^2};$$

unde e (12.) obtinetur,

$$14.\quad \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{8(\lambda-\lambda')\{\lambda' p'\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}-\lambda p\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')}\}},$$

qui fieri debet Multiplicator aequationis $y\,dy-v\,dx=0$. Ac reapse invenitur e (10.) et (12.),

$$\begin{aligned} y\,dy-v\,dx &= \left\{\frac{\lambda p\,dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}}+\frac{\lambda' p'\,dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')}}\right\}\{\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')}\} \\ &\quad -\{\ dp\ +\ dp'\ \}\{\ \lambda p\ +\ \lambda' p'\ \} \\ &= \{\lambda p\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p)}-\lambda' p'\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}\}\left\{\frac{dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}}-\frac{dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')}}\right\}. \end{aligned}$$

Unde per factorem (14.) atque substitutionem (9.) aequationem differentialem, $y\,dy-v\,dx=0$, in aliam mutamus, in qua variabiles separatae sunt,

$$\frac{dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}}-\frac{dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')}} = 0.$$

Cuius integratione prodit:

$$\frac{\{\sqrt{\lambda}.p+\sqrt{(\varepsilon+\lambda p p)}\}^{\sqrt{\lambda'}}}{\{\sqrt{\lambda'}.p'+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p' p')}\}^{\sqrt{\lambda}}} = \text{Const.}$$

Ponendo autem

$$(\gamma\lambda+\gamma\lambda')y+v+\gamma(\lambda\lambda')x = A,$$
$$(\gamma\lambda-\gamma\lambda')y+v-\gamma(\lambda\lambda')x = B,$$
$$(\gamma\lambda-\gamma\lambda')y-v+\gamma(\lambda\lambda')x = C,$$

fit e (10.) et (11.) post calculos faciles,

$$\gamma\lambda\,.p+\gamma(\varepsilon+\lambda p p) = \frac{AB+c}{2(\lambda-\lambda')y},$$
$$\gamma\lambda'.p+\gamma(\varepsilon'+\lambda' p' p') = \frac{AC-c}{2(\lambda-\lambda')y}.$$

Unde aequatio integralis inventa sic exhiberi potest,

$$\frac{(AB+c)^{\gamma\lambda'}}{(AC-c)^{\gamma\lambda}} = \beta.y^{\gamma\lambda'-\gamma\lambda},$$

ubi $\beta$ est nova Constans Arbitraria atque quantitas $v$, quae ipsas $A$, $B$, $C$ afficit, est radix aequationis biquadraticae (7.), porro $\lambda$ et $\lambda'$ sunt radices diversae aequationis quadraticae $\lambda^2-a\lambda+b=0$.

Integrationem his duobus exemplis praestitam etiam assequi licuisset ponendo cum *Eulero* $dx=y\,dt$, et aequationem differentialem secundi ordinis exemplo primo propositam *semel*, exemplo secundo propositam *bis* differentiando, ita ut $t$ pro variabili independente habeatur. Quo facto respective pervenitur ad aequationes differentiales lineares tertii et quarti ordinis, quae Coëfficientibus gaudent constantibus notisque methodis integrantur.

### De Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium quod mediante solutione completa unius aequationis differentialis partialis primi ordinis integratur.

### §. 19.

Systema aequationum differentialium vulgarium proponatur hoc,

$$1.\quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt}=-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right\}, \\ \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt}=-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, & \frac{dp_n}{dt}=-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right\}, \\ \frac{dV}{dt}=p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\ldots\ldots+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, \end{cases}$$

ubi $\varphi$ est functio quaecunque quantitatum $q_1$, $q_2$, .... $q_n$, $V$, $p_1$, $p_2$, .... $p_n$. Designante $M$ aequationum (1.) Multiplicatorem, secundum formulas nostras gerales fit

$$\frac{d\log M}{dt} = -\Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial q_i} + \Sigma\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_i} + p_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial V\partial p_i}\right\} + n\frac{\partial\varphi}{\partial V} - \frac{\partial\left\{p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\right\}}{\partial V},$$

tribuendo indici $i$ valores $1, 2, \ldots n$. Unde reiectis terminis se destruentibus obtinetur,

$$2. \quad \frac{d\log M}{dt} = n\frac{\partial\varphi}{\partial V}.$$

Quae evanescit expressio si $\varphi$ ipsa $V$ vacat. ***Quoties igitur functio $\varphi$ ab ipsa $V$ vacua est, aequationum*** (1.) ***Multiplicatorem unitati aequare licet.***

Aequationum (1.) habetur Integrale unum,

$$3. \quad \varphi = h,$$

designante $h$ Constantem. In ea aequatione ponatur

$$4. \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n},$$

obtinetur aequatio differentialis partialis primi ordinis, in qua $V$ est functio quaesita atque $q_1, q_2, \ldots q_n$ sunt variabiles independentes. Faciamus inventam esse eius aequationis differentialis partialis solutionem ***quamcunque $V$,*** dico aequationes (4.) totidem esse aequationes integrales, quibus aequationes differentiales vulgares (1.) gaudere possint. Nam differentiando ex. gr. earum primam $\frac{\partial V}{\partial q_1} - p_1 = 0$ et substituendo aequationes differentiales (1.) prodit,

$$5. \quad \Sigma\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial\varphi}{\partial V} = 0.$$

Cui aequationi satisfit substituendo ipsorum $p_1, p_2$, etc. valores (4.). Nimirum e suppositione facta aequatio (3.) identica evadit substituendo (4.) solutionisque $V$ valorem, eam autem aequationem identicam ipsius $q_1$ respectu differentiando prodit aequatio in quam abit (5.) per aequationes (4.). ***Itaque aequationes*** (4.) ***una cum ipsa aequatione, qua $V$ per $q_1, q_2, \ldots q_n$ definiri ponitur, constituunt systema $n+1$ aequationum integralium idque tale e quo differentiando ipsasque aequationes differentiales propositas substituendo deducere non licet aequationes integrales novas.*** Scilicet aequationes provenientes (5.) per illas $n+1$ aequationes identicas fieri vidimus.

Constans $h$ ubi servat significationem generalem ingredi debet solutionem quamcunque $V$ unde, data $V$, differentiale quoque partiale $\frac{\partial V}{\partial h}$ assignare licebit, quod per $z$ designabo. Erit per (1.), (3.), (4.),

$$6. \quad \frac{dz}{dt} = \Sigma\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial h} - \frac{\partial\varphi}{\partial V}z = 1 - \frac{\partial\varphi}{\partial V}z.$$

Si solutio $V$ aliquam involvit Constantem Arbitrariam $\alpha$ atque ponitur $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = y$, similiter erit

$$7. \quad \frac{dy}{dt} = \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial V} y = -\frac{\partial \varphi}{\partial V} y.$$

Scilicet functio $\varphi$, substituendo datam solutionem $V$ atque ponendo $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, identice aequatur Constanti $h$ ideoque post eam substitutionem differentiata ipsius $h$ respectu unitati aequatur, differentiata ipsius $\alpha$ respectu evanescit. E (2.) et (7.) sequitur,

$$d \log M = -n d \log y,$$

ideoque fit

$$8. \quad y^n M = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^n M = \beta,$$

designante $\beta$ Constantem. Haec formula docet, Multiplicatori $M$ competere valorem qui per aequationes integrales (3.) et (4.) aequetur quantitati $\left\{\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right\}^{-n}$. Observo adhuc, e binis formulis (6.) et (7.) sequi

$$y\,dz - z\,dy = y\,dt,$$

unde, designante $U$ functionem quantitatum $y$ et $z$ homogeneam rationalem $(-1)^{ti}$ ordinis, assignari poterit integrale $\int U\,dt$. Si solutio $V$ plures Constantes Arbitrarias involvit, totidem habebuntur aequationes (8.), binarumque divisione obtinebuntur aequationes integrales, inventis (3.) et (4.) accedentes. Si functio $\varphi$ ab ipsa $V$ vacua est ideoque $M = 1$, aequationes (8.) per se sunt aequationes integrales.

Si habetur solutio *completa* $V = F$, $n$ Constantes Arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ involvens, poniturque $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = u_i$, fit systema aequationum integralium completarum,

$$9. \quad \begin{cases} F - V = 0, & \frac{\partial F}{\partial q_1} - p_1 = 0, & \frac{\partial F}{\partial q_2} - p_2 = 0, & \ldots & \frac{\partial F}{\partial q_n} - p_n = 0, \\ & \frac{u_1}{u_n} - \beta_1 = 0, & \frac{u_2}{u_n} - \beta_2 = 0, & \ldots & \frac{u_{n-1}}{u_n} - \beta_{n-1} = 0, \end{cases}$$

designantibus $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ alias Constantes Arbitrarias. Si ex his aequationibus petuntur valores quantitatum $h$, $\alpha_i$, $\beta_i$, atque functionum iis aequivalentium formantur Determinantia *partialia*, in quibus una quantitatum $q_i$, $p_i$, $V$ pro Constante, reliquae pro variabilibus habentur, ea aequare debent quantitates ad dextram aequationum differentialium (1.) positas, in *Multiplicatorem* ductas. Supersedere resolutioni aequationum (9.) et immediate functionum $F - V$, $\frac{\partial F}{\partial q_1} - p_1$ etc. sumere possumus Determinantia partialia,

dummodo ea dividimus per earundem functionum Determinans, quantitatum $h$, $\alpha_i$, $\beta_i$ respectu formatum. Qua de re Cap. I. egi. Determinantia functionalia hic obvenientia in alia simpliciora redeunt, propterea quod quantitates $V$, $p_1$, $p_2$, .... $p_n$ tantum in $n+1$ prioribus aequationum (9.), quantitates $\beta_1$, $\beta_2$, .... $\beta_{n-1}$ tantum in $n-1$ posterioribus, singulae in singulis reprehenduntur. Sic Determinans, quantitatum $h$, $\alpha_i$, $\beta_i$ respectu formatum, quod per $\nabla$ designabo, aequatur Determinanti functionum ab ipsis $\beta_i$ vacuarum,

$$F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

solarum $h$ et $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$ respectu formato. Determinans partiale, in quo $q_n$ pro Constante habetur et quod per $(q_n)$ designabo, aequatur Determinanti functionum

$$\frac{u_1}{u_n}, \frac{u_2}{u_n}, \ldots\ldots \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

formato solarum respectu $q_1$, $q_2$, .... $q_{n-1}$. Per theorema autem in Comment. ***de Determinantibus functionalibus*** comprobato, quod Determinantia spectat functionum communi denominatore praeditarum, fit

$$(q_n) = u_n^{-n} Q_n = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^{-n} Q_n,$$

posito

$$Q_n = \Sigma \pm \frac{\partial u_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial q_2} \ldots\ldots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_{n-1}} u_n,$$

ubi formantur Determinantis $Q_n$ termini permutando omnimodis functiones $u_1$, $u_2$, .... $u_n$. Substituendo autem valores $u_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}$ et differentiationum ordinem invertendo sequitur, ***Determinans $Q_n$ fieri Determinans functionum***

$$F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial q_{n-1}},$$

***quantitatum $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$ respectu formatum.*** Iam aequationem identicam,

$$\varphi\left(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n, F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial q_n}\right) = h,$$

differentiando respectu quantitatum $h$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_n$, quibus ipsae $F$, $\frac{\partial F}{\partial q_1}$ etc. afficiuntur, scribendoque $V$ et $p_i$ ipsarum $F$ et $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ loco, obtinentur inter incognitas $\frac{\partial \varphi}{\partial V}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$ aequationes $n+1$ lineares, quarum resolutione invenitur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = \frac{Q_n}{\nabla},$$

unde

$$\frac{(q_n)}{\nabla} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$$

Eadem ratione generaliter, ubi vocamus $(q_i)$ functionum (9.) Determinans partiale in quo $q_i$ pro Constante habetur, invenitur

$$10. \quad \frac{(q_i)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}.$$

Vocando $W$ functionum

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n}$$

Determinans, quantitatum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ respectu formatum, earundem $n+1$ aequationum linearium resolutione eruitur,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{W}{\nabla}.$$

Functionum (9.) Determinans partiale $(p_n)$, in quo $p_n$ pro Constante habetur, aequatur Determinanti functionum

$$\frac{\partial F}{\partial q_n}, \quad \frac{u_1}{u_n}, \quad \frac{u_2}{u_n}, \quad \ldots \quad \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_n$ respectu formato. Invertendo autem ordinem differentiationum in differentialibus ipsius $\frac{\partial F}{\partial q_n}$ atque similes adhibendo formulas earum quibus supra $(q_n)$ ad $Q_n$ revocavi, redit $\mathfrak{u}_n(p_n)$ in differentiam Determinantis $P_n$ functionum

$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

quantitatum $q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ respectu formati, atque Determinantis functionalis modo adhibiti $W$ per $\frac{\partial F}{\partial q_n}$ multiplicati, sive fit

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^n (p_n) = P_n - \frac{\partial F}{\partial q_n} . W = P_n - p_n W.$$

Adiiciendo autem $n+1$ aequationibus linearibus commemoratis aliam provenientem ex aequatione $\varphi = h$, quantitatis $q_n$ respectu differentiata, eruitur per eliminationem quantitatum $\frac{\partial \varphi}{\partial V}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$,

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + P_n = 0.$$

Unde fit

$$\frac{(p_n)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \left\{\frac{P_n}{\nabla} - p_n \frac{W}{\nabla}\right\} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right\};$$

eademque ratione obtinetur generaliter, ubi $(p_i)$ est functionum (9.) Determinans partiale in quo habetur $p_i$ pro Constante,

$$11. \quad \frac{(p_i)}{\nabla} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right\}.$$

Quae paullo difficiliora erant indagatu. Postremo functionum (9.) Determinans partiale $(V)$, in quo habetur $V$ pro Constante, aequale erit functionum

$$F,\ \frac{u_1}{u_n},\ \frac{u_2}{u_n},\ \ldots.\ \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

Determinanti, quantitatum $q_1, q_2, \ldots. q_n$ respectu formato. Quod adhibendo notationem supra traditam fieri patet

$$(V) = \frac{\partial F}{\partial q_1}(q_1) + \frac{\partial F}{\partial q_2}(q_2) \ldots. + \frac{\partial F}{\partial q_n}(q_n),$$

unde secundum (10.) invenitur:

$$12.\quad \frac{(V)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \left\{p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \ldots. + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\right\}.$$

Formulae (10.), (11.), (12.) docent, functionum ad laevam aequationum (9.) positarum Determinantia partialia aequari quantitatibus ad dextram aequationum differentialium (1.) positis, per factorem communem $\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$ multiplicatis. Ea Determinantia partialia autem sunt ut differentialia $dq_i$, $dp_i$, $dV$. Unde antecedentibus continetur demonstratio directa, aequationes differentiales propositas e formulis (9.) differentiatis per aequationum linearium resolutionem fluere easque Multiplicatore gaudere $\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$, qualis e formula (8.) obtinebatur. Quam demonstrationem hic breviter indicasse placuit, cum ad illustrandam Determinantium theoriam faciat.

Casu quo $\varphi$ ab ipsa $V$ vacua est cum cognitus sit Multiplicator, videamus, quid sit quod ea cognitione lucremur in exemplo simplicissimo quo $n = 2$. Tributo Constanti $h$ valore particulari, substituamus aequationi $\varphi = h$ aliam qua ipsius $p_2$ valor per $q_1$, $q_2$, $p_1$ exhibetur, ita ut aequationes differentiales proponantur sequentes,

$$13.\quad dq_1 : dq_2 : dp_1 = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} : -1 : -\frac{\partial p_2}{\partial q_1}.$$

Quarum Multiplicatorem patet *unitati* aequari, cum summa differentialium quantitatum ad dextram, respective secundum $q_1$, $q_2$, $p_1$ sumtorum, evanescat. Unde si post primam integrationem exprimitur $p_1$ per $q_1$, $q_2$ et Constantem Arbitrariam $\alpha$, secundum principium ultimi Multiplicatoris fit alterum Integrale,

$$14.\quad \int \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left\{dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} dq_2\right\} = \text{Const.}$$

Sub integrationis signo haberi differentiale completum, e *Lagrangiana* aequationum differentialium partialium theoria sic probatur. Nam cum expressis $p_1$ et $p_2$ per $q_1$ et $q_2$ fieri debeat $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ differentiale completum atque $p_2$ per

$q_1$, $q_2$, $p_1$ expressum detur, pro $p_1$ talis sumi debet quantitatum $q_1$ et $q_2$ functio quae satisfaciat conditioni,

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0.$$

Qualem functionem, e theoria aequationum differentialium partialium primi ordinis *linearium* constat, e quocunque Integrali aequationum differentialium vulgarium (13.) erui. Quod ubi Constantem Arbitrariam $\alpha$ implicat, eandem implicabunt valores ipsarum $p_1$ et $p_2$ per $q_1$ et $q_2$ exhibiti, qui expressionem $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ integrabilem reddebant. Quae secundum Constantem $\alpha$ differentiata rursus prodire debet expressio integrabilis, sive expressio

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_2 = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left\{ dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} dq_2 \right\}$$

evadere debet differentiale completum. Q. D. E. Simul videmus, Integrale (14.) obtineri aequiparando novae Constanti Arbitrariae differentiale partiale solutionis $V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2\}$, ipsius $\alpha$ respectu sumtum, id quod cum supra expositis convenit.

**De Multiplicatore aequationum differentialium vulgarium systematis quod mediante solutione completa problematis *Pfaffiani* integratur. Conditiones ut aequatio differentialis vulgaris linearis primi ordinis inter $p$ variabiles per pauciores quam $\frac{1}{2}p$ aequationes integrari possit.**

## §. 20.

Problema ***Pfaffianum*** voco integrationem singularis aequationis differentialis linearis primi ordinis inter numerum variabilium parem per semissem aequationum finitarum numerum. Sit aequatio differentialis singularis proposita,

$$1. \quad 0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2m} dx_{2m},$$

designantibus $X_1$, $X_2$ etc. variabilium $x_1$, $x_2$, .... $x_{2m}$ functiones quascunque. Qua integrata per numerum $m$ aequationum, totidem Constantibus Arbitrariis affectarum, demonstravi *Diar. Crell. Vol. XVII. pgg. 148 sqq.*, praestari integrationem completam systematis aequationum differentialium sequentis,

$$2. \quad \begin{cases} X_1 dt = * + a_{1,2} dx_2 + a_{1,3} dx_3 \ldots + a_{1,2m} dx_{2m}, \\ X_2 dt = -a_{1,2} dx_1 * + a_{2,3} dx_3 \ldots + a_{2,2m} dx_{2m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{2m} dt = -a_{1,2m} dx_1 - a_{2,2m} dx_2 \ldots\ldots\ldots\ldots * \end{cases}$$

ubi

$$3. \quad a_{i,k} = -a_{k,i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \quad a_{i,i} = 0.$$

Dedi in *Diario Crell. Vol. II. pgg. 354 sqq.* resolutionem algebraicam generalem aequationum linearium ad instar aequationum (2.) formatarum. Cuius ope exhibitis aequationibus differentialibus forma proportionum nobis usitata,

$$4. \quad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_{2m} = A_1 : A_2 \ldots : A_{2m},$$

investigemus formulam qua aequationum (4.) Multiplicator definiatur sive valorem expressionis

$$5. \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = -A_i \frac{d \log M}{dx_i}.$$

Auspicabor ab aequationum linearium (2.) resolutione quae sic proponi potest.

Deriventur de producto

$$a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots . a_{2m-1,2m}$$

alii similes termini, mutando indices $2, 3, \ldots . 2m-1, 2m$ respective in $3, 4, \ldots . 2m, 2$, eandemque indicum commutationem repetendo, donec ad terminum primitivum reditur, id quod suggerit $2m-1$ terminos diversos. Ea ratione, indicum certo ordine proposito, si quisque eorum in proxime sequentem, ultimus in primum mutatur idque repetitur dum ad ordinem indicum primitivum reditur, dicam *indices cyclum percurrere.* Postquam e producto proposito $2m-1$ termini deducti sunt per cyclum, quem indices $2, 3, \ldots . 2m$ fecimus percurrere, rursus in eorum terminorum unoquoque ponamus indices $2m-3$ postremos cyclum percurrere, unde nanciscimur terminorum numerum $(2m-1)(2m-3)$. In eorum terminorum unoquoque rursus ponamus indices $2m-5$ postremos cyclum percurrere, erit terminorum diversorum provenientium numerus totalis $(2m-1)(2m-3)(2m-5)$. Ita pergendo donec postremo soli tres indices postremi cyclum percurrant, producta $3.5 \ldots . (2m-1)$ ex uno proposito deducta erunt, quorum omnium aggregatum $R$ vocemus. Sit ex. gr. $m = 3$, erit $R$ aggregatum *quindecim* terminorum,

$$\begin{aligned}
&a_{1,2}\, a_{3,4}\, a_{5,6} + a_{1,2}\, a_{3,5}\, a_{6,4} + a_{1,2}\, a_{3,6}\, a_{4,5} \\
+\, &a_{1,3}\, a_{4,5}\, a_{6,2} + a_{1,3}\, a_{4,6}\, a_{2,5} + a_{1,3}\, a_{4,2}\, a_{5,6} \\
+\, &a_{1,4}\, a_{5,6}\, a_{2,3} + a_{1,4}\, a_{5,2}\, a_{3,6} + a_{1,4}\, a_{5,3}\, a_{6,2} \\
+\, &a_{1,5}\, a_{6,2}\, a_{3,4} + a_{1,5}\, a_{6,3}\, a_{4,2} + a_{1,5}\, a_{6,4}\, a_{2,3} \\
+\, &a_{1,6}\, a_{2,3}\, a_{4,5} + a_{1,6}\, a_{2,4}\, a_{5,3} + a_{1,6}\, a_{2,5}\, a_{3,4},
\end{aligned}$$

quorum quinque in prima verticali ex eorum uno derivantur, identidem mutando indices 2, 3, 4, 5, 6 in 3, 4, 5, 6, 2; terni iuxta positi indicibus tribus posterioribus cyclum percurrentibus ex uno eorum fluunt. Aggregatum $R$ fit denominator communis expressionum algebraicarum quibus valores incognitarum exhibentur. Numeratorum autem Coëfficientes, qui ducuntur in terminos ad laevam aequationum linearium constitutos, sunt ipsius $R$ differentialia, quantitatum $a_{i,k}$

respectu sumta, ita ut aequationum (2.) resolutione proveniant valores,

$$5^*. \quad \begin{cases} R\frac{dx_1}{dt} = * - \frac{\partial R}{\partial a_{1,2}} X_2 - \ldots - \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}} X_{2m}, \\ R\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2}} X_1 * - \ldots - \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}} X_{2m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R\frac{dx_{2m}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}} X_1 + \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}} X_2 + \ldots\ldots\ldots * . \end{cases}$$

Aggregatum $R$ gaudet proprietatibus plane analogis earum quae de Determinantibus circumferuntur. Quarum gravissima ea est ut ***binis indicum*** $1, 2, \ldots . 2m$ ***inter se permutatis simul omnes ipsius*** $R$ ***termini valores oppositos induant ideoque ipsum*** $R$ ***in valorem oppositum abeat.*** Porro fit

$$6. \quad R = a_{1,i}\frac{\partial R}{\partial a_{1,i}} + a_{2,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2,i}} \ldots . + a_{2m,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2m,i}},$$

et quoties $i$ et $k$ inter se diversi sunt,

$$7. \quad 0 = a_{1,i}\frac{\partial R}{\partial a_{1,k}} + a_{2,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2,k}} \ldots . + a_{2m,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2m,k}},$$

ubi terminus in $a_{k,i}$ ductus ommittendus est. Designantibus $i$, $i'$, $i''$ etc. indices inter se diversos, si sumuntur differentialia partialia

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,i'}}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'}\partial a_{i'',i'''}}, \quad \text{etc.}$$

ea erunt aggregata ad instar aggregati $R$ formata, respective reiectis Coëfficientium binis, quatuor etc. seriebus cum horizontalibus tum verticalibus, eritque

$$8. \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'}\partial a_{i'',i'''}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i''}\partial a_{i''',i'}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'''}\partial a_{i',i''}}.$$

His rebus praemissis, quarum demonstrationem aliis relinquo vel ad alium locum relego, Multiplicator quaesitus sic invenitur. Sequitur e (5*.), siquidem signo summatorio subscribuntur indices quorum respectu summatio instituenda est,

$$9. \quad R\frac{dx_i}{dt} = A_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} X_\alpha,$$

unde

$$10. \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = -\sum_{\alpha,i} \frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} - \sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} . \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i},$$

ubi indicibus $\alpha$ et $i$ tribuuntur valores $1, 2, \ldots . 2m$, solis ommissis valoribus $i = \alpha$. Examinemus formulae (10.) summam priorem. Aggregati $\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}$ cum terminus nullus afficiatur elemento cuius alter index est $\alpha$ aut $i$, fit

$$\frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\,\partial a_{k,l}} . \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i},$$

summatione duplici ad omnes $\frac{(2m-2)(2m-3)}{1 \cdot 2}$ combinationes extensa, quibus indices $k$ et $l$ valores obtinent et inter se et ab ipsis $\alpha$ et $i$ diversos. E formula antecedente sequitur,

$$\sum_i \frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\,\partial a_{k,l}} . \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i},$$

ubi indicum $i$, $k$, $l$ valores in quoque termino sub signo summatorio et inter se et ab indice $\alpha$ diversi sunt, ipsi $i$ valores $1, 2, \ldots . 2m$ conveniunt, binorum $k$ et $l$ valores non inter se permutari debent. Unde triplex summa conflatur e $\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ terminis huiusmodi,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\,\partial a_{k,l}} \left\{ \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{l,i}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l} \right\},$$

qui obtinentur sumendo pro indicibus $i$, $k$, $l$ ternos diversos ex indicibus $1, 2, \ldots . \alpha-1, \alpha+1, \ldots . 2m$. At substituendo quantitatum $a_{i,k}$ valores (3.), ternorum terminorum uncis inclusorum summa,

$$\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{l,i}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l},$$

identice evanescit, ideoque pro quoque ipsius $\alpha$ valore fit,

$$11. \qquad \sum_i \frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = 0,$$

sive formulae (10.) prior summa evanescit. Alterius summae valor facile invenitur permutando indices $\alpha$ et $i$ formulamque (6.) in auxilium vocando, quae summata pro omnibus indicis $i$ valoribus suppeditat,

$$\sum_{\alpha,i} a_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} = 2m.R.$$

Hinc enim fit,

$$\sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} . \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} \left\{ \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} \right\} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} a_{\alpha,i} = mR.$$

Unde iam formula (10.) in hanc abit,

$$12. \qquad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = mR.$$

Cuius formulae pars laeva cum secundum (5.) et (9.) ipsi $-R \frac{d \log M}{dt}$ aeque-

tur, aequationum differentialium (4.) Multiplicatorem statuere licet

$$13. \quad M = e^{-mt}.$$

Docet ea formula, aequationibus differentialibus (4.) complete integratis ad eruendam relationem inter $t$ et variabiles $x_i$ nulla amplius opus esse Quadratura, sed valorem integralis

$$\int \frac{R\,dx_i}{A_i} = t + \text{Const.}$$

exhiberi posse per logarithmum Determinantis functionum quae Constantibus Arbitrariis aequantur.

Ponamus quod semper licet $X_{2m} = -1$ sintque Coëfficientes reliqui omnes $X_1, X_2, \ldots, X_{2m-1}$ a variabili $x_{2m}$ vacui, redit problema ***Pfaffianum*** in hoc, ***ut expressio differentialis*** $2m-1$ ***variabilium***

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2m-1}\,dx_{2m-1}$$

***per*** $m-1$ ***aequationes finitas reddatur differentiale completum*** $dx_{2m}$. Scilicet ea re effecta, obtinetur $m^{ta}$ aequatio per solas Quadraturas,

$$x_{2m} + \text{Const.} = \int \{X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2m-1}\,dx_{2m-1}\}.$$

Eo casu evanescunt omnes quantitates $a_{i,2m}$ ideoque ipsum quoque $dt$, unde aequationes differentiales (2.) in has abeunt,

$$14. \quad \begin{cases} 0 = \quad * \quad + a_{1,2}\,dx_2 + a_{1,3}\,dx_3 \ldots + a_{1,2m-1}\,dx_{2m-1}, \\ 0 = a_{2,1}\,dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\,dx_3 \ldots + a_{2,2m-1}\,dx_{2m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_{2m-1,1}\,dx_1 + a_{2m-1,2}\,dx_2 + a_{2m-1,3}\,dx_3 \ldots\ldots \quad * \quad . \end{cases}$$

Quarum una e reliquis fluit, sicuti sequitur summando aequationes respective per $\frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}, \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}, \ldots \frac{\partial R}{\partial a_{2m-1,2m}}$ multiplicatas. Evanescentibus $a_{i,2m}$ evanescunt et ipsum $R$ et omnia ipsius $R$ differentialia $\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}}$, in quibus neuter indicum et $k$ ipsi $2m$ aequatur. Unde e (9.) fit,

$$A_1 = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}, \quad A_2 = \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}, \quad \ldots \quad A_{2m-1} = \frac{\partial R}{\partial a_{2m-1,2m}},$$

$$A_{2m} = X_1 A_1 + X_2 A_2 \ldots + X_{2m-1} A_{2m-1}.$$

Cum $A_{2m}$ a variabili $x_{2m}$ vacua sit, formula (12.) abit in hanc,

$$15. \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_{2m}} \ldots + \frac{\partial A_{2m-1}}{\partial x_{2m-1}} = 0.$$

Quae docet, ***aequationum differentialium quae e*** (14.) ***proveniunt,***

$$16. \quad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_{2m-1} = A_1 : A_2 \ldots : A_{2m-1}$$

***Multiplicatorem aequari unitati.***

Principium ultimi Multiplicatoris applicemus exemplo simplicissimo quo $m = 2$ sive quo aequationes differentiales proponuntur,

$$17. \quad dx_1 : dx_2 : dx_3 = \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} : \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} : \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Inventa per primam integrationem variabilis $x_3$ expressione per $x_1$, $x_2$ et Constantem Arbitrariam $\alpha$, secundum principium illud fit altera aequatio integralis,

$$18. \quad \int \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \left\{ \left( \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \right\} = \text{Const.}$$

Quantitatem sub integrationis signo differentiale completum esse, sic verificari potest. Substituta variabilis $x_3$ expressione per integrationem primam inventa in formula $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$, obtinetur

$$\left( X_1 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( X_2 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) dx_2.$$

Eadem expressione substituta in aequationibus differentialibus, prodit aequatio,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right\} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right\},$$

quae est conditio ut formula differentialis antecedens sit differentiale aliquod completum $dx_4$. Si ipsius $x_3$ expressio implicat Constantem Arbitrariam $\alpha$, fit

$$\begin{aligned} d.\frac{\partial x_4}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \left\{ X_1 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right\}}{\partial \alpha} dx_1 + \frac{\partial \left\{ X_2 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right\}}{\partial \alpha} dx_2 \\ &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \left\{ \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) dx_2 \right\} \\ &\qquad + X_3 \left\{ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial \alpha} dx_1 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2 \partial \alpha} dx_2 \right\} \\ &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \left\{ \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) dx_2 \right\} \\ &\qquad + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} dX_3 + X_3 d \frac{\partial x_3}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Unde sequitur, quod propositum erat, quantitatem sub integrationis signo aequari differentiali completo, videlicet differentiali

$$d.X_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} - d.\frac{\partial x_4}{\partial \alpha}.$$

Quod si igitur functio $x_4$ inventa est, aequationem integralem (18.) sic quoque repraesentare licet,

$$19. \quad X_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_4}{\partial \alpha} = \text{Const.}$$

Quae de formulis quoque generalibus deduci potuit, quas loco citato tradidi de

aequationum differentialium (2.) systemate per solutionem completam aequationis (1.) integrando. Qua de integratione hac occasione novas addam propositiones novasque demonstrationes sequentes.

## §. 21.

Ac primum comprobabo propositionem, *si aequatio differentialis singularis*

$$20. \quad X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_p\,dx_p = 0$$

*integretur per m aequationes quascunque, earum ope fieri, ut de quibusque m e numero p aequationum differentialium sequentium,*

$$21. \quad \begin{cases} X_1\,dt = \quad * \quad + a_{1,2}\,dx_2 + a_{1,3}\,dx_3 \ldots + a_{1,p}\,dx_p, \\ X_2\,dt = a_{2,1}\,dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\,dx_3 \ldots + a_{2,p}\,dx_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_p\,dt = a_{p,1}\,dx_1 + a_{p,2}\,dx_2 + a_{p,3}\,dx_3 \ldots\ldots\ldots * \end{cases}$$

*reliquae $p-m$ sponte fluant, ipsis $a_{k,k'}$ designantibus quantitates* $\frac{\partial X_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_k}$.

Cuius propositionis demonstrationem sic adorno.

Designo

per $h$, $h'$ etc. indices $1, 2, \ldots m$,
per $i$, $i'$ etc. indices $m+1, m+2, \ldots p$,
per $k$, $k'$ etc. indices $1, 2, 3, \ldots p$.

Aequando $x_1, x_2, \ldots x_m$ *quibuscunque* reliquarum variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_p$ functionibus, abeunt aequationes (21.) in sequentes:

$$22. \quad 0 = u_k = X_k\,dt - \sum_i b_{k,i}\,dx_i,$$

siquidem statuitur,

$$23. \quad b_{k,i} = a_{k,1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + a_{k,2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots + a_{k,m}\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + a_{k,i}$$
$$= a_{k,i} + \sum_h a_{k,h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}.$$

Ponamus porro

$$24. \quad v_i = X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

erit substituendo (22.):

$$25. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}u_m + u_{i'} = v_{i'}\,dt - \sum_i c_{i',i}\,dx_i,$$

posito

$$26. \quad c_{i',i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}b_{1,i} + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}b_{2,i} \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}b_{m,i} + b_{i',i}$$
$$= b_{i',i} + \sum_h \frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}}b_{h,i}.$$

Substituendo ipsorum $b_{k,i}$ valores (23.), induit $c_{i',i}$ valorem sequentem,

$$27. \quad c_{i',i} = a_{i',i} + \sum_h a_{i',h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + \sum_h a_{h,i}\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}} + \sum_{h,h'} a_{h',h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}},$$

sive reponendo quantitatum $a_{k,k'}$ valores,

$$28. \quad c_{i',i} = \frac{\partial X_{i'}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_{i'}} + \sum_h \left\{\frac{\partial X_{i'}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_{i'}}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + \sum_h \left\{\frac{\partial X_h}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_h}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}}$$
$$+ \sum_{h,h'} \left\{\frac{\partial X_{h'}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_{h'}}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}}.$$

Includamus uncis differentialia partialia, in quibus solae $x_i$ sive $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_p$ pro independentibus habentur atque quantitates $x_h$ sive $x_1, x_2, \ldots x_m$ pro earum functionibus: erit

$$29. \quad \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \sum_h \frac{\partial X_k}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i},$$

unde

$$30. \quad c_{i',i} = \left(\frac{\partial X_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{i'}}\right) + \sum_h \left\{\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_{i'}}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\right\}.$$

Id quod sequitur, indicibus $h$ et $h'$ in summa duplici $\sum_{h,h'} \frac{\partial X_{h'}}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}}$ inter se permutatis nec non in (29.) scripto $h'$ ipsius $h$ loco. Inventam autem ipsius $c_{i',i}$ expressionem (30.) ope formulae (24.) sic exhibere licet,

$$31. \quad c_{i',i} = \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right),$$

reiectis qui se mutuo destruunt terminis,

$$X_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_{i'}\partial x_i} - X_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_i\partial x_{i'}}.$$

Quo ipsius $c_{i',i}$ valore substituto in (25.), eruimus formulam, quae valet ***quaecunque sint quantitates*** $x_h$ ***reliquarum*** $x_i$ ***functiones,***

$$32. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}u_m + u_{i'} = v_{i'}dt + \sum_i \left\{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right) - \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right)\right\}dx_i.$$

Quantitatibus $x_h$ per variabiles $x_i$ expressis cum fiat e (24.)

$$33. \quad X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_pdx_p = v_{m+1}dx_{m+1} + v_{m+2}dx_{m+2} \ldots + v_pdp,$$

si per $m$ aequationes, quibus quantitates $x_h$ per variabiles $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_p$ determinantur, aequatio differentialis (20.) integratur, singuli termini ad dextram formulae (33.) per se evanescere debent, sive fieri debet

$$34. \quad v_{m+1} = v_{m+2} \ldots = v_p = 0.$$

Unde etiam aequationis (32.) pars laeva evanescere debet sive, scribendo $i$ ipsius $i'$ loco, pro quolibet ipsius $i$ valore fieri debet,

$$34^*. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_i}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i}u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_i}u_m + u_i = 0.$$

Quae formula docet, si per $m$ aequationes integretur aequatio differentialis (20.), earum aequationum ope fieri, ut ex aequationibus

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_m = 0$$

reliquae

$$u_{m+1} = 0, \quad u_{m+2} = 0, \quad \ldots \quad u_p = 0$$

sponte fluant. Q. D. E.

Si $p > 2m$, inter coëfficientes $X_1$, $X_2$ etc. certae quaedam locum habere debent relationes, cum determinando $m$ functiones $x_1, x_2, \ldots x_m$ satisfieri debeat pluribus conditionibus, videlicet $p - m$ aequationibus,

$$0 = v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i.$$

Quae relationes obtineri possunt e formula (32.). Nam secundum eam formulam aequationibus differentialibus (21.) sive aequationibus

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_p = 0$$

satisfit per numerum $2m$ aequationum, videlicet per $m$ aequationes, quibus $x_1, x_2, \ldots x_m$ per reliquas variabiles determinantur, atque $m$ aequationes differentiales $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots u_m = 0$. Unde inter quantitates $X_1$, $X_2$ etc. tales locum habere debent relationes, ut de $p$ aequationum (21.) numero $2m$ reliquae $p - 2m$ sponte fluant sive, ope $2m$ aequationum differentialium $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots u_{2m} = 0$ eliminatis $2m$ differentialibus $dx_1, dx_2, \ldots dx_{2m}$, reliquae $p - 2m$ aequationes differentiales, $u_{2m+1} = 0$, $u_{2m+2} = 0, \ldots u_p = 0$, identicae evadant. Secundum observationem olim a me factam in Diar. *Crell.* Vol. II. pag. 357, hae $p - 2m$ aequationes post eam eliminationem formam induunt eandem atque propositae (21.), videlicet formam huiusmodi,

$$\begin{aligned}
F_1\,dt &= \quad * \quad + f_{1,2}\,dx_{2m+2} + f_{1,3}\,dx_{2m+3} \ldots + f_{1,p-2m}\,dx_p, \\
F_2\,dt &= f_{2,1}\,dx_{2m+1} \quad * \quad + f_{2,3}\,dx_{2m+3} \ldots + f_{2,p-2m}\,dx_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_{p-2m}\,dt &= f_{p-2m,1}\,dx_{2m+1} + f_{p-2m,2}\,dx_{2m+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad * \quad ,
\end{aligned}$$

ubi $f_{i,k} = -f_{k,i}$. Quae aequationes ut identicae evadant, evanescere debent et $p - 2m$ quantitates $F_i$ et $\frac{(p-2m)(p-2m-1)}{2}$ quantitates $f_{i,k}$. Unde ***locum habere debent*** $\frac{(p-2m)(p-2m+1)}{1 \cdot 2}$ ***conditiones ut aequatio differentialis linearis primi ordinis inter p variabiles*** (20.) ***per*** $m < \frac{1}{2}p$ ***aequationes integrari possit, eaedemque sunt conditiones quibus efficitur, ut p aequationes lineares*** (21.) ***ex earum numero*** $2m$ ***fluant.*** Si $p = 2m+1$, prodit una conditio iam a Cl. *Pfaff* olim exhibita, quae si $m = 1$ notam conditionem integrabilitatis suppeditat. Si $p = 2m+2$, locum habere debent tres conditiones, quas pro $m = 1$ accuratius examinemus.

Sit igitur propositum indagare conditiones, ut aequatio differentialis linearis inter *quatuor* variabiles,

$$35. \quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$

unica aequatione integrari possit. Qua aequatione si exprimitur una variabilium $x_4$ per $x_1$, $x_2$, $x_3$, proposita (35.) identica fieri debet, id quod aequationes poscit sequentes,

$$36. \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -\frac{X_1}{X_4}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_2} = -\frac{X_2}{X_4}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_3} = -\frac{X_3}{X_4}.$$

Secunda et tertia earum aequationum suppeditat,

$$X_4^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2 \partial x_3} = X_2 \left\{\frac{\partial X_4}{\partial x_3} - \frac{X_3}{X_4} \cdot \frac{\partial X_4}{\partial x_4}\right\} - X_4 \left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{X_3}{X_4} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_4}\right\}$$
$$= X_3 \left\{\frac{\partial X_4}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_4} \cdot \frac{\partial X_4}{\partial x_4}\right\} - X_4 \left\{\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_4} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_4}\right\}.$$

Unde ponendo $a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ similesque aequationes de tertia et prima, de prima et secunda aequationum (36.) deducendo obtinentur tres primae aequationum sequentium, quibus duas alias addidi ex iis provenientes,

$$37. \quad \begin{cases} 0 = \quad * \quad + a_{3,4} X_2 + a_{4,2} X_3 + a_{2,3} X_4, \\ 0 = a_{4,3} X_1 \quad * \quad + a_{1,4} X_3 + a_{3,1} X_4, \\ 0 = a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 \quad * \quad + a_{1,2} X_4, \\ 0 = a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3 \quad * \quad , \\ 0 = a_{2,3} a_{1,4} + a_{3,1} a_{2,4} + a_{1,2} a_{3,4}. \end{cases}$$

Ad easdem autem relationes secundum propositionem generalem supra conditam pervenire debemus, si quaerimus conditiones ut quatuor aequationum linearium,

$$X_1 dt = \quad * \quad + a_{1,2} dx_2 + a_{1,3} dx_3 + a_{1,4} dx_4,$$
$$X_2 dt = a_{2,1} dx_1 \quad * \quad + a_{2,3} dx_3 + a_{2,4} dx_4,$$
$$X_3 dt = a_{3,1} dx_1 + a_{3,2} dx_2 \quad * \quad + a_{3,4} dx_4,$$
$$X_4 dt = a_{4,1} dx_1 + a_{4,2} dx_2 + a_{4,3} dx_3 \quad *$$

binae e duabus reliquis fluant. Quod re vera fieri, facile comprobatur. Aequationum (37.) quatuor primae sunt notae conditiones integrabilitatis aequationis differentialis linearis primi ordinis inter tres variabiles, ex eadem aequatione (35.) provenientis si successive $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ constantes ponuntur. Quatuor illarum aequationum ternae cum quartam secum ducant, sequitur, *si tres aequationes,*

$$X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$
$$X_1 dx_1 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$
$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_4 dx_4 = 0,$$

*habitis respective* $x_1$, $x_2$, $x_3$ *pro Constantibus, conditioni integrabilitatis*

*satisfaciant, hanc quoque aequationem,*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0,$$

*si in ea $x_4$ pro Constante habeatur, conditioni integrabilitatis satisfacturam esse, nec non aequationem, $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$, in qua omnes quatuor quantitates $x_1, x_2, x_3, x_4$ variabiles sunt, unica aequatione integrari posse.* Ut ipsa absolvatur integratio, opus erit integratione completa trium aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles, id quod simili ratione demonstratur atque in tractatibus Calculi Integralis probatur, ad integrandam aequationem differentialem linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem, requiri integrationem completam duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Quae res in tractatibus ita proponi solet, ut alteram ne condere quidem liceat aequationem differentialem, nisi iam antea altera complete integrata habeatur. At observo, si aequatio differentialis inter tres variabiles $x_1$, $x_2$, $x_3$, conditioni integrabilitatis satisfaciens, est $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0$, pro duabus aequationibus inter duas variabiles integrandis sumi posse has, quae *separatim* tractari possint,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0, \quad X_2^0 dx_2 + X_3^0 dx_3 = 0,$$

quae e proposita proveniunt, prima habendo $x_3$ pro Constante, secunda ponendo $x_1 = 0$. Scilicet post integrationem secundae in locum ipsius $x_2$ substituenda est ea quantitatum $x_1$, $x_2$, $x_3$ functio, quae per integrationem primae aequiparatur valori variabilis $x_2$ qui ipsi $x_1 = 0$ respondet. Similiter, si proponitur integrare aequationem inter quatuor variabiles,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$

conditionibus (37.) locum habentibus, pro tribus aequationibus inter duas variabiles, quae integrandae sunt, sumi possunt sequentes separatim tractandae,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0, \quad X_2^0 dx_2 + X_3^0 dx_3 = 0, \quad X_3^{(0)} dx_3 + X_4^{(0)} dx_4 = 0,$$

in quibus designant $X_2^0$ et $X_3^0$ valores in quos $X_2$ et $X_3$ abeunt pro $x_1 = 0$, porro $X_3^{(0)}$ et $X_4^{(0)}$ valores in quos $X_3$ et $X_4$ pro $x_1 = x_2 = 0$ abeunt; deinde in prima aequatione $x_3$ et $x_4$, in secunda $x_4$ pro Constantibus habendae sunt. Integrata tertia aequatione, ipsi $x_3$ ea substituenda est quantitatum $x_2$, $x_3$, $x_4$ functio, quae per integrationem secundae aequat variabilis $x_3$ valorem ipsi $x_2 = 0$ respondentem; ac deinde ipsi $x_2$ ea quantitatum $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ functio substituenda est, quae per aequationis primae integrationem aequat variabilis $x_2$ valorem ipsi $x_1 = 0$ respondentem.

Propositis $p$ aequationibus differentialibus vulgaribus inter $p+1$ variabiles quibuscunque, aequationes $m$ inter ipsas variabiles sunt integrales propositarum,

si efficiunt, ut harum numerus $m$ e reliquis $p-m$ fluat; porro tale constituunt aequationum integralum systema, e quo per differentiationem aequationumque differentialium substitutionem aliae novae non obtineantur, si earum adiumento non plures quam $m$ aequationes differentiales e reliquis fluunt. Antecedentibus vidimus, per $m$ aequationes, quibus integretur aequatio differentialis vulgaris linearis inter $p$ variabiles (20.), fieri ut e $p$ aequationum differentialium vulgarium (21.) numero $m$ reliquae $p-m$ sponte fluant. Unde si $p-m=m$ sive $p=2m$, qui est casus problematis ***Pfaffiani***, sequitur, ***quascunque*** $m$ aequationes, quibus integretur aequatio differentialis linearis primi ordinis inter $2m$ variabiles,

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2m} dx_{2m},$$

haberi posse pro integralibus systematis $2m$ aequationum differentialium vulgarium,

$$X_k dt = a_{k,1} dx_1 + a_{k,2} dx_2 \ldots + a_{k,2m} dx_{2m},$$

ex iisque per differentiationem novas deduci non posse aequationes integrales. Si $m < \frac{1}{2}p$ atque aequatio (20.) integrari potest $m$ aequationibus, vidimus $p$ aequationum (21.) tantum $2m$ a se independentes esse, reliquas $p-2m$ ex iis sponte fluere; unde ex arbitrio iis addere licet $p-2m$ aequationes differentiales, ut habeatur systema $p$ aequationum differentialium inter $p+1$ variabiles. Eo casu aequationes $m$, quibus aequatio (20.) integrari supponitur, rursus haberi possunt pro aequationibus eius systematis integralibus, quaecunque sint $p-2m$ aequationes differentiales ipsis (21.) ex arbitrio adiectae, cum illae $m$ aequationes efficiant, quod e (32.) sequebatur, ut $m$ aequationes differentiales $u_{m+1}=0, u_{m+2}=0, \ldots u_{2m}=0$ ex aliis systematis aequationibus differentialibus, $u_1=0, u_2=0, \ldots u_m=0$ obtineantur.

Designantibus $A_1$, $A_2$ etc. quascunque variabilium $x_1, x_2, \ldots x_p$ functiones, quoties aequationum differentialium,

$$dx_1 : dx_2 \ldots : dx_p = A_1 : A_2 \ldots A_p,$$

dantur aequationes integrales $m$, quarum differentiatione aliae novae non prodeunt, earumque ope exprimuntur $x_1, x_2, \ldots x_m$ ut functiones variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_p$, eas functiones satisfacere constat systemati aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis sequenti,

$$38. \quad \begin{cases} A_1 = A_{m+1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\frac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_p\frac{\partial x_1}{\partial x_p}, \\ A_2 = A_{m+1}\frac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_p\frac{\partial x_2}{\partial x_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m = A_{m+1}\frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\frac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_p\frac{\partial x_m}{\partial x_p}. \end{cases}$$

Qua de re pluribus egi in alia Commentatione Diar. *Crell.* Vol. XXIII. inserta. Systema (38.) ita est comparatum ut in quaque aequatione eiusdem functionis reperiantur differentialia partialia secundum diversas variabiles independentes sumta, atque differentialia partialia diversarum functionum secundum eandem variabilem independentem in diversis aequationibus sumta eodem afficiantur Coëfficiente. Eiusmodi systematis hoc, a cuius solutione problema *Pfaffianum* pendet,

$$39. \quad v_{m+1} = 0, \quad v_{m+2} = 0, \quad \ldots \quad v_{2m} = 0,$$

quodammodo inversum est, sicuti e functionis $v_i$ expressione (24.) patet; quippe in quaque huius systematis aequatione diversarum functionum differentialia reprehenduntur secundum eandem variabilem sumta, atque eiusdem functionis differentialia, secundum diversas variabiles independentes in diversis aequationibus sumta, eodem afficiuntur Coëfficiente. Secundum antecedentia e systemate (39.) sequitur aliud eius inversum formae systematis (38.). Nam ubi aequationes (2.) ad formam aequationum (9.) revocamus, sequitur ex antecedentibus, $m$ aequationes quae systemati (39.) satisfaciant sive quibus (1.) integretur, ipsarum (9.) fieri aequationes integrales, quarum differentiatione aliae novae non prodeant, ideoque easdem systemati aequationum (38.) satisfacere. Unde haec obtinetur

Propositio.

*„E systemate aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis huiusmodi,*

$$39^*. \quad \begin{cases} X_{m+1} = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}}, \\ X_{m+2} = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{2m} = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{2m}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{2m}} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_{2m}}, \end{cases}$$

*hoc sequitur alterum formae quodammodo inversae,*

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{m+1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_{2m} \frac{\partial x_1}{\partial x_{2m}}, \\ A_2 &= A_{m+1} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_{2m} \frac{\partial x_2}{\partial x_{2m}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m &= A_{m+1} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_{2m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{2m}}, \end{aligned}$$

*ubi, posito* $a_{k,k'} = \frac{\partial X_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_k}$ *ac designante* $R$ *aggregatum, e* 1.3.5 — ·

... $(2m-1)$ *terminis huiusmodi*

$$a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots . a_{2m-1,2m}$$

*ratione supra descripta conflatum, fit*

$$A_k = \frac{\partial R}{\partial a_{1,k}} X_1 + \frac{\partial R}{\partial a_{2,k}} X_2 \ldots . + \frac{\partial R}{\partial a_{2m,k}} X_{2m},$$

*omisso termino in* $X_k$ *ducto.*"

Huius memorabilis propositionis si demonstrationem cupis ab aequationum differentialium vulgarium consideratione independentem, rem sic adornare licet.

Sit rursus

$$v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots . + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

ac designantibus

$$y,\ y_1,\ \ldots .\ y_{2m}$$

quantitates *indefinitas*, ponatur

$$U_k = X_k . y - a_{k,1} y_1 - a_{k,2} y_2 \ldots . - a_{k,2m} y_{2m},$$

$$Y_k = y_k - \frac{\partial x_k}{\partial x_{m+1}} y_{m+1} - \frac{\partial x_k}{\partial x_{m+2}} y_{m+2} \ldots . - \frac{\partial x_k}{\partial x_{2m}} y_{2m},$$

$$u_k = U_k + a_{k,1} Y_1 + a_{k,2} Y_2 \ldots . + a_{k,m} Y_m .$$

Eodem modo atque (32.) probavimus, demonstratur, quaecunque sint $x_1$, $x_2$, .... $x_m$ reliquarum variabilium $x_{m+1}$, $x_{m+2}$, .... $x_{2m}$ functiones, fieri

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i} u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} u_2 \ldots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} u_m + u_i = v_i y + \sum_{i'} \left\{ \left( \frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}} \right) \right\} y_{i'} .$$

Partes ad dextram signi aequalitatis evanescunt, ubi pro $x_1$, $x_2$, .... $x_m$ sumuntur functiones satisfacientes $m$ aequationibus $v_i = 0$, quae sunt ipsae functiones in theoremate tradito propositae, quas a se independentes esse subintelligo. Hinc si quantitatum $u_k$ expressiones substituuntur atque statuitur

$$L_{i,k} = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} a_{1,k} + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} a_{2,k} \ldots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} a_{m,k} + a_{i,k},$$

sequitur per $m$ aequationes $v_i = 0$ obtineri $m$ sequentes,

$$40. \quad 0 = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} U_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} U_2 \ldots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} U_m + L_{i,1} Y_1 + L_{i,2} Y_2 \ldots . + L_{i,m} Y_m .$$

Supponamus, quantitatum indefinitarum $y$, $y_1$ etc. functiones lineares $U_1$, $U_2$, .... $U_{2m}$ a se independentes esse, sive quantitatem, supra per $R$ designatam,

$$\Sigma a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots . a_{2m-1,2m}$$

neque per se neque substituendo functionum $x_k$ valores evanescere. Quae se-

cundum supra tradita est conditio ut aequatio

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2m} dx_{2m} = 0$$

non paucioribus quam $m$ aequationibus integrari possit. Eo casu etiam $m$ functiones ipsarum $Y_1$, $Y_2$, .... $Y_m$ lineares, quas per $H_i$ designabo,

$$L_{i,1} Y_1 + L_{i,2} Y_2 \ldots + L_{i,m} Y_m = H_i,$$

a se independentes erunt, sive non dabuntur factores ab ipsis $y_k$ independentes $\lambda_1$, $\lambda_2$ etc., qui efficiant

$$\lambda_1 H_{m+1} + \lambda_2 H_{m+2} \ldots + \lambda_m H_{2m} = 0.$$

Nam si eiusmodi dantur factores, secundum (40.) aut $x_1, x_2, \ldots x_i$ non a se independentes sunt aut datur aequatio inter functiones lineares $U_1, U_2, \ldots U_m$, quod utrumque contra suppositionem est. Functiones autem a se independentes $H_{m+1}$, $H_{m+2}$, .... $H_{2m}$ omnes simul evanescere non possunt nisi simul evanescunt omnes $Y_1$, $Y_2$, .... $Y_m$. Iam igitur cum pro ipsarum $y$, $y_1$ etc. valoribus

$$y = R, \quad y_1 = A_1, \quad y_2 = A_2, \quad \ldots \quad y_{2m} = A_{2m}$$

omnes simul evanescant $U_1$, $U_2$, .... $U_{2m}$, siquidem quantitatum $A_k$, $R$ valores sunt ipsi in Propositione tradita assignati, ideoque omnes secundum (40.) evanescant $H_i$, pro valoribus illis omnes quoque $Y_1$, $Y_2$, .... $Y_m$ evanescere debent, sive pro ipsius $h$ valoribus 1, 2, .... $m$ fieri debet,

$$0 = A_h - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+1}} A_{m+1} - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+2}} A_{m+2} \ldots - \frac{\partial x_h}{\partial x_{2m}} A_{2m},$$

quae est propositio demonstranda.

Propositionis antecedentis pro casu simplicissimo $m=2$ hoc addam exemplum:

„Ubi semper ponitur $a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$, ex aequationibus

$$-X_3 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3},$$

$$-X_4 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_4} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_4}$$

fluunt sequentes,

$$a_{3,4} X_2 + a_{4,2} X_3 + a_{2,3} X_4$$
$$= (a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 + a_{1,2} X_4) \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + (a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3) \frac{\partial x_1}{\partial x_4},$$

$$a_{4,3} X_1 + a_{1,4} X_3 + a_{3,1} X_4$$
$$= (a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 + a_{1,2} X_4) \frac{\partial x_2}{\partial x_3} + (a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3) \frac{\partial x_2}{\partial x_4}.“$$

Si $p > 2m$ atque variabilium independentium $x_{m+1}$, $x_{m+2}$, .... $x_p$ functiones $x_1$, $x_2$, .... $x_m$ ita determinari possunt, ut $p - m$ aequationibus $v_i = 0$ satis-

faciant, habentur *complura systemata* aequationum differentialium partialium, ad instar aequationum (38.) formata. Videlicet e numero $m$ aequationum

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \ldots \quad v_p = 0$$

per Propositionem antecedentem deducere licet alterum $m$ aequationum differentialium partialium systema (38.), eaque ratione aliud aliudque systema (38.) obtinebitur, prout aliae $p-2m$ e $p-m$ variabilibus independentibus Constantium loco habentur.

Ponamus iam esse $x_1, x_2, \ldots x_m$ variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_p$ functiones *involventes Constantem Arbitrariam* $\alpha$, sitque

$$41. \quad w = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial \alpha},$$

porro

$$v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

$$\begin{aligned} u_k &= X_k dt - \{a_{k,1} dx_1 + a_{k,2} dx_2 \ldots + a_{k,p} dx_p\} \\ &= X_k dt - dX_k + \frac{\partial X_1}{\partial x_k} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_k} dx_2 \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial x_k} dx_p \\ &= X_k dt - dX_k + \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_i + \sum_{hi} \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$

Quae ubi substituuntur in formula,

$$\begin{aligned} &dw - \left\{\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} dX_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} dX_m\right\} \\ &= X_1 d\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 d\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \ldots + X_m d\frac{\partial x_m}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{hi} X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial \alpha \, \partial x_i} dx_i, \end{aligned}$$

obtinetur

$$\begin{aligned} 42. \quad &dw - w\,dt + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} u_m \\ &= \sum_i \left\{\left(\frac{\partial X_i}{\partial \alpha}\right) + \sum_h \left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial x_h}{\partial x_i} + X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial \alpha \, \partial x_i}\right]\right\} dx_i \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha}\right) dx_i, \end{aligned}$$

siquidem uncis differentialia partialia includendo innuitur, ante differentiationes substitutos esse functionum $x_1, x_2, \ldots x_m$ valores. Si $m$ aequationibus, quibus $x_1, x_2, \ldots x_m$ determinantur, integratur aequatio,

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_p dp,$$

locum habere debent $p-m$ aequationes $v_i=0$, unde aequationis (42.) dextra pars evanescit sive fit

$$43. \quad dw - w\,dt + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial \alpha}u_m = 0.$$

Si $p \geqq 2m$, vidimus supra, $m$ aequationibus illis fieri ut de $m$ aequationibus differentialibus $u_h=0$ fluant $p-m$ reliquae $u_i=0$, ita ut $m$ aequationes illae sint aequationes integrales systematis aequationum differentialium $u_k=0$, quarum $p-2m$ e reliquis fluunt. Formula (43.) docet, si insuper inter variabiles $t$, $x_{m+1}$, $x_{m+2}$, .... $x_p$ statuatur aequatio $w=\beta e^t$ sive

$$44. \quad X_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \ldots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial \alpha} = \beta e^t,$$

designante $\beta$ Constantem Arbitrariam, ipsas $m$ aequationes differentiales $u_h=0$ in earum $m-1$ redire, ideoque (44.) esse novam eiusdem systematis $u_k=0$ aequationem integralem. Si $m$ aequationes, quibus aequatio

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_p\,dx_p = 0$$

integratur, plures involvunt Constantes Arbitrarias, per (44.) totidem obtinentur systematis $u_k=0$ aequationes integrales, quas diversae ingrediuntur Constantes Arbitrariae $\beta$, et e quarum binis per solam divisionem eliminatur $t$. Quae manent aequationes integrales, quaecunque $p-2m$ aequationes differentiales adiiciantur systemati $u_k=0$, quippe quod tantum $2m$ aequationum differentialium vices gerit. Ubi Constantes Arbitrariae sunt numero $m$, habetur problematis ***Pfaffiani*** solutio completa, simulque $m$ aequationes (44.) iunctae $m$ aequationibus, quibus aequatio (20.) integratur, suppeditant systematis aequationum differentialium (21.) integrationem completam.

Si $p=2m$, aequationes Constantem Arbitrariam $\alpha$ involventes, quibus aequatio

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2m}\,dx_{2m} = 0$$

integratur et quibus determinabantur functiones $x_1$, $x_2$, .... $x_m$, sunt aequationes integrales systematis aequationum differentialium (2.), sive resolutione earum provenientium (4.):

$$dx_1 : dx_2 \ldots : dx_{2m} = A_1 : A_2 \ldots : A_{2m}.$$

Quarum Multiplicatorem, docent formulae (13.) et (44.), per illas $m$ aequationes integrales induere valorem,

$$M = \left\{X_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \ldots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial \alpha}\right\}^{-m}.$$

Si $X_{2m} = -1$ atque omnes $X_1, X_2, \ldots X_{2m-1}$ variabili $x_{2m}$ vacant, vidimus supra Multiplicatorem Constanti aequari. Ac reapse eo casu evanescente $dt$ e (44.) eruitur,

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} = \beta,$$

quae ipsarum (4.) aequatio integralis est. Quae pro $m = 2$ cum formula (19.) convenit, quam supra alia via erui.

Methodum ad solvendum problema *Pfaffianum* ab ipso autore adhibitam, data occasione observo, per plures et altiores procedere integrationes quam methodus vera et genuina poscat. Quam novam methodum pro exemplo simplice explicabo. Ad aequationem differentialem

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

per duas aequationes integrandam poscit *Pfaffiana* methodus integrationem completam systematis trium aequationum differentialium primi ordinis inter quatuor variabiles ac deinde unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Illius igitur systematis Integrali uno invento, secundum illam methodum restat integratio completa duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles sive unius aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles ac deinde aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. At observo, si Integrali illo invento exprimatur $x_4$ per $x_1, x_2, x_3$, aequationem differentialem propositam abire in aliam linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem; cuius integrationem vidimus absolvi posse per integrationes separatas duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Unde in locum aequationis differentialis secundi ordinis tantum integrandae sunt duae aequationes differentiales separatae primi ordinis, quae est reductio maxime insignis; integrationi autem aequationis differentialis primi ordinis postremo praestandae omnino supersedetur. Tractatio huius rei gravissimae completa ac generalis alii Commentationi reservanda est.

Novum Principium Generale Mechanicum quod e Principio Ultimi Multiplicatoris fluit.

§. 22.

Sint $x_i, y_i, z_i$ Coordinatae orthogonales puncti massa $m_i$ praediti; sint vires massam $m_i$ secundum directiones Coordinatarum sollicitantes $X_i, Y_i, Z_i$. Ubi systema $n$ punctorum materialium $m_1, m_2, \ldots m_n$ prorsus liberum est, inter tempus $t$ atque Coordinatas punctorum habentur $3n$ aequationes differentiales secundi ordinis,

$$1. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} X_i, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Y_i, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Z_i. \end{cases}$$

Vires $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ suppositione maxime generali erunt functiones $3n$ Coordinatarum $x_i$, $y_i$, $z_i$, temporis $t$ atque differentialium primorum Coordinatarum,

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \quad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \quad z_i' = \frac{dz_i}{dt},$$

quae sunt punctorum velocitates in Coordinatarum directiones proiectae. Secundum (5.) §. 14. systematis aequationum differentialium dynamicarum (1.) Multiplicator definitur formula,

$$2. \quad \frac{d \log M}{dt} + \Sigma \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i'} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i'} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_i'} \right) = 0,$$

indice $i$ valente ad omnia puncta materialia systematis.

Quoties vires sollicitantes a solis massarum positionibus in spatio pendent sive praeterea etiam a tempore $t$, quantitates $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ ipsa $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ omnino non involvunt, ideoque evanescente expressione

$$\Sigma \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i'} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i'} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_i'} \right),$$

statuere licet

$$M = 1.$$

Hinc secundum principium ultimi Multiplicatoris sequitur, si systema punctorum materialium liberum sit atque vires mobilia propellentes ab eorum velocitatibus non pendeant, ultimam integrationem, vel si vires etiam a tempore non explicite pendeant, ***duas ultimas integrationes*** revocari posse ad Quadraturas. Videlicet posteriore casu constat tempus $t$ prorsus separari posse et post alias omnes integrationes transactas per Quadraturam inveniri.

Idem iam demonstrabo pro casu generali quo systema $n$ punctorum materialium non est liberum, sed certis obnoxium est conditionibus, quae exprimantur per aequationes inter Coordinatas $x_i$, $y_i$, $z_i$ locum habentes,

$$3. \quad \Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0, \quad \text{etc.}$$

Aequationes differentiales dynamicas pro motu sic impedito praecepit ill. ***Lagrange*** haberi sequentes,

$$4.\quad \begin{cases} \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left\{X_i + \lambda\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} + \lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}\ \text{etc.}\right\}, \\ \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left\{Y_i + \lambda\frac{\partial\Pi}{\partial y_i} + \lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}\ \text{etc.}\right\}, \\ \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left\{Z_i + \lambda\frac{\partial\Pi}{\partial z_i} + \lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}\ \text{etc.}\right\}, \end{cases}$$

factoribus $\lambda$, $\lambda_1$ etc. determinatis per aequationes lineares, quae obtinentur substituendo aequationes differentiales (4.) in aequationibus conditionalibus bis differentiatis,

$$\frac{d^2\Pi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\Pi_1}{dt^2} = 0, \quad \text{etc.}$$

Ad eas aequationes lineares formandas pono

$$5.\quad \begin{cases} U = \Sigma\left\{x_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}}{dt} + y_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}}{dt} + z_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}}{dt}\right\}, \\ U_1 = \Sigma\left\{x_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}}{dt} + y_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}}{dt} + z_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}}{dt}\right\}, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

fit

$$0 = \frac{d^2\Pi}{dt^2} = \Sigma\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{d^2z_i}{dt^2}\right\} + U,$$

$$0 = \frac{d^2\Pi_1}{dt^2} = \Sigma\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}\cdot\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}\cdot\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}\cdot\frac{d^2z_i}{dt^2}\right\} + U_1,$$

etc. etc.

Ubi in his aequationibus substituuntur formulae (4.) atque ponitur,

$$6.\quad \begin{cases} V = U + \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i}Z_i\right\}, \\ V_1 = U_1 + \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}Z_i\right\}, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

porro

$$7.\quad (\alpha,\beta) = (\beta,\alpha) = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial x_i} + \frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial y_i} + \frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial z_i}\right\},$$

aequationes, quibus $\lambda$, $\lambda_1$ determinantur, evadunt sequentes,

$$8. \quad \begin{cases} 0 = V + (0,0)\lambda + (0,1)\lambda_1 \text{ etc.}, \\ 0 = V_1 + (1,0)\lambda + (1,1)\lambda_1 \text{ etc.}, \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

His de factorum $\lambda$, $\lambda_1$ etc. valoribus praemissis, aequationum ***Lagrangianarum*** (4.) investigabo Multiplicatorem.

Ac primum observo, secundum ea quae de viribus sollicitantibus statuta sunt, in dextris partibus aequationum (4.) solos factores $\lambda$, $\lambda_1$ etc. implicare differentialia prima $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$. Unde e (5.) §. 14. Multiplicator $M$ definietur formula,

$$-\frac{d\log M}{dt} = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial x_i'} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial y_i'} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial z_i'}\right\}$$
$$+ \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i'} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \lambda_1}{\partial y_i'} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \lambda_1}{\partial z_i'}\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.},$$

quam posito

$$9. \quad \Lambda_{\alpha,\beta} = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial x_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial y_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial z_i'}\right\},$$

sic exhibere licet

$$10. \quad d\log M = -\{\Lambda_{0,0} + \Lambda_{1,1} + \text{etc.}\}\, dt.$$

Ad quantitates $\Lambda_{0,0}$, $\Lambda_{1,1}$ etc. determinandas, aequationes (5.),

$$0 = V_\beta + (\beta,0)\lambda + (\beta,1)\lambda_1 \text{ etc.},$$

quarum Coëfficientes $(\beta,0)$, $(\beta,1)$ etc. solarum $x_i$, $y_i$, $z_i$ functiones sunt, secundum omnes quantitates $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ differentientur, aequationesque differentiationibus provenientes respective per quantitates

$$\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}, \qquad \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}, \qquad \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}$$

multiplicatae consummentur: prodit

$$11. \quad 0 = u_{\alpha,\beta} + (\beta,0)\Lambda_{\alpha,0} + (\beta,1)\Lambda_{\alpha,1} \text{ etc.},$$

siquidem statuitur

$$u_{\alpha,\beta} = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial x_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial y_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial z_i'}\right\}.$$

Cum secundum (6.) habeatur

$$\frac{\partial V_\beta}{\partial x_i'} = \frac{\partial U_\beta}{\partial x_i'}, \qquad \frac{\partial V_\beta}{\partial y_i'} = \frac{\partial U_\beta}{\partial y_i'}, \qquad \frac{\partial V_\beta}{\partial z_i'} = \frac{\partial U_\beta}{\partial z_i'},$$

quantitates $u_{\alpha,\beta}$ sic repraesentare licet,

$$u_{\alpha,\beta} = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U_\beta}{\partial x_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial U_\beta}{\partial y_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial U_\beta}{\partial y_i'} \right\}.$$

At e (5.) obtinetur, evolutione differentialium $d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}$ etc. facta,

$$12. \quad \begin{cases} \frac{\partial U_\beta}{\partial x_i'} = 2 \frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}}{dt}, \\ \frac{\partial U_\beta}{\partial y_i'} = 2 \frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i}}{dt}, \\ \frac{\partial U_\beta}{\partial z_i'} = 2 \frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}}{dt}, \end{cases}$$

quibus valoribus substitutis fit

$$13. \quad u_{\alpha,\beta} = 2\Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}}{dt} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i}}{dt} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}}{dt} \right\}.$$

Cuius aequationis beneficio obtinentur quantitatum $(\alpha, \beta)$ per formulam (7.) definitarum differentialia,

$$14. \quad \frac{d.(\alpha,\beta)}{dt} = \frac{d.(\beta,\alpha)}{dt} = \tfrac{1}{2}\{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\}.$$

In aequatione (11.) indici $\beta$ valores 0, 1, 2 etc. tribuendo obtinentur aequationes lineares quibus quantitas $\Lambda_{\alpha,\alpha}$ determinatur. At quantitatum omnium sic inventarum $\Lambda_{\alpha,\alpha}$ aggregatum docui per formulam symbolicam concinnam exhiberi posse, quaecunque sint quantitates $u_{\alpha,\beta}$. Vocetur enim $R$ earum aequationum linearium Determinans sive sit

$$\Sigma \pm (00)(11)(22)\ldots. = R,$$

atque statuatur

$$\tfrac{1}{2}\{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\}\, dt = \delta(\alpha,\beta) = \delta(\beta,\alpha):$$

sequitur per ratiocinia similia atque §. 16. adhibui,

$$-\{\Lambda_{0,0} + \Lambda_{1,1} + \text{etc.}\}\, dt = \delta \log R.$$

Unde cum secundum (14.) sit

$$\delta(\alpha,\beta) = d(\alpha,\beta) \quad \text{ideoque} \cdot \delta \log R = d \log R,$$

eruitur e (10.),

$$-\{\Lambda_{0,0} + \Lambda_{1,1} + \text{etc.}\}\, dt = d \log M = d \log R,$$

id quod suppeditat

$$15. \quad M = R = \Sigma \pm (00)(11)(22)\ldots.,$$

qui est Multiplicatoris quaesiti valor.

Operae pretium est adnotare, aequationem inventam $M = R$ non tantum ad casum valere quo functiones $X_i$, $Y_i$, $Z_i$, viribus sollicitantibus aequales, tempus $t$ explicite continent, sed ad hunc quoque casum *quo tempus $t$ ipsas explicite afficit aequationes conditionales* $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ etc. Eo casu aequationes dynamicae *Lagrangianae* (4.) eandem servant formam, sed factoribus $\lambda$, $\lambda_1$ etc. alii competunt valores; quippe quantitatibus $U$, $U_1$ etc. ideoque etiam quantitatibus $V$, $V_1$ etc. quae aequationum linearium (8.), quibus factores $\lambda$, $\lambda_1$ etc. determinantur, terminos constantes constituunt, respective addendi sunt termini,

$$2\frac{d.\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{dt}, \qquad 2\frac{d.\frac{\partial \Pi_1}{\partial t}}{dt}, \quad \text{etc.}$$

At patet, inde non mutari aequationes (12.); unde aequationes quoque (13.) et (14.) immutatae manebunt ideoque formula pro aggregato $\Lambda_{0,0} + \Lambda_{1,1}$ etc. inventa ideoque etiam ipsius Multiplicatoris valor $R$.

Si vires sollicitantes $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ solarum functiones sunt Coordinatarum $x_i$, $y_i$, $z_i$, atque inter has solas dantur aequationes conditionales $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ etc., valor $M = R$ inventus secundum principium ultimi Multiplicatoris hoc suppeditat theorema:

### Novum Principium Generale Mechanicum.

*„Proponatur motus systematis $n$ punctorum materialium, quae in datis superficiebus vel curvis aut dato quocunque modo inter se connexa manere debent, ita ut inter Coordinatas eorum locum habeant $k$ aequationes conditionales; porro vires sollicitantes et magnitudine et directione solis punctorum positionibus datae sint: semper duas ultimas integrationes absolvere licet Quadraturis. Sint enim*

*punctorum massae $m_1$, $m_2$, .... $m_n$;*

*massae $m_i$ Coordinatae orthogonales $x_i$, $y_i$, $z_i$, earumque differentialia prima $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$, $y_i' = \frac{dy_i}{dt}$, $z_i' = \frac{dz_i}{dt}$;*

*sint aequationes conditionales $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, .... $\Pi_{k-1} = 0$ et differentiatione prima ex iis provenientes $\Pi' = 0$, $\Pi_1' = 0$, .... $\Pi_{k-1}' = 0$, ub*

$$\Pi_\alpha' = \Sigma\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}z_i'\right\};$$

*inter $6n$ quantitates $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ praeter $2k$ aequationes $\Pi_\alpha =$*

*$\Pi'_\alpha = 0$, inventa sint $6n-k-2=\mu$ Integralia $F_1=\alpha_1$, $F_2=\alpha_2$, .... $F_\mu=\alpha_\mu$, designantibus $\alpha_1, \alpha_2, .... \alpha_\mu$ Constantes Arbitrarias; restabit integratio unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas quantitates u et v,*

$$v'du - u'dv = 0,$$

*ubi u et v esse possunt ipsarum $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ functiones quaecunque atque u' et v' designant valores differentialium $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, adiumento aequationum datarum et integratione inventarum nec non ipsarum aequationum differentialium dynamicarum per ipsas u et v expressos. His praemissis, ponatur*

$$(\alpha,\beta) = \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}\right\},$$

*atque kk quantitatum $(\alpha,\beta)$ formetur Determinans R; porro si vocatur $\Delta$ Determinans functionale $6n$ functionum*

$$\Pi,\ \Pi_1,\ .... \Pi_{k-1},\ \Pi',\ \Pi'_1,\ .... \Pi'_{k-1},$$
$$F_1, F_2, .... F_{6n-k-2},\ u,\ v,$$

*$6n$ quantitatum $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ respectu formatum, exprimantur R et $\Delta$ et ipsa per solas u et v; erit aequationis $v'du - u'dv = 0$ Multiplicator $\frac{R}{\Delta}$, unde nova habetur aequatio integralis,*

$$\int \frac{R}{\Delta}(v'du - u'dv) = \text{Const.},$$

*ubi expressio sub integrationis signo est differentiale completum; denique si nova illa aequatione integrali exprimitur v per u, unde evadit etiam u' solius u functio, invenitur simplice Quadratura,*

$$t + \text{Const.} = \int \frac{du}{w}."$$

Sub forma antecedente principium novum mechanicum ante hos tres annos cum illustri Academia *Petropolitana* communicavi. Alias eiusdem formas infra tradam. Ultimam integrationem, qua $t$ per Coordinatas exprimatur, Quadraturis absolvi, res erat nota et sponte patens. At inventum novum, penultimam quoque integrationem Quadraturis perfici posse, constituere mihi videbatur principium mechanicum.

Si tempus $t$ vires sollicitantes sive etiam aequationes conditionales afficit, non amplius ipsum $t$ a reliquis variabilibus separare licet, unde eo casu principium nostrum tantum omnium ultimam integrationem per Quadraturas absolvere docet. Supponendo, inventa esse $6n-2k-1$ Integralia,

$$F_1 = \alpha_1,\ F_2 = \alpha_2,\ ....\ F_{6n-2k-1} = \alpha_{6n-2k-1},$$

atque $u$ et $v$ esse ipsius $t$ et $6n$ quantitatum $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ functiones, Determinans $\Delta$ formandum est $6n$ functionum,

$F_1$, $F_2$, .... $F_{2n-2k-1}$, $\Pi$, $\Pi_1$, .... $\Pi_{k-1}$, $\Pi'$, $\Pi_1'$, .... $\Pi_{k-1}'$, $u$, $v$, $6n+1$ quantitatum $t$, $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ respectu; eadem manente ipsius $R$ significatione, rursus exprimenda erunt $R$, $\Delta$, $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$ per $u$ et $v$, eritque aequatio integralis ultima,

$$\int \frac{R}{\Delta}(v'du - u'dv) = \text{Const.},$$

ubi expressio sub integrationis signo est differentiale completum.

Habemus hic exemplum, quo ad reductionem aequationum differentialium propositarum adhibentur Integralia *particularia;* nam ex aequationibus differentialibus (4.) sequuntur Integralia completa, $\Pi_\alpha' = C_\alpha$, $\Pi_\alpha = C_\alpha t + C_\alpha'$, designantibus $C_\alpha$, $C_\alpha'$ Constantes Arbitrarias. Neque tamen sunt $\Pi_\alpha' = 0$, $\Pi_\alpha = 0$ aequationes integrales particulares *quaecunque,* sed tales pro quibus secundum §. 12. fit ut Multiplicator quo aequationes differentiales earum beneficio reductae gaudent e Multiplicatore propositarum (4.) deduci possit. Scilicet aequatio quidem integralis particularis est $\Pi_\alpha' = 0$, at functio $\Pi_\alpha'$ ita comparata est ut Constanti Arbitrariae aequiparata suppeditet Integrale completum; porro si reductioni adhibetur aequatio integralis particularis $\Pi_\alpha' = 0$ ex eaque nova deducitur aequatio integralis $\Pi_\alpha = 0$, rursus innotescit functio $\Pi_\alpha$, quae Constanti Arbitrariae aequiparata non quidem aequationum differentialium propositarum (4.), sed reductarum tamen Integrale completum suppeditat. Quod secundum §. 12. poscitur et sufficit.

Designentur $3n$ quantitates $x_i\sqrt{m_i}$, $y_i\sqrt{m_i}$, $z_i\sqrt{m_i}$ per

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{3n},$$

fit e (7.),

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_2} \ldots + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_{3n}}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_{3n}}.$$

Unde secundum propositionem notam, in Commentatione *de formatione atque proprietatibus Determinantium* §. 13. probatam, quantitatum $(\alpha, \beta)$ Determinans exhibere licet ut aggregatum quadratorum Determinantium functionum $\Pi$, $\Pi_1$, .... $\Pi_{k-1}$, formatorum respectu quarumque $k$ e numero quantitatum $\xi_1$, $\xi_2$, .... $\xi_{3n}$ sumtarum, sive ponere licet

$$16. \quad R = M = S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}} \ldots \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}\right\}^2,$$

siquidem $m'$, $m''$, .... $m^{(k)}$ designant quoscunque $k$ diversos ex indicibus 1, 2, .... $3n$. Ex. gr. pro uno puncto, massa $= 1$ praedito, cuius Coordi-

natae orthogonales sunt $x$, $y$, $z$, et quod moveri debet in superficie cuius aequatio $\Pi = 0$, fit

$$M = R = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2;$$

si punctum moveri debet in curva, cuius aequationes sunt $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, fit

$$\begin{aligned} M = R = &\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}\right\}^2 \\ &+ \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right\}^2 \\ &+ \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right\}^2. \end{aligned}$$

Erat $R$ Determinans aequationum linearium, quibus factores *Lagrangiani* $\lambda$, $\lambda_1$ etc. determinantur, qui igitur factores indeterminati aut infiniti evadere nequeunt nisi evanescat $R$. At docet formula (16.), non evanescere posse $R$ nisi singula evanescant Determinantia functionalia

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}.$$

Id quod ubi *identice* fit, ipsarum $\Pi$, $\Pi_1$, .... $\Pi_{k-1}$ una reliquarum functio est, quo casu aequationes conditionales aut sibi contradicunt aut una quae e reliquis sequitur est superflua. Singula Determinantia illa si non quidem identice evanescunt sed ipsarum aequationum $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, .... $\Pi_{k-1} = 0$ adiumento, id indicio est, earum aequationum unam reliquarum ope formam *Quadrati* induere. Eo casu per certas eliminationes et radicis extractionem transformari debent aequationes $\Pi = 0$ etc.; quam praeparationem semper factam esse supponi debet, ut aequationum dynamicarum *Lagrangianarum* usus esse possit.

Si ex antecedentibus semper supponere licet Determinans $R$ non indefinite evanescere, fieri tamen potest ut $R$ evanescat pro punctorum materialium positionibus particularibus determinatis. Quemadmodum si inter tres puncti Coordinatas una vel duae habentur aequationes conditionales repraesentantes superficiem aut curvam apice praeditam, evanescit $R$ si punctum in eo apice collocatur. Ubi agitur de aequilibrio systematis punctorum materialium in eiusmodi positionibus particularibus collocatorum, pro quibus Determinans $R$ evanescit, praecepta statica generalia aut deficiunt aut accuratioribus explicationibus indigent. Nec non si in certo temporis momento systema in motu suo ad tales positiones particulares pervenit, velocitatum intensitates et directiones mutationem finitam in temporis intervallo infinite parvo subeunt. Si, ut in rerum natura fieri solet,

conditiones quibus systema subiicitur non exprimuntur per aequationes, sed per inaequalitates $\Pi > 0$, $\Pi_1 > 0$ etc., inde ab eo temporis momento ipsae plerumque aequationes differentiales (4.) cum aliis commutari debent.

### De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma *Lagrangiana* secunda exhibitarum.

### §. 23.

III. *Lagrange* aequationes differentiales dynamicas generales alia quoque forma memorabili exhibuit, Coordinatarum $3n$ loco, $k$ aequationibus conditionalibus satisfacientium, introducendo $3n-k$ quantitates a se independentes

$$q_1, \; q_2, \; \ldots \; q_{3n-k}.$$

Quarum ipsae Coordinatae $x_i, y_i, z_i$ tales esse debent functiones, quae substitutae in aequationibus conditionalibus $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ etc. sponte iis satisfaciant. Unde etiam aequationem $\Pi_\alpha = 0$ cuiuslibet variabilis $q_m$ respectu differentiando habetur

$$1. \quad \sum_i \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = 0.$$

Statuatur

$$2. \quad \sum_i \left\{ X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = Q_m;$$

consummando $3n$ aequationes (4.) §. pr. respective per $m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m}$, $m_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m}$, $m_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m}$ multiplicatas, evanescunt secundum (1.) aggregata in factores $\lambda$, $\lambda_1$ etc. ducta, unde prodit

$$3. \quad \sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = Q_m.$$

Ponendo $q'_m = \frac{dq_m}{dt}$ et considerando quantitates $x'_i$ ut quantitatum $q_m$, $q'_m$ functiones, quae dantur formula,

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n-k}} q'_{3n-k},$$

sequitur

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m}.$$

Porro

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_2} q'_2 \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_{3n-k}} q'_{3n-k} = \frac{d \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}.$$

Eodem modo pro omnibus tribus Coordinatis fit

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i'}{\partial q_m'} = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}, & \dfrac{\partial y_i'}{\partial q_m'} = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}, & \dfrac{\partial z_i'}{\partial q_m'} = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}, \\ \dfrac{\partial x_i'}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}, & \dfrac{\partial y_i'}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt}, & \dfrac{\partial z_i'}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}. \end{cases}$$

Unde aequatio (3.) sic exhiberi potest,

$$Q_m = \sum_i m_i \left\{ \frac{dx_i'}{dt}\cdot\frac{\partial x_i'}{\partial q_m'} + \frac{dy_i'}{dt}\cdot\frac{\partial y_i'}{\partial q_m'} + \frac{dz_i'}{dt}\cdot\frac{\partial z_i'}{\partial q_m'} \right\}$$

$$= \frac{d.\sum_i m_i \left\{ x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_m'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_m'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_m'} \right\}}{dt} - \sum_i m_i \left\{ x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_m} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_m} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_m} \right\},$$

sive ponendo

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_i \{x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i'\},$$

fit

$$Q_m = \frac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q_m'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_m}.$$

Qua in formula ubi $T$ et quantitates $Q_m$ per $6n-2k$ quantitates $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}, q_1', q_2', \ldots q_{3n-k}'$ exprimuntur atque indici $m$ tribuuntur valores $1, 2, \ldots 3n-k$, obtinentur $3n-k$ aequationes differentiales secundi ordinis inter tempus $t$ atque $3n-k$ variabiles a se independentes $q_m$,

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q_1'}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0, \\ \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q_2'}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q_{3n-k}'}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_{3n-k}} - Q_{3n-k} = 0, \end{cases}$$

quae altera est forma *Lagrangiana* aequationum differentialium dynamicarum. Aequationum (5.) iam investigabo Multiplicatorem.

Sint aequationes dynamicae,

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \ldots\ \varphi_{3n-k} = 0,$$

ubi $\varphi_1$, $\varphi_2$ etc. designent laevas partes aequationum (5.). Statuamus

$$6. \quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{i,i'} q_i' q_{i'}',$$

utroque $i$ et $i'$ ad omnes indices $1, 2, \ldots . 3n-k$ valente et designantibus quantitatibus $a_{i,i'} = a_{i',i}$ solarum $q_1, q_2, \ldots . q_{3n-k}$ functiones. Hinc fit e (5.),

$$\varphi_m = \frac{d\sum_i a_{i,m} q_i'}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial q_m} q_i' q_{i'}' - Q_m,$$

unde ponendo $q_i'' = \frac{d^2 q_i}{dt^2}$ eruitur,

$$7. \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_h''} = a_{h,m} \quad \text{ideoque} \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_h''} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_m''}.$$

Porro si vires sollicitantes $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ a quantitatibus $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ non pendent ideoque etiam quantitates $Q_m$ ipsa $q_1'$, $q_2'$ etc. non implicant, fit

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_h'} = \frac{d a_{h,m}}{dt} + \sum_i \frac{\partial a_{i,m}}{\partial q_h} q_i' - \sum_i \frac{\partial a_{i,h}}{\partial q_m} q_i',$$

unde reiectis terminis se mutuo destruentibus fit

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_h'} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_m'}\right\} = \frac{d a_{h,m}}{dt},$$

sive

$$8. \quad \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_h'} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_m'}\right\} = \frac{d.\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_h''}}{dt} = \frac{d.\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_m''}}{dt}.$$

At e propositione generali, quam sub finem §. 16. tradidi, ponendo $\lambda = 1$ sequitur, ubi formulae (8.) locum habeant, aequationum differentialium (5.) fieri Multiplicatorem

$$9. \quad M_1 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1''} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2''} \ldots . \frac{\partial \varphi_{3n-k}}{\partial q_{3n-k}''} = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots . a_{3n-k,3n-k}.$$

Si rursus $3n$ quantitatum $x_i\sqrt{m_i}$, $y_i\sqrt{m_1}$, $z_i\sqrt{m_i}$ loco ponimus $\xi_1, \xi_2, \ldots . \xi_{3n}$, fit

$$10. \quad T = \tfrac{1}{2}\{\xi_1'\xi_1' + \xi_2'\xi_2' \ldots . \xi_{3n}'\xi_{3n}'\},$$

qua expressione in formula (6.) substituta obtinetur

$$11. \quad a_{i,i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \ldots . + \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{i'}}.$$

Harum quantitatum Determinans, secundum eandem propositionem quam §. pr. allegavi (*De Determ. form. et propr.* §. 13.), aequatur aggregato quadratorum Determinantium functionalium quarumque $3n-k$ e numero functionum $\xi_1$, $\xi_2$, $\ldots . \xi_{3n}$, quantitatum $q_1, q_2, \ldots . q_{3n-k}$ respectu formatorum, sive fit

$$12. \quad M_1 = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots . a_{3n-k,\,3n-k} = S\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \ldots . \frac{\partial \xi_{m(3n-k)}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2,$$

designantibus $m'$, $m''$ etc. quoscunque $3n-k$ ex indicibus 1, 2, .... $3n$.

In deducendis aequationibus differentialibus (5.) supposui, aequationes conditionales tempus $t$ non explicite continere. Quod ubi fit, statuendum erit, functiones, quibus $3n$ quantitates $x_i$, $y_i$, $z_i$ aequantur, praeter $3n-k$ quantitates $q_m$ etiam ipsum $t$ continere. At hinc non mutabuntur formulae (1.), (3.), (4.), ideoque ipsae aequationes (5.) immutatae manebunt. Unde altera quoque forma *Lagrangiana* aequationum differentialium dynamicarum ad hunc valet casum quo aequationes conditionales tempus explicite continent. Neque eo casu mutationem subeunt formulae (7.) et (8.), unde etiam valor Multiplicatoris inventus immutatus manet. Quod breviter adnotare sufficiat.

### De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma tertia exhibitarum. Multiplicatores trium formarum aequationum differentialium dynamicarum inter se comparantur. Principium ultimi multiplicatoris ad tertiam formam relatum.

### §. 24.

Quantitatum $q'_1$, $q'_2$, .... $q'_{3n-k}$ respectu functio $T$ homogenea erat secundi gradus, unde fit

$$2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} \ldots . + q'_{3n-k} \frac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}},$$

sive

$$T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} \ldots . + q'_{3n-k} \frac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}} - T.$$

Si variamus quantitates omnes, quarum $T$ functio est, ponimusque

$$1. \quad \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

sequitur e valore ipsius $T$ praecedente,

$$2. \quad \delta T = q'_1 \delta p_1 + q'_2 \delta p_2 \ldots . + q'_{3n-k} \delta p_{3n-k} - \left\{\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 \ldots . + \frac{\partial T}{\partial q_{3n-k}} \delta q_{3n-k}\right\},$$

ubi in dextra parte bini termini se mutuo destruentes, $\frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i - \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i$, omissi sunt. Formula (2.) docet, si per $3n-k$ aequationes, e (6.) §. pr. fluentes,

$$3. \quad p_i = a_{i,1} q'_1 + a_{i,2} q'_2 \ldots . + a_{i,3n-k} q'_{3n-k},$$

quantitates $q_i'$ per quantitates $p_i$ et $q_i$ exprimantur earumque valores in functione $T$ substituantur, fore ipsius $T$ differentialia partialia quantitatum $q_i$ et $p_i$ respectu sumta, quae uncis includendo distinguamus ab ipsius $T$ differentialibus partialibus quantitatum $q_i$ et $q_i'$ respectu sumtis,

$$4. \quad \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q_i'.$$

Harum formularum ope aequationes differentiales (5.) §. pr. exhibere licet ut systema $6n-2k$ aequationum differentialium primi ordinis inter $t$ et quantitates $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}, p_1, p_2, \ldots p_{3n-k}$,

$$5. \quad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + Q_i.$$

Hae formulae *tertiam* formam aequationum differentialium dynamicarum constituunt. Quas, pro casu quo $3n$ quantitates $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ sunt differentialia partialia eiusdem functionis $U$ respective secundum $x_i$, $y_i$, $z_i$ sumta, primus condidit celeb. *Hamilton*, Astronomus Regius Hibernensis. Eo casu fit e (2.) §. pr. $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, unde statuendo $T-U=H$, si vires non a velocitatibus pendent ideoque $U$ ab ipsis $p_i$ vacua est, aequationes differentiales dynamicae evadunt,

$$6. \quad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

Iam olim quidem ill. *Poisson* in celeberrimo opere de Constantium Arbitrariarum variatione id egerat, ut quantitatum $q_i'$ loco in aequationibus differentialibus dynamicis *Lagrangianis* secundis introduceret quantitates $p_i$; quae aequationes si ea substitutione abeunt in

$$7. \quad \frac{dq_i}{dt} = A_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = B_i,$$

bene idem cognoverat fore

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k}\right) = -\left(\frac{\partial B_k}{\partial p_i}\right), \quad \left(\frac{\partial A_i}{\partial p_k}\right) = \left(\frac{\partial A_k}{\partial p_i}\right), \quad \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_i}\right),$$

unde sequebatur, omnes $6n-2k$ quantitates $A_i$ et $-B_i$ esse differentialia partialia eiusdem functionis, ipsarum $p_i$ et $q_i$ respectu sumta. At meritum, eam functionem $H=T-U$ ipsam assignavisse eaque re aequationibus differentialibus dynamicis formam perfectissimam conciliavisse, celeb. *Hamilton* debetur.

Casu quo mobilium Coordinatae functionibus aequantur quae praeter quantitates $q_i$ ipsum tempus $t$ implicant, forma simplex aequationum (5.) perit,

qua de re hoc quidem loco transformationem *Hamiltonianam* ad eum casum non applicabo.

Facile invenitur aequationum (5.) Multiplicator $M_2$. Etenim si aequationes (5.) per formulas (7.) designamus, fit

$$\frac{d \log M_2}{dt} + \Sigma \left\{ \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial B_i}{\partial p_i}\right) \right\} = 0.$$

At ponendo

$$A_i = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right), \quad B_i = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + Q_i,$$

sequitur, si vires sollicitantes a velocitatibus non pendent ideoque functiones $Q_i$ quantitates $p_1$, $p_2$ etc. non implicant,

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial B_i}{\partial p_i}\right) = 0,$$

ideoque

$$8. \quad M_2 = 1.$$

Si functiones $Q_i$ quoque implicant quantitates $p_i$, definitur $M_2$ per formulam,

$$9. \quad \frac{d \log M_2}{dt} + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \ldots + \frac{\partial Q_{3n-k}}{\partial p_{3n-k}} = 0.$$

Iam tres Multiplicatores $M$, $M_1$, $M_2$, pro tribus aequationum differentialium dynamicarum formis inventos, inter se comparemus.

Forma secunda aequationum differentialium dynamicarum proveniebat e prima reducta per $2k$ aequationes integrales,

$$10. \quad \begin{cases} \Pi = 0, & \Pi_1 = 0, & \ldots. & \Pi_{k-1} = 0, \\ \Pi' = 0, & \Pi'_1 = 0, & \ldots. & \Pi'_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Quae aequationes integrales, licet non completae, ita tamen sunt comparatae ut aequationum differentialium reductarum Multiplicator e Multiplicatore propositarum per eandem formulam obtineatur ac si reductio per aequationes integrales completa facta esset (cf. §§. 10. et 12.). Cum per aequationes (10.) revocentur $6n$ variabiles $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x'_i$, $y'_i$, $z'_i$ ad $6n-2k$ variabiles $q_i$ et $q'_i$, secundum ea quae l. c. tradidi duorum Multiplicatorum Quotiens $\frac{M}{M_1}$ aequatur Determinanti $6n$ functionum

$$\begin{array}{l} \Pi, \ \Pi_1, \ \ldots. \ \Pi_{k-1}, \ q_1, \ q_2, \ \ldots. \ q_{3n-k}, \\ \Pi', \ \Pi'_1, \ \ldots. \ \Pi'_{k-1}, \ q'_1, \ q'_2, \ \ldots. \ q'_{3n-k}, \end{array}$$

formato respectu $6n$ quantitatum $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x'_i$, $y'_i$, $z'_i$. Expressiones novarum variabilium $q_1$, $q_2$ etc. per $x_i$, $y_i$, $z_i$ per aequationes (10.) diversas

subire possunt mutationes, quibus tamen illius Determinantis valor non mutatur (cf. §. 3. (12.)). Ponamus rursus, ut supra, $3n$ quantitates $\xi_i$ loco quantitatum $\sqrt{m_i}\,x_i$, $\sqrt{m_i}\,y_i$, $\sqrt{m_i}\,z_i$, atque $3n$ quantitates $\xi_i'$ loco quantitatum $\sqrt{m_i}\,x_i'$, $\sqrt{m_i}\,y_i'$, $\sqrt{m_i}\,z_i'$, valor ipsius $\frac{M}{M_1}$ etiam aequari poterit Determinanti earundem $6n$ functionum, formato quantitatum $\xi_i$ et $\xi_i'$ respectu, quippe quod ab illo Determinante functionali tantum discrepat factore constante (cubo producti massarum). Cum $3n$ quantitates $\xi_i'$ non reprehendantur in $3n$ functionibus $\Pi_m$ et $q_m$, Determinans Quotienti $\frac{M}{M_1}$ aequale induit formam producti,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \xi_{k+1}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_{k+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial q_{3n-k}}{\partial \xi_{3n}}$$
$$\times \Sigma \pm \frac{\partial \Pi'}{\partial \xi_1'} \cdot \frac{\partial \Pi_1'}{\partial \xi_2'} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{k-1}'}{\partial \xi_k'} \cdot \frac{\partial q_1'}{\partial \xi_{k+1}'} \cdot \frac{\partial q_2'}{\partial \xi_{k+2}'} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial q_{3n-k}'}{\partial \xi_{3n}'}.$$

Cum vero insuper sit

$$\frac{\partial \Pi_m'}{\partial \xi_i'} = \frac{\partial \Pi_m}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial q_m'}{\partial \xi_i'} = \frac{\partial q_m}{\partial \xi_i},$$

utrumque in se ductum Determinans aequale evadit, unde eruitur

$$11. \qquad \frac{M}{M_1} = \left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \xi_{k+1}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_{k+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial q_{3n-k}}{\partial \xi_{3n}}\right\}^2.$$

Sint

$$m', \; m'', \; \ldots \; m^{(3n-k)}$$

indices diversi ex ipsorum $1, 2, \ldots 3n$ numero, supponere licet, ipsas $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}$ expressas esse per solas $3n-k$ quantitates

$$\xi_{m'}, \; \xi_{m''}, \; \ldots \; \xi_{m^{(3n-k)}};$$

tum autem Quotientis $\frac{M}{M_1}$ valor formam simpliciorem induit,

$$12. \qquad \frac{M}{M_1} = \left\{\Sigma \pm \frac{\partial q_1}{\partial \xi_{m'}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_{m''}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial q_{3n-k}}{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}\right\}^2$$
$$\times \left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m^{(3n-k+1)}}} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m^{(3n-k+2)}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(3n)}}}\right\}^2,$$

siquidem $m^{(3n-k+1)}$, $m^{(3n-k+2)}$, .... $m^{(3n)}$ designant $k$ reliquos indicum $1, 2, \ldots 3n$. Unde tandem per formulam notam (*Determ. Funct.* §. 3. (12.)) sequitur,

$$13. \qquad M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2$$
$$= M_1\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m^{(3n-k+1)}}} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m^{(3n-k+2)}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(3n)}}}\right\}^2.$$

Quod antecedentibus suppositum est, novas variabiles $q_1$, $q_2$, .... $q_{3n-k}$ per totidem quantitates $\xi_{m'}$, $\xi_{m''}$ etc. expressas esse, id fieri non potest, quoties ex aequationibus conditionalibus $\Pi = 0$ etc. aequatio inter easdem $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$ etc. sequitur; nam cum $3n-k$ quantitates $q_1$, $q_2$ etc. a se independentes sint, etiam $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$ etc., per quas exprimantur, a se independentes esse debent. Nihilo tamen minus pro eo quoque casu formula (13.) valet. Quoties enim ex aequationibus $\Pi = 0$ etc. fluit aequatio inter solas $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$, $\xi_{m''}$, ..., $\xi_{m^{(3n-k)}}$, hae aequabuntur $3n-k$ functionibus quantitatum $q_1$, $q_2$, .... $q_{3n-k}$ non a se independentibus, quarum functionum Determinans evanescere constat. (*Determ. Funct.* §. 6.) Porro si e $k$ aequationibus $\Pi = 0$ etc. obtineri potest aequatio inter solas $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$, $\xi_{m''}$, .... $\xi_{m^{(3n-k)}}$, fieri debet, ut ex iisdem reliquae $k$ quantitates $\xi_{m^{(3n-k+1)}}$ etc. eliminari possint. At *si de $k$ aequationibus $\Pi = 0$ etc. totidem quantitates eliminari possunt, functionum $\Pi$ etc. Determinans earum quantitatum respectu formatum per ipsas aequationes evanescit* *). Unde casu de quo agitur, utroque Determinante ad dextram et laevam signi aequalitatis posito evanescente, aequatio (13.) iusta manet.

Si, quod secundum antecedentia licet, in aequatione (13.) pro systemate indicum $m'$, $m''$, .... $m^{(3n-k)}$ sumuntur quique $3n-k$ diversi indicum 1, 2, .... $3n$, omnesque $\frac{3n.3n-1....3n-k+1}{1 \cdot 3 \cdot .... \cdot k}$ aequationes provenientes consummantur, prodit aequatio

$$M\,S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1}.\frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2}.... \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2$$
$$= M_1\,S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}}.\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}}.... \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}\right\}^2,$$

ubi in altera summa loco indicum $m^{(3n-k+1)}$, $m^{(3n-k+2)}$, .... $m^{(3n)}$, quippe qui aliam non habent significationem quam quorumque $k$ diversorum ex indicibus

---

*) Ponamus enim, ex aequatione $\Pi = 0$ eliminari posse $k$ quantitates ope reliquarum aequationum $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, .... $\Pi_{k-1} = 0$, per easdem induere debet $\Pi$ formam producti $\mu F$, designante $F$ functionem a $k$ quantitatibus vacuam, ut ex aequationibus conditionalibus sequatur inter reliquas quantitates aequatio $F = 0$. Secundum §. 3. (12.) in Determinante functionum $\Pi$, $\Pi_1$, .... $\Pi_{k-1}$ ipsum $\mu F$ substituere licet functioni $\Pi$. Quoties autem $F = 0$, differentialia prima ipsius $\mu F$ ita formare licet ac si factor $\mu$ constans esset, unde etiam in formando Determinante functionum $\mu F$, $\Pi_1$, $\Pi_2$, .... $\Pi_{k-1}$ habere licet $\mu$ pro Constante. Quod igitur Determinans aequivalebit factori $\mu$ ducto in Determinans functionum $F$, $\Pi_1$, $\Pi_2$, .... $\Pi_{k-1}$, ideoque evanescet, cum $F$ ab ipsis quantitatibus vacua sit, quarum respectu Determinans functionale formatur.

$1, 2, \ldots 3n$, scripsi $m', m'', \ldots m^{(k)}$. Aequatio antecedens perfecte congruit cum supra inventis. Nam secundum formulam (16.) §. 22. aequatur $M$ summae ad dextram, secundum formulam (12.) §. 23. aequatur $M_1$ summae ad laevam signi aequalitatis positae.

Aequationum dynamicarum forma secunda in tertiam mutabatur introducendo variabilium $q_1', q_2', \ldots q_{3n-k}'$ loco totidem alias $p_1, p_2, \ldots p_{3n-k}$. Unde secundum §. 9. tertiae formae Multiplicator $M_2$ e secundae Multiplicatore $M_1$ obtinetur formula,

$$\frac{M_1}{M_2} = \Sigma \pm \frac{\partial p_1}{\partial q_1'} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_2'} \ldots \frac{\partial p_{3n-k}}{\partial q_{3n-k}'}.$$

Dantur autem novae quantitates $p_i$ aequationibus linearibus,

$$p_i = a_{i,1} q_1' + a_{i,2} q_2' \ldots + a_{i,3n-k} q_{3n-k}'$$

posito secundum (11.) §. 23.

$$a_{i,i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \ldots + \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{i'}},$$

unde fit

$$\frac{M_1}{M_2} = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{3n-k, 3n-k}.$$

Quod rursus cum supra inventis congruit, cum secundum (9.) §. pr. aequetur $M_1$ Determinanti ad dextram, secundum (8.) autem $M_2$ *unitati*. Per considerationes antecedentes videmus, e valore $M_2 = 1$, qui sponte patet, inveniri potuisse $M_2$ et $M$, supra via diversissima inventos. Qua methodorum diversitate cum Multiplicatoris tum Determinantium functionalium theoria haud parum illustratur.

Principium ultimi multiplicatoris ad formam aequationum differentialium dynamicarum tertiam relatum sic enunciari potest.

*„Punctorum materialium systema subiectum sit conditionibus et sollicitetur viribus quibuscunque, a sola positione systematis in spatio pendentibus; qua positione determinata per $\mu$ quantitates independentes $q_i$, semisumma virium vivarum $T$ exprimatur per quantitates $q$ et $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$; ad motum systematis definiendum, eliminato tempore, integrandae erunt $2\mu - 1$ aequationes differentiales primi ordinis, quarum inventa sint $2\mu - 2$ Integralia, totidem Constantes Arbitrarias involventia, ita ut integranda restet unica aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles $u$ et $v$,*

$$v' du - u' dv = 0,$$

*designantibus in hac aequatione u' et v' ipsarum u et v functiones quibus quotientes differentiales* $\frac{du}{dt}$ *et* $\frac{dv}{dt}$ *ope Integralium inventorum aequantur; erit huius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles ultimo loco integrandae Multiplicator aequalis Determinanti functionali* $2\mu$ *quantitatum* $q_i$ *et* $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$, *ipsarum u, v atque* $2\mu - 2$ *Constantium Arbitrariarum respectu formato.*

Iam novum principium generale mechanicum exemplis applicabo.

### De motu puncti versus centrum fixum attracti.

### §. 25.

Pro motu libero puncti in plano ex ultimi multiplicatoris principio generali fluit haec

### Propositio.

Proponantur pro motu puncti in plano aequationes differentiales,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

designantibus $X$ et $Y$ Coordinatarum puncti orthogonalium $x$ et $y$ functiones quascunque; si habentur aequationum differentialium propositarum duo Integralia

$$f(x, y, x', y') = \alpha, \qquad \varphi(x, y, x', y') = \beta,$$

ubi $\alpha$ et $\beta$ sunt Constantes Arbitrariae, dabitur orbita puncti formula

$$\int \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)(y'\,dx - x'\,dy) = \gamma$$

sive etiam formula

$$\int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{\frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x'}} = \gamma,$$

ubi duorum Integralium inventorum ope exhibitis $x'$ et $y'$ per $x$, $y$, $\alpha$, $\beta$ quantitates sub integrationis signo differentialia completa fiunt atque $\gamma$ tertiam Constantem Arbitrariam designat.

Aliam propositionem, qua puncti liberi in plano moti orbita Quadraturis definiri potest, si puncti velocitatis intensitas et directio per duo Integralia inventa determinatae sunt, iam ante multos annos cum illustri *Academia Parisiensi* com-

municavi, sed ea propositio tantum respiciebat casum quo vires Coordinatis parallelae $X$ et $Y$ eiusdem quantitatum $x$ et $y$ functionis aequantur differentialibus ipsarum $x$ et $y$ respectu sumtis, dum in propositione antecedente $X$ et $Y$ quantitatum $x$ et $y$ functiones quaecunque esse possunt.

Pro motu puncti in dato plano versus centrum fixum attracti duo constant Integralia principiis conservationis vis vivae et conservationis areae, quibus si principium ultimi multiplicatoris addis, per tria illa principia generalia a priori constat, eius motus determinationem solis Quadraturis absolvi. Quod facto calculo sic comprobatur.

Pro motu proposito habentur aequationes differentiales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{xF(r)}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{yF(r)}{r},$$

ubi $x$ et $y$ Coordinatae orthogonales sunt, quarum initium in centro attractionis est; porro $r = \sqrt{(xx+yy)}$ atque $F(r)$ intensitas vis attractivae pro distantia $r$. Posito

$$R = \int F(r)dr,$$

e principiis generalibus mechanicis conservationis vis vivae et areae statim habentur duo Integralia,

$$f = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y') + R = \alpha,$$
$$\varphi = \quad xy' - yx' \quad = \beta,$$

designantibus $\alpha$ et $\beta$ Constantes Arbitrarias. Unde fit,

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = xx'+yy'.$$

E duobus Integralibus appositis sequitur

$$xx'+yy' = \sqrt{\varrho},$$

posito

$$\varrho = 2r^2(\alpha - R) - \beta\beta.$$

Unde secundum principium ultimi Multiplicatoris dabitur puncti orbita per aequationem,

$$\int \frac{y'dx - x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}} = \int \frac{y'dx - x'dy}{\sqrt{\varrho}} = \gamma,$$

designante $\gamma$ novam Constantem Arbitrariam. Ex aequationibus,

$$xy' - yx' = \beta, \qquad xx' + yy' = \sqrt{\varrho},$$

sequitur

$$x' = \frac{x\sqrt{\varrho}-\beta y}{rr}, \qquad y' = \frac{y\sqrt{\varrho}+\beta x}{rr};$$

unde substituendo $x\,dx+y\,dy = r\,dr$ fit

$$\frac{y'dx-x'dy}{\sqrt{\varrho}} = \frac{ydx-xdy}{rr} + \frac{\beta dr}{r\sqrt{\varrho}}.$$

Posito igitur $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, unde $y\,dx-x\,dy = -rr\,d\vartheta$, dabitur orbita per formulam,

$$\vartheta+\gamma = \beta\int\frac{dr}{r\sqrt{(2r^2(\alpha-R)-\beta\beta)}}.$$

Si lex attractionis est *Neutoniana*, ponendum est $F(r) = \frac{k^2}{rr}$, $R = -\frac{k^2}{r}$, designante $k^2$ vim attractivam pro unitate distantiae, institutaque integratione prodit aequatio sectionis conicae inter Coordinatas polares $r$, $\vartheta+\gamma$.

Aequationum differentialium antecedentium dextrae parti addamus *Coordinatarum $x$ et $y$ functiones homogeneas* $(-3)^{tae}$ *dimensionis*, $X$ et $Y$, aequationum differentialium provenientium,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\frac{F(r)}{r}+X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y\frac{F(r)}{r}+Y,$$

semper aliquod obtineri poterit Integrale. Nam ex his aequationibus eruitur,

$$\tfrac{1}{2}d.\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x\,dy-y\,dx)(x\,Y-y\,X) = x^2(x\,Y-y\,X)\,d.\frac{y}{x}.$$

At est $x^2(x\,Y-y\,X)$ functio variabilium $x$ et $y$ homogenea *nullae* dimensionis ideoque functio ipsius $\frac{y}{x}$, unde aequationis antecedentis pars utraque est differentiale completum, factaque integratione prodit

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(xy'-yx')^2 - V = \tfrac{1}{2}\beta^2,$$

siquidem $\beta$ Constans Arbitraria est atque

$$V = \int x^2(x\,Y-y\,X)\,d\frac{y}{x}.$$

Si $X$ et $Y$ sunt differentialia partialia functionis homogeneae $(-2)^{tae}$ dimensionis $U$, ipsarum $x$ et $y$ respectu sumta, principium conservationis vis vivae alterum suppeditat Integrale

$$f = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')+R-U = \alpha,$$

siquidem $\alpha$ est altera Constans Arbitraria atque rursus

$$R = \int F(r)\,dr.$$

Functiones $f$ et $\varphi$ inventas substituendo fit

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}=(xx'+yy')(xy'-yx').$$

At ex Integralibus inventis eruitur

$$(xx'+yy')(xy'-yx')=\sqrt{\{2r^2(\alpha-R+U)-(2V+\beta^2)\}}.\sqrt{(2V+\beta^2)},$$

quippe ponendo

$$2r^2(\alpha-R+U)-(2V+\beta^2)=\varrho,$$

fit

$$xy'-yx'=\sqrt{(2V+\beta^2)},\qquad xx'+yy'=\sqrt{\varrho}.$$

Hinc sequitur

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}=\sqrt{\varrho}.\sqrt{(2V+\beta^2)};$$

$$x'=\frac{x\sqrt{\varrho}-\sqrt{(2V+\beta^2)}.y}{rr},$$

$$y'=\frac{y\sqrt{\varrho}+\sqrt{(2V+\beta^2)}.x}{rr}.$$

Quibus formulis substitutis in tertio Integrali, quod principio ultimi multiplicatoris suppeditatur,

$$\int\frac{y'dx-x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}}=\gamma,$$

obtinetur formula quae puncti orbitam determinat,

$$\int\left(\frac{ydx-xdy}{rr\sqrt{(2V+\beta^2)}}+\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}}\right)=\gamma,$$

sive ponendo rursus $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$,

$$\int\left(\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}}-\frac{d\vartheta}{\sqrt{(2V+\beta^2)}}\right)=\gamma,$$

semper designante $\gamma$ tertiam Constantem Arbitrariam. Cum sit $U$ functio homogenea $(-2)^{ti}$ ordinis, erit

$$2U=-\left\{x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right\}=-\{xX+yY\},$$

unde

$$\begin{aligned}d.r^2U&=-\{xX+yY\}(xdx+ydy)+\{xx+yy\}(Xdx+Ydy)\\&=(xY-yX)(xdy-ydx).\end{aligned}$$

Eadem quantitas aequabatur ipsi $dV$, unde in formulis antecedentibus statuere licet

$$V=rrU,$$

$$\varrho=2r^2(\alpha-R)-\beta^2.$$

Secundum suppositionem factam fit $r^2 U = V$ ipsius $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \vartheta$ functio, unde in aequatione orbitae,

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{(2r^2(\alpha - R) - \beta^2)}} = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{(2V + \beta^2)}} + \gamma,$$

alterum integrale solius $r$, alterum solius $\vartheta$ functio est. Temporis expressio habetur per formulam

$$t + \tau = \int \frac{r\,dr}{xx' + yy'} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\varrho}} = \int \frac{r^2\,d\vartheta}{\sqrt{(2V + \beta^2)}},$$

in qua $\tau$ est nova Constans Arbitraria.

In motu antecedentibus considerato vis $F(r)$, qua punctum versus centrum fixum attrahitur, aucta est alia vi, quae secundum axes orthogonales disposita differentialibus partialibus $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ aequatur. Eadem vis secundum radii vectoris directionem eique perpendiculariter disposita evadit

$$P = \frac{1}{r}\left\{x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right\}, \qquad Q = \frac{1}{r}\left\{y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y}\right\}.$$

Secundum suppositionem de functionis $U$ indole factam statui potest

$$r^2 U = V = \Psi(\vartheta),$$

designante $\Psi(\vartheta)$ functionem anguli $\vartheta$ quem radius vector cum axe fixo format. Qua expressione substituta positoque $\frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} = \Psi'(\vartheta)$, eruitur

$$P = -\frac{2}{r^3}\Psi(\vartheta), \qquad Q = -\frac{1}{r^3}\Psi'(\vartheta).$$

Si iam ponitur

$$\beta\int\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}} = \beta\int\frac{dt}{r^2} = \beta\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{(2\Psi(\vartheta) + \beta^2)}} = \Theta,$$

docent formulae antecedentibus inventae, illis viribus $P$ et $Q$ ad vim attractivam $F(r)$ accedentibus orbitae aequationem polarem eam mutationem subire ut angulus $\vartheta$ in angulum $\Theta$ mutetur. At simul videmus, *illa virium P et Q accessione relationem inter radium vectorem et tempus omnino immutatam manere.* Quae curiosa propositio valet etiam si non quod antecedentibus supposui motus in plano fit. Sit enim $U$ ipsarum $x$, $y$, $z$ functio homogenea $(-2)^{\text{tae}}$ dimensionis, ac proponantur aequationes differentiales,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F(r)+\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F(r)+\frac{\partial U}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r}F(r)+\frac{\partial U}{\partial z};$$

rursus $\int F(r)\,dr = R$ ponendo sequitur,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(-R+U+\alpha),$$
$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2} = -rF(r)-2U.$$

Quibus additis fit

$$d\left\{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right\} = d.r\frac{dr}{dt} = \{2(\alpha-R)-rF(r)\}dt,$$

unde multiplicando per $2r\frac{dr}{dt}$ et integrando prodit,

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2r^2(\alpha-R)+\varepsilon,$$

ideoque

$$t+\tau = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{\{2r^2(\alpha-R)+\varepsilon\}}},$$

qua in formula $\tau$ et $\varepsilon$ Constantes Arbitrariae sunt. Patet autem quod demonstrandum erat, in hac formula nullum functionis $U$ vestigium remansisse. Addo, si $U$ gaudeat forma particulari,

$$U = \frac{1}{r^2}\left\{f\left(\frac{x}{r}\right)+\varphi\left(\frac{y}{r}\right)\right\},$$

designantibus $f$ et $\varphi$ functiones quascunque, eum ipsum motum, qui in plano non continetur, totum Quadraturis determinari posse.

Motus puncti in spatio pendet a ***quinque*** aequationibus differentialibus primi ordinis inter ***sex*** quantitates $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$; unde ***quatuor*** Integralibus egemus ut problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles revocetur, quae ope principii ultimi multiplicatoris per solas Quadraturas integrabitur. At quoties vires sollicitantes diriguntur versus axem fixum viriumque intensitates non pendent ab angulo quem planum per axem et mobile ductum cum plano fixo per eundem axem transeunte facit, problema ad motum puncti in plano revocari potest, et nonnisi ***duobus*** Integralibus opus erit ut totum absolvatur Quadraturis. Designantibus enim $x$, $v$, $\zeta$ puncti Coor-

dinatas orthogonales positoque

$$vv+\zeta\zeta = yy,$$

sint aequationes differentiales, quibus motus puncti definitur,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = Y\frac{v}{y}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Y\frac{\zeta}{y},$$

ubi secundum suppositionem factam et $X$ et $Y$ solarum $x$ et $y$ functiones esse debent: erit

$$v\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2v}{dt^2} = 0,$$

unde sequitur,

$$v\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{dv}{dt} = \alpha,$$

designante $\alpha$ Constantem Arbitrariam. Fit autem,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\sqrt{(vv+\zeta\zeta)}}{dt^2} = \frac{(v\,d\zeta-\zeta\,dv)^2}{\sqrt{(vv+\zeta\zeta)^3}.dt^2} + \frac{v\,d^2v+\zeta\,d^2\zeta}{\sqrt{(vv+\zeta\zeta)}.dt^2},$$

ideoque

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\alpha\alpha}{y^3} + Y.$$

Unde aequationes differentiales propositae evadunt sequentes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\alpha\alpha}{y^3} + Y.$$

Cf. *Diar. Crell. Vol. XXIV. pag. 16 sqq.* Ponendo,

$$v = y\cos f, \qquad \zeta = y\sin f,$$

fit

$$v\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{dv}{dt} = yy\frac{df}{dt} = \alpha,$$

unde Constans $\alpha$ aequabitur plani per punctum mobile et axem fixum ducti velocitati rotatoriae initiali, multiplicatae per quadratum distantiae initialis puncti ab axe. Duobus Integralibus inter $x$, $y$, $x'$, $y'$ inventis, tertium integrale principio ultimi Multiplicatoris suppeditatur. Quorum Integralium ope si $y' = \frac{dy}{dt}$ per $y$ exprimitur, cum rotationis angulus $f$ tum tempus $t$ Quadraturis determinantur ope formularum,

$$f = \alpha\int\frac{dt}{y^2} = \alpha\int\frac{dy}{y^2y'}, \qquad t = \int\frac{dy}{y'}.$$

Unde in casu proposito cognitis *duobus* Integralibus tria reliqua a solis Quadraturis pendent. Consideretur ex. gr. motus puncti versus centrum fixum

attracti; posito $r = \sqrt{(xx+yy)}$, secundum antecedentia erit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F(r); \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F(r)+\frac{\alpha\alpha}{y^3}.$$

Quae aequationes in eas redeunt, quas supra integravi, ponendo

$$V = \frac{\alpha\alpha}{y^2}; \qquad U = -\frac{\alpha\alpha}{2yy} = -\frac{\alpha\alpha}{2rr\sin\vartheta^2};$$

unde

$$V = \Psi(\vartheta) = -\frac{\alpha\alpha}{2\sin\vartheta^2};$$

$$\Theta = \int\frac{\beta.d\vartheta}{\sqrt{(2\Psi(\vartheta)+\beta^2)}} = \int\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(\beta^2\sin\vartheta^2-\alpha^2)}},$$

ideoque,

$$\cos\Theta = \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}}\cos\vartheta.$$

Si $r$ et $\vartheta$ sunt puncti attracti Coordinatae polares in plano fixo in quo illud revera movetur, in aequatione orbitae, quam in hoc plano describit, angulus $\Theta$ loco ipsius $\vartheta$ substitui debet ut eruatur orbita descripta in plano mobili per axem ipsarum $x$ ducto. Relationem inter $r$ et $t$ pro motu in utroque plano eandem manere, ex ipsa natura rei patet. Plani angulus rotatorius $f$ datur per formulam,

$$df = \frac{\alpha\,dt}{yy} = \frac{\alpha\,dt}{rr\sin^2\vartheta} = \frac{d\Theta}{\sin^2\vartheta} = \frac{\alpha\beta.d\Theta}{\alpha^2\cos\Theta^2+\beta^2\sin\Theta^2},$$

unde, designante $\varepsilon$ Constantem Arbitrariam,

$$\tang(f+\varepsilon) = \frac{\beta}{\alpha}\tang\Theta.$$

Si per centrum attractionis ex arbitrio axis fixus ducitur, in formulis antecedentibus axem Coordinatarum $x$ pro axe fixo sumendo motus puncti attracti componitur e motu puncti in plano per ipsum et axem fixum ducto eiusque plani rotatione circa axem fixum. Statuatur $\alpha = \beta\sin\delta$, erit

$$\cos\vartheta = \cos\delta\cos\Theta, \quad \tang\Theta = \sin\delta\tang(f+\varepsilon), \quad \sin\vartheta\sin(f+\varepsilon) = \sin\Theta.$$

E centro attractionis describatur superficies sphaerica, cuius intersectio cum axe fixo, cum radio vectore et cum plano orbitae puncti attracti sit $A$, $P$ et circulus maximus $PQ$; porro in sphaera e $A$ ad circulum maximum $PQ$ demittatur perpendicularis $AO$: in triangulo rectangulo sphaerico $AOP$ erit

$$AO = \delta, \quad AP = \vartheta, \quad PO = \Theta, \quad OAP = f+\varepsilon.$$

Cuius constructionis ope formulae antecedentes geometrice comprobari possunt.

Si punctum versus centra fixa quotcunque in eadem recta disposita secundum *Neutonianam* sive aliam quamcunque legem attrahitur, quibus attractionis viribus accedere potest vis constans rectae parallela, e duobus Integralibus, quae antecedentibus poscebantur ut reliquae integrationes omnes Quadraturis absolverentur, alterum conservationis vis vivae principio suppeditatur. Si abest vis constans atque duo tantum sunt centra attrahentia lexque attractionis est *Neutoniana*, alterum Integrale *Eulerus* invenit. Eo igitur casu motus ille principio conservationis areae certi cuiusdam axis respectu valentis, principio conservationis vis vivae, Integrali *Euleriano*, tandem principio ultimi multiplicatoris ad Quadraturas revocatur. Quod iam accuratius exponam.

Motus puncti versus duo centra fixa secundum legem *Neutonianam* attracti.

§. 26.

Punctum inter utrumque centrum medium sumatur pro initio Coordinatarum, recta centra iungens pro axe Coordinatarum $x$, sit porro $y$ distantia mobilis ab hoc axe. Si massae centrorum sunt $m$ et $m'$ atque $a$ semidistantia centrorum, secundum antecedentia valebunt inter $x$ et $y$ aequationes differentiales sequentes,

$$1. \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m(x-a)}{\{(x-a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'(x+a)}{\{(x+a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{\{(x-a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'y}{\{(x+a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha\alpha}{y^3}, \end{cases}$$

designante $\alpha$ Constantem Arbitrariam. Porro angulus rotationis plani per axem et mobile ducti datur formula,

$$2. \quad df = \frac{\alpha\, dt}{yy}.$$

A principio conservationis vis vivae integrale suppeditatur hoc,

$$3. \quad \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y') = \frac{m}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{m'}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha\alpha}{2y^2} + \beta,$$

designante $\beta$ alteram Constantem Arbitrariam. Integrale *Eulerianum* invenitur deducendo ex aequationibus (1.) sequentem,

$$d(xy'-yx') = -\frac{may\, dt}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'ay\, dt}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2x\, dt}{y^2},$$

unde fit

$$\tfrac{1}{2}d.(xy'-yx')^2 = -\frac{may\{(x-a)dy-ydx\}}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{m'ay\{(x+a)dy-ydx\}}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\frac{a^2x(xdy-ydx)}{y^2}-\frac{ma^2ydy}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}-\frac{m'a^2ydy}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc aequationum (1.) alteram substituendo fluit

$$\tfrac{1}{2}d.(xy'-yx')^2 = -\tfrac{1}{2}ma\frac{d.\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+\tfrac{1}{2}m'a\frac{d.\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{y}{x+a}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha^2 d.\left(\frac{x}{y}\right)^2+a^2y'dy'-\alpha^2a^2\frac{dy}{y^3}.$$

Cuius aequationis termini singuli cum differentialia completa sint, obtinetur Integrale,

$$4.\quad (xy'-yx')^2+\text{Const.}$$
$$=\frac{2ma(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2m'a(x+a)}{\{(x+a^2)+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^2x^2}{y^2}+a^2y'^2+\frac{a^2a^2}{y^2}.$$

Si ponitur

$$5.\quad \begin{cases} L = \dfrac{2m}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2m'}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{\alpha a}{y^2}+2\beta, \\ M = \dfrac{2ma(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2m'a(x+a)}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^2}{y^2}(a^2-x^2+y^2)+\gamma, \end{cases}$$

duo Integralia inventa evadunt

$$6.\quad x'x'+y'y' = L, \quad (xy'-yx')^2-a^2y'y' = M,$$

sive

$$f = \beta, \quad \varphi = \gamma,$$

siquidem statuitur

$$f = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')-\tfrac{1}{2}L+\beta,$$
$$\varphi = (xy'-yx')^2-a^2y'y'-M+\gamma.$$

Si duorum Integralium ope et $x'$ et $y'$ per $x$ et $y$ exhibentur, secundum principium ultimi multiplicatoris obtinetur tertium Integrale,

$$\int\frac{y'dx-x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x'}} = \text{Const.}$$

At cum et $L$ et $M$ ab ipsis $x'$ et $y'$ vacua sint, fit

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = x', \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = y',$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = -2y(xy'-yx'), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2x(xy'-yx')-2a^2y'.$$

Quibus formulis substitutis eruitur

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 2(xx'+yy')(xy'-yx')-2a^2x'y' \\ = -2\{xy(x'x'-y'y')+(aa-xx+yy)x'y'\}.$$

Unde tertium Integrale evadit

$$7.\quad \int \frac{y'dx-x'dy}{xy(x'x'-y'y')+(aa-xx+yy)x'y'} = \varepsilon,$$

designante $\varepsilon$ Constantem Arbitrariam.

In formula antecedente expressio sub integrationis signo posita, quantitatum $x'$ et $y'$ valoribus substitutis, evadere debet differentiale completum. Qui valores ut eruantur et commoda substitutio fiat, adhibeo methodum in calculis algebraicis usitatam, videlicet addo aequationes (6.), altera multiplicata factore $\lambda$, quem hac conditione determino, ut aequationis provenientis pars laeva evadat quadratum functionis ipsorum $x'$ et $y'$ linearis. Ea ratione venit

$$8.\quad (x^2-a^2+\lambda)y'y'-2xy\,x'y'+(y^2+\lambda)x'x' = M+\lambda L,$$

quantitate $\lambda$ determinata per aequationem

$$9.\quad 0 = (\lambda+yy)(\lambda+xx-aa)-xxyy \\ = \lambda^2+\lambda(xx+yy-aa)-aayy.$$

Huius aequationis quadraticae radices vocemus $\lambda'$ et $\lambda''$, erit

$$10.\quad aayy = -\lambda'\lambda'',\quad xx+yy = aa-\lambda'-\lambda'',\quad aaxx = (aa-\lambda')(aa-\lambda'').$$

Hinc quadrata distantiarum puncti mobilis a centris attractionum fiunt

$$(x\pm a)^2+y^2 = 2a^2-\lambda'-\lambda''\pm 2\sqrt{((aa-\lambda')(aa-\lambda''))},$$

ideoque ipsae distantiae

$$11\quad \{(x\pm a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(aa-\lambda')}\pm\sqrt{(aa-\lambda'')}.$$

Porro fit

$$\lambda'-aa\pm ax = -\sqrt{(aa-\lambda')}\{\sqrt{(aa-\lambda')}\mp\sqrt{(aa-\lambda'')}\},$$
$$\lambda''-aa\pm ax = \pm\sqrt{(aa-\lambda'')}\{\sqrt{(aa-\lambda')}\mp\sqrt{(aa-\lambda'')}\},$$

ideoque

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda'-aa\pm ax}{\{(x\mp a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{(aa-\lambda')}, \\ \dfrac{\lambda''-aa\pm ax}{\{(x\mp a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{(aa-\lambda'')}. \end{cases}$$

Si has formulas substituimus in (5.), sequitur, quantitatem $M+\lambda' L$ solius $\lambda'$, quantitatem $M+\lambda'' L$ solius $\lambda''$ functionem esse. Etenim si advocamus formulas

e (10.) fluentes

$$13.\quad \begin{cases} \frac{a^2-x^2-\lambda'}{y^2} = \frac{y^2+\lambda''}{y^2} = 1-\frac{a^2}{\lambda'}, \\ \frac{a^2-x^2-\lambda''}{y^2} = \frac{y^2+\lambda'}{y^2} = 1-\frac{a^2}{\lambda''}, \end{cases}$$

e (5.), (12.), (13.) eruitur

$$14.\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(M+\lambda' L) = -(m+m')\sqrt{(aa-\lambda')}+\alpha\alpha\left(1-\frac{aa}{2\lambda'}\right)+\beta\lambda'+\frac{1}{2}\gamma, \\ \frac{1}{2}(M+\lambda'' L) = \quad (m-m')\sqrt{(aa-\lambda'')}+\alpha\alpha\left(1-\frac{aa}{2\lambda''}\right)+\beta\lambda''+\frac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Ipsae quibus $x'$ et $y'$ determinantur aequationes e (8.) prodeunt substituendo ipsius $\lambda$ valores $\lambda'$ et $\lambda''$. Quae aequationes per $-a^2$ multiplicatae, formulis (10.) substitutis, evadunt

$$\lambda''(a^2-\lambda')y'y'+2\sqrt{(-\lambda'\lambda''(a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-\lambda'(a^2-\lambda'')x'x' = -a^2(M+\lambda' L),$$

$$\lambda'(a^2-\lambda'')y'y'+2\sqrt{(-\lambda'\lambda''(a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-\lambda''(a^2-\lambda')x'x' = -a^2(M+\lambda'' L),$$

sive extractis radicibus,

$$15.\quad \begin{cases} \sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.y'+\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.x' = a\sqrt{-(M+\lambda' L)}, \\ \sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.y'-\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.x' = a\sqrt{(M+\lambda'' L)}. \end{cases}$$

Easdem aequationes (10.) differentiando sequitur

$$2a(y'dx-x'dy) = y'd.\sqrt{((a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-x'd.\sqrt{(-\lambda'\lambda'')}$$
$$= \frac{-d\lambda'}{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda'))}}\{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.y'-\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.x'\}$$
$$\frac{-d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda''))}}\{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.y'+\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.x'\}.$$

Unde formulas (15.) substituendo prodit:

$$16.\quad 2(y'dx-x'dy) = -\frac{\sqrt{(M+\lambda'' L)}.d\lambda'}{\sqrt{(-\lambda'(aa-\lambda'))}}-\frac{\sqrt{-(M+\lambda' L)}.d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(aa-\lambda''))}}.$$

Aequationibus (15.) in se ductis et rursus (10.) advocatis eruitur

$$17.\quad xy(y'y'-x'x')+(x^2-y^2-a^2)x'y' = \sqrt{(-(M+\lambda' L)(M+\lambda'' L))}.$$

Per hanc formulam ubi dividimus antecedentem (16.), prodit

$$18.\quad \frac{y'dx-x'dy}{xy(x'x'-y'y')+(a^2-x^2+y^2)x'y'}$$
$$= \frac{-d\lambda'}{2\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}}+\frac{d\lambda''}{2\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}.$$

Hanc supra vidimus expressionem secundum principium ultimi Multiplicatoris fieri debere differentiale completum. Ac revera, quantitatum $\frac{1}{2}(M+\lambda' L)$ et $\frac{1}{2}(M+\lambda'' L)$ valoribus (14.) substitutis, in ea expressione differentiale $d\lambda'$ per solius $\lambda'$, differentiale $d\lambda''$ per solius $\lambda''$ functionem multiplicatum reprehenditur. Unde, formula (18.) substituta in (7.), tertium integrale per duas Quadraturas obtinetur.

Si formulas adiicere placet, quibus $t$ et $f$ per $\lambda'$ et $\lambda''$ solarum ope Quadraturarum determinantur, differentietur aequatio (9.), posito $\lambda = \lambda'$, unde prodit

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda'-\lambda'')\,d\lambda' + 2\lambda' x\,dx - 2(a^2-\lambda')y\,dy \\ &= (\lambda'-\lambda'')\,d\lambda' - \frac{2}{a}\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda'))}\{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}\,dx + \sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}\,dy\} \\ &= (\lambda'-\lambda'')\,d\lambda' + 2\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}\,.\,dt. \end{aligned}$$

Hinc, si aequationem differentialem

$$19. \quad \frac{d\lambda'}{\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} = \frac{d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}$$

advocamus, obtinemus

$$20. \quad dt = -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda'}\,d\lambda'}{\sqrt{((a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} + \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda''}\,d\lambda''}{\sqrt{((a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}},$$

$$21. \quad df = \frac{-\alpha a^2\,dt}{\lambda'\lambda''}$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha a^2\left\{-\frac{1}{\sqrt{\lambda'^3}}\cdot\frac{d\lambda'}{\sqrt{((a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda''^3}}\cdot\frac{d\lambda''}{\sqrt{((a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}\right\}.$$

His formulis videmus, ad variabilium $t$ et $f$ valores per Quadraturas inveniendos non opus esse ut antea variabilium $\lambda'$ et $\lambda''$ altera per alteram expressa habeatur.

### De corporis solidi ictu impulsi rotatione circa punctum fixum.

### §. 27.

Exemplum applicationis principii ultimi multiplicatoris ad motum non liberum suppeditet rotatio solidi circa punctum eius fixum, si corpus solo ponitur ictu impulsum esse, nulla accedente vi acceleratrice. Valet pro eo motu principium conservationis virium vivarum nec non cuiuslibet plani respectu principium conservationis arearum. Quibus si additur principium ultimi multiplicatoris, per sola principia generalia problema olim difficillimum ad Quadraturas reducetur.

Sint $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$ Coordinatae orthogonales ad axes relatae in solido fixos, in spatio mobiles, quorum initium punctum fixum sit circa quod solidum rotatur. Sint $x$, $y$, $z$ Coordinatae orthogonales eodem initio gaudentes, ad axes in spatio fixos relatae. In aequationibus, quae inter utrasque Coordinatas locum habent,

1. $$x = \alpha\xi + \beta\upsilon + \gamma\zeta, \quad y = \alpha_1\xi + \beta_1\upsilon + \gamma_1\zeta, \quad z = \alpha_2\xi + \beta_2\upsilon + \beta_2\zeta,$$

sunt $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$ Constantes, novem Coëfficientes $\alpha$, $\beta$ etc. variabiles, inter quas relationes notae intercedunt, quibus illae ad quantitates tres revocari possunt *). Adhibita differentialium notatione ***Lagrangiana*** e (1.) sequitur

$$x' = \alpha'\xi + \beta'\upsilon + \gamma'\zeta, \quad y' = \alpha_1'\xi + \beta_1'\upsilon + \gamma_1'\zeta, \quad z' = \alpha_2'\xi + \beta_2'\upsilon + \gamma_2'\zeta.$$

Ponamus

$$\begin{aligned} \beta\gamma' + \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' &= -\{\gamma\beta' + \gamma_1\beta_1' + \gamma_2\beta_2'\} = a, \\ \gamma\alpha' + \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' &= -\{\alpha\gamma' + \alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2'\} = b, \\ \alpha\beta' + \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' &= -\{\beta\alpha' + \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2'\} = c; \end{aligned}$$

ex aequationibus

$$\alpha\alpha' + \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' = 0, \quad \beta\alpha' + \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' = -c, \quad \gamma\alpha' + \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' = b,$$

quarum prima e formula $\alpha\alpha + \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 = 1$ sequitur, fluit

$$\alpha' = -\beta c + \gamma b, \quad \alpha_1' = -\beta_1 c + \gamma_1 b, \quad \alpha_2' = -\beta_2 c + \gamma_2 b,$$

eodemque modo obtinetur

$$\begin{aligned} \beta' &= -\gamma a + \alpha c, & \gamma' &= -\alpha b + \beta a, \\ \beta_1' &= -\gamma_1 a + \alpha_1 c, & \gamma_1' &= -\alpha_1 b + \beta_1 a, \\ \beta_2' &= -\gamma_2 a + \alpha_2 c, & \gamma_2' &= -\alpha_2 b + \beta_2 a. \end{aligned}$$

Quibus valoribus substitutis eruitur,

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(c\upsilon - b\zeta) + \beta(a\zeta - c\xi) + \gamma(b\xi - a\upsilon), \\ y' &= \alpha_1(c\upsilon - b\zeta) + \beta_1(a\zeta - c\xi) + \gamma_1(b\xi - a\upsilon), \\ z' &= \alpha_2(c\upsilon - b\zeta) + \beta_2(a\zeta - c\xi) + \gamma_2(b\xi - a\upsilon). \end{aligned}$$

---

*) Formulae (1.) si Coordinatarum orthogonalium transformationem exprimunt, fit $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = \pm\alpha$ etc., $\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = \pm 1$. At in hac rotationis quaestione, iam alibi adnotavi, semper signum + sumendum esse. Ponamus enim inter binorum corporum puncta correlationem dari talem, ut alterius corporis puncto, cuius Coordinatae sunt $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$, respondeat alterius corporis punctum cuius Coordinatae ad *eosdem* axes relatae valoribus $x$, $y$, $z$ gaudent: prout in illis formulis signum + aut — locum habet, erunt corpora aut *congruentia* aut uti dicitur *symmetrica*. Casu posteriore autem fieri non potest ut alterum corpus in alterius positione collocetur, neque igitur rotatione alterum in alterius locum pervenire potest.

Unde sequitur

$$2. \quad x'x'+y'y'+z'z' = (cv-b\zeta)^2+(a\zeta-c\xi)^2+(b\xi-av)^2.$$

Porro e (1.) proveniunt formulae,

$$\begin{array}{lll} \alpha_2 y-\alpha_1 z=\beta\zeta-\gamma v, & \alpha z-\alpha_2 x=\beta_1\zeta-\gamma_1 v, & \alpha_1 x-\alpha y=\beta_2\zeta-\gamma_2 v, \\ \beta_2 y-\beta_1 z=\gamma\xi-\alpha\zeta, & \beta z-\beta_2 x=\gamma_1\xi-\alpha_1\zeta, & \beta_1 x-\beta y=\gamma_2\xi-\alpha_2\zeta, \\ \gamma_2 y-\gamma_1 z=\alpha v-\beta\xi, & \gamma z-\gamma_2 x=\alpha_1 v-\beta_1\xi, & \gamma_1 x-\gamma y=\alpha_2 v-\beta_2\xi. \end{array}$$

Unde substitutis ipsorum $x'$, $y'$, $z'$ valoribus eruitur,

$$3. \quad \begin{cases} yz'-zy' = (\beta\zeta-\gamma v)(cv-b\zeta)+(\gamma\xi-\alpha\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha v-\beta\xi)(b\xi-av), \\ zx'-xz' = (\beta_1\zeta-\gamma_1 v)(cv-b\zeta)+(\gamma_1\xi-\alpha_1\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha_1 v-\beta_1\xi)(b\xi-av), \\ xy'-yx' = (\beta_2\zeta-\gamma_2 v)(cv-b\zeta)+(\gamma_2\xi-\alpha_2\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha_2 v-\beta_2\xi)(b\xi-av). \end{cases}$$

Axes Coordinatarum $\xi$, $v$, $\zeta$ semper ita in ipso solido disponere licet ut, designante $dm$ solidi elementum cuius Coordinatae sunt $\xi$, $v$, $\zeta$, sit

$$S.v\zeta\, dm = 0, \quad S.\zeta\xi\, dm = 0, \quad S.\xi v\, dm = 0,$$

summis ad omnia elementa materialia corporis extensis. Unde ponendo

$$A = S(vv+\zeta\zeta)dm, \quad B = S(\zeta\zeta+\xi\xi)dm, \quad C = S(\xi\xi+vv)dm,$$

fit e (2.) et (3.),

$$4. \quad T = \tfrac{1}{2}S\{x'x'+y'y'+z'z'\}dm = \tfrac{1}{2}\{Aaa+Bbb+Ccc\},$$

$$5. \quad \begin{cases} L = S(yz'-zy')dm = -\{\alpha.Aa+\beta.Bb+\gamma.Cc\}, \\ M = S(zx'-xz')dm = -\{\alpha_1.Aa+\beta_1.Bb+\gamma_1.Cc\}, \\ N = S(xy'-yx')dm = -\{\alpha_2.Aa+\beta_2.Bb+\gamma_2.Cc\}. \end{cases}$$

Quibus in formulis secundum principia conservationis virium vivarum et arearum quatuor quantitates $T$, $L$, $M$, $N$ aequantur Constantibus Arbitrariis.

Novem Coëfficientes $\alpha$, $\beta$ etc. per tres angulos $q_1$, $q_2$, $q_3$ exprimamus ope formularum notissimarum, quas olim *Eulerus* in *Introductione in Anal. Infin.* dedit,

$$6. \quad \begin{cases} \alpha = \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3, \\ \alpha_1 = \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3, \\ \alpha_2 = -\sin q_1 \sin q_3; \\ \beta = \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_3, \\ \beta_1 = \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3, \\ \beta_2 = -\sin q_1 \cos q_3; \\ \gamma = \sin q_1 \sin q_2, \\ \gamma_1 = \sin q_1 \cos q_2, \\ \gamma_2 = \cos q_1. \end{cases}$$

E quibus formulis sequitur:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -\gamma \sin q_3 . q_1' + \alpha_1 . q_2' + \beta . q_3', \\
\alpha_1' &= -\gamma_1 \sin q_3 . q_1' - \alpha . q_2' + \beta_1 . q_3', \\
\alpha_2' &= -\gamma_2 \sin q_3 . q_1' \qquad\quad + \beta_2 . q_3', \\
\beta' &= -\gamma \cos q_3 . q_1' + \beta_1 . q_2' - \alpha . q_3', \\
\beta_1' &= -\gamma_1 \cos q_3 . q_1' - \beta . q_2' - \alpha_1 . q_3', \\
\beta_2' &= -\gamma_2 \cos q_3 . q_1' \qquad\quad - \alpha_2 . q_3', \\
\gamma' &= \cos q_1 \sin q_2 . q_1' + \gamma_1 . q_2', \\
\gamma_1' &= \cos q_1 \cos q_2 . q_1' - \gamma . q_2', \\
\gamma_2' &= -\sin q_1 . q_1'.
\end{aligned}$$

Unde eruitur

$$7. \quad \begin{cases} a = \beta\gamma' + \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' = \cos q_3 . q_1' - \sin q_1 \sin q_3 . q_2', \\ b = -\{\alpha\gamma' + \alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2'\} = -\sin q_3 . q_1' - \sin q_1 \cos q_3 . q', \\ c = \alpha\beta' + \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' = \cos q_1 . q_1' - q_3'. \end{cases}$$

Quas quantitates in aequatione (4.) substituendo evadit virium vivarum semisumma $T$ quantitatum $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_1'$, $q_2'$, $q_3'$ functio. Quam ipsorum $q_1'$, $q_2'$, $q_3'$ respectu differentiando prodit

$$8. \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1 = \cos q_3 . Aa - \sin q_3 . Bb, \\ \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2 = -\sin q_1 \sin q_3 . Aa - \sin q_1 \cos q_3 . Bb + \cos q_1 . Cc, \\ \frac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3 = -Cc. \end{cases}$$

Hae quantitates autem aequantur sequentibus,

$$9. \quad \begin{cases} p_1 = -L \cos q_2 + M \sin q_2, \\ p_2 = -N, \\ p_3 = (L \sin q_2 + M \cos q_2) \sin q_1 + N \cos q_1, \end{cases}$$

sicuti patet substituendo quantitatum $L$, $M$, $N$ expressiones (5.) et Coëfficientium $\alpha$, $\beta$ etc. valores (6.). Ponendo

$$10. \quad \frac{p_3 \cos q_1 + p_2}{\sin q_1} = u,$$

e formulis (8.) fluunt sequentes,

$$\begin{aligned}
Aa &= \cos q_3 . p_1 - \sin q_3 . u, \\
Bb &= -\sin q_3 . p_1 - \cos q_3 . u, \\
Cc &= -p_3 .
\end{aligned}$$

Quibus formulis quadratis ac respective per $A$, $B$, $C$ divisis consummatisque, obtinetur post faciles reductiones,

$$11. \quad 2T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu)+\frac{1}{C}p_3p_3 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\{(p_1p_1-uu)\cos 2q_3 - 2p_1u\sin 2q_3\}.$$

Cum $T$, $L$, $M$, $N$ Constantibus aequentur, per quatuor aequationes (9.) et (11.) sex variabiles $q_1$, $q_2$, $q_3$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ ad duas revocare licet. Quomodocunque hae duae variabiles eligantur, aequatio differentialis primi ordinis inter eas locum habens principio ultimi multiplicatoris ad Quadraturas revocabitur. At duas variabiles eligere convenit tales, per quas reliquae commode exprimantur, quales sunt $p_1$ et $p_3$. Cum solidum *nullis* viribus accelatricibus sollicitetur, aequationum dynamicarum forma tertia §. 24. tradita suppeditat

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1}, \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial T}{dq_3},$$

unde aequatio differentialis inter $p_1$ et $p_3$, quae integranda restat, fit

$$12. \quad \frac{\partial T}{\partial q_3}dp_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1}dp_3 = 0.$$

Partibus dextris aequationum (9.) et (11.) in laevam translatis, aequationem (11.) denotemus per $\Pi = 0$, aequationes (9.) per $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$, erit secundum theoremata generalia §§. 24. et 3. tradita aequationis differentialis (12.) Multiplicator

$$\mu = \frac{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi}{\partial T}\frac{\partial\Pi_2}{\partial N}\frac{\partial\Pi_1}{\partial L}\frac{\partial\Pi_3}{\partial M}}{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi}{\partial q_3}\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_2}\frac{\partial\Pi_2}{\partial p_2}\frac{\partial\Pi_3}{\partial q_1}}.$$

Cuius fractionis ipsorumque $\frac{\partial T}{\partial q_3}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ valores sic determino.

Ipsa $T$ non nisi in $\Pi$, ipsa $N$ nonnisi in $\Pi_2$ invenitur, porro fit $\frac{\partial\Pi}{\partial T} = 2$, $\frac{\partial\Pi_2}{\partial N} = 1$, unde numerator fractionis antecedentis eruitur

$$2\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial L}\cdot\frac{\partial\Pi_3}{\partial M} = -2\sin q_1.$$

E variabilibus $p_2$, $q_1$, $q_2$, $q_3$ functio $\Pi_2$ unicam $p_2$ implicat, functio $\Pi_1$ unicam $q_2$, functio $\Pi_3$ solas $q_1$ et $q_2$; porro fit $\frac{\partial\Pi_2}{\partial p_2} = 1$, unde fractionis antecedentis denominator evadit,

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\Pi_3}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial q_3}.$$

Fit autem

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_2} = -\{L \sin q_2 + M \cos q_2\}$$
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_1} = -\{L \sin q_2 + M \cos q_2\} \cos q_1 + N \sin q_1 = -u,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = 2\frac{\partial T}{\partial q_3}.$$

Unde aequationis differentialis (12.) Multiplicator fit

$$13. \quad \mu = \frac{\sin q_1}{(L \sin q_2 + M \cos q_2) u} \cdot \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial q_3}}.$$

At e (9.) et (10.), brevitatis causa posito

$$h = LL + MM + NN,$$

sequitur

$$14. \quad \begin{cases} L \sin q_2 + M \cos q_2 = \sqrt{(LL + MM - p_1 p_1)} = \sqrt{(h - NN - p_1 p_1)}, \\ u = (L \sin q_2 + M \cos q_2) \cos q_1 - N \sin q_1 = \sqrt{(h - p_1 p_1 - p_3 p_3)}, \\ (h - p_1 p_1) \sin q_1 = (L \sin q_2 + M \cos q_2) p_3 - Nu. \end{cases}$$

Quibus in ipsius $\mu$ valore (13.) substitutis sequitur

$$15. \quad \mu . \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{1}{h - p_1 p_1} \left\{ \frac{p_3}{\sqrt{(h - p_1 p_1 - p_3 p_3)}} - \frac{N}{\sqrt{(h - NN - p_1 p_1)}} \right\}.$$

Restat ut quantitates $\frac{\partial T}{\partial q_3}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ solis $p_1$ et $p_3$ exhibeantur.

Quantitatis $u$ valor (10.) cum quantitatem $q_3$ non implicet, e (15.) sequitur

$$16. \quad 2\frac{\partial T}{\partial q_3} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) \{(p_1 p_1 - uu) \sin 2q_3 + 2 p_1 u \cos 2q_3\}.$$

Eius quantitatis quadratum e (11.) fit

$$\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)^2 (p_1 p_1 + uu)^2 - \left\{4T - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)(p_1 p_1 + uu) - \frac{2}{C} p_3 p_3\right\}^2.$$

Unde ponendo

$$K = 2T - \frac{1}{A}(p_1 p_1 + uu) - \frac{1}{C} p_3 p_3,$$
$$K_1 = \frac{1}{B}(p_1 p_1 + uu) + \frac{1}{C} p_3 p_3 - 2T,$$

sive

$$17. \quad \begin{cases} K = 2T - \frac{h}{A} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) p_3 p_3, \\ K_1 = \frac{h}{B} - 2T + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) p_3 p_3, \end{cases}$$

sequitur

$$18. \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\sqrt{(KK_1)}.$$

Cum elementum $dt$ natura temporis numquam regredientis semper positivum sit, docet formula $dp_3 = -\frac{\partial T}{\partial q_3}\,dt$, radicale $\sqrt{(KK_1)}$ negativo signo afficiendum esse, uti in (18.), quamdiu $p_3$ crescat, positivo quam diu $p_3$ decrescat.

Ipsum $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ e (11.) eruimus

$$19. \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)u+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(u\cos 2q_3 + p_1 \sin 2q_3)\right\}.$$

Fit autem e (10.) et (9.),

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{p_2+p_2\cos q_1}{\sin q_1^2} = -\frac{L\sin q_2 + M\cos q_2}{\sin q_1}$$

ideoque e (13.) et (18.) obtinetur

$$20. \quad \mu\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{1}{u\dfrac{\partial T}{\partial q_2}} = \frac{1}{u\sqrt{(KK_1)}}.$$

Porro ex aequationibus (11.), (16.), (18.) fit

$$4T-\frac{2}{C}p_3p_3=\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{(uu-p_1p_1)\cos 2q_3+2p_1u\sin 2q_3\}+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu),$$

$$2\sqrt{(KK_1)} =\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{2p_1u\cos 2q_3+(uu-p_1p_1)\sin 2q_3\},$$

unde

$$\frac{u\left(4T-\frac{2}{C}p_3p_3\right)-2p_1\sqrt{(KK_1)}}{uu+p_1p_1} = \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)u+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(u\cos 2q_3+p_1\sin 2q_3).$$

Hinc valore $uu+p_1p_1 = h-p_3p_3$ substituto, e (19.) et (20.) eruitur,

$$21. \quad \mu\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{u\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)-p_1\sqrt{(KK_1)}}{(h-p_3p_3)\,u\sqrt{(KK_1)}}.$$

Unde iam aequatio differentialis

$$\mu\frac{\partial T}{\partial q_3}dp_1-\mu\frac{\partial T}{\partial q_1}dp_3 = 0,$$

quae per se integrabilis esse debet, per formulas (15.) et (21.) evadit

$$22.\quad 0 = -\frac{N\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-NN-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_3\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-p_1p_1-p_3p_3)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{p_1\,dp_3}{(h-p_3p_3)(h-p_1p_1-p_3p_3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{(KK_1)}}.$$

Quatuor terminorum dextrae partis primum et quartum differentialia completa esse patet, cum primus solam $p_1$, quartus secundum (17.) solam $p_3$ implicet. Ponendo $p_1 = \sqrt{(h-NN)}.\sin\varphi$, primus terminus fit

$$\frac{-N\,d\varphi}{h\cos\varphi^2+N^2\sin\varphi^2} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\,d.\,\text{arc tang}\frac{N\,\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{h}},$$

unde valorem $\text{tang}\,\varphi = \frac{p_1}{\{h-NN-p_1p_1\}^{\frac{1}{2}}}$ restituendo evadit primus terminus

$$23.\quad \frac{-N\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-NN-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{h}}\,d.\,\text{arc tang}\frac{Np_1}{\sqrt{h}\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}.$$

Si in dextra parte huius formulae in locum Constantis $N$ ponitur quantitas $p_3$, prodit expressio, utriusque $p_1$ et $p_3$ respectu symmetrica; unde si ipsam quoque quantitatem $p_3$ pro variabili habemus atque utriusque $p_1$ et $p_3$ respectu differentiationem instituimus, provenire debet aggregatum duorum terminorum, qui de expressione ad laevam aequationis (23.) posita derivantur, alter ponendo $p_3$ ipsius $N$ loco, alter ponendo $p_1$ ipsius $N$ simulque $p_3$ ipsius $p_1$ loco; unde de formula (23.) deducitur haec,

$$24.\quad \left(\frac{p_3\,dp_1}{h-p_1p_1}+\frac{p_1\,dp_3}{h-p_3p_3}\right)\frac{1}{(h-p_3p_3-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h}}\,d.\,\text{arc tang}\frac{p_1p_3}{\sqrt{h}\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}}.$$

Quae docet, aequationis (22.) terminos secundum et tertium iuxta sumtos et ipsos differentiale completum constituere. Formulas (17.), (23.) et (24.) in aequatione differentiali (22.) substituendo et integrando prodit Integrale *quintum*,

$$25.\quad \text{Const.} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\,\text{arc tang}\frac{Np_1}{\sqrt{h}\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{h}}\,\text{arc tang}\frac{p_1p_3}{\sqrt{h}\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}}$$
$$-\int\frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{\left(2T-\frac{h}{A}+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)p_3p_3\right)}\sqrt{\left(\frac{h}{B}-2T+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)p_3p_3\right)}}.$$

Tempus $t$, quod unice determinandum restat, per $p_3$ exprimitur ope formulae

$$26. \quad t + \text{Const.} = -\int \frac{dp_3}{\frac{\partial T}{\partial q_3}} = \int \frac{dp_3}{\sqrt{(KK_1)}}$$

$$= \int \frac{dp_3}{\sqrt{\left(2T - \frac{h}{A} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)p_3 p_3\right)} \sqrt{\left(\frac{h}{B} - 2T + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)p_3 p_3\right)}}.$$

Ita problema rotationis propositum iam *sine plani invariabilis usu* perfecte integratum est.

Quod planum si adhibere placet atque pro Coordinatarum $x$ et $y$ plano sumere, fit

$$L = 0, \quad M = 0.$$

Unde e (10.), (9.) et (11.) fit $u = -N \sin q_1$, porro

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -N = -\sqrt{k}, \quad p_3 = N \cos q_1,$$

$$\frac{2T}{N^2} = \frac{1}{A} \sin q_1^2 \sin q_3^2 + \frac{1}{B} \sin q_1^2 \cos q_3^2 + \frac{1}{C} \cos q_1^2.$$

In dextra parte formulae (25.) terminus secundus evanescit, tertius immutatus manet, primus autem *indeterminati* speciem induit. At observo e (9.) haberi

$$\frac{Np_1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{(k - NN - p_1 p_1)}} = \frac{N \operatorname{tang}(q_2 - \alpha)}{\sqrt{(N^2 + L^2 + M^2)}},$$

siquidem ponitur $\frac{L}{M} = \operatorname{tang} \alpha$. Hinc si ponimus $L = 0$, $M = 0$ atque Constantem $\frac{\alpha}{\sqrt{k}}$ Constanti Arbitrariae adiicimus, formula (25.) evadit

$$\text{Const.} = \frac{q_3}{N} + \int \frac{\left(2T - \frac{p_3 p_3}{C}\right) dp_3}{(k - p_3 p_3)\sqrt{(KK_1)}},$$

ubi $K$ et $K_1$ valores (17.) immutatos servant. Nec non temporis $t$ expressio immutata manet

$$t + \text{Const.} = \int \frac{dp_3}{\sqrt{(KK_1)}}.$$

Formularum antecedentium ope variabiles omnes maxima concinnitate exhiberi possunt per functiones ellipticas quarum argumentum tempori $t$ proportionale est. Quod egregie expositum invenis in Commentatione inaugurali Cl. *A. S. Rueb* Roterodamensis „de motu gyratorio corporis rigidi", Traiecti ad Rhenum a. 1834 publicata.

In his quaestionibus de rotatione solidi atque de motu puncti versus duo centra fixa attracti data opera analysi usus sum inelegantiori, ut demonstretur, ea problemata ope principii ultimi multiplicatoris etiam absque artificiis, quae non ita in promtu sunt, ad finem perduci posse.

### De problemate trium corporum in eadem recta motorum. Substitutio *Euleriana*. Theoremata de viribus homogeneis.

### §. 28.

Paucis adhuc agam de tribus corporibus se mutuo attrahentibus in eademque recta motis, quippe quod problema varia de Multiplicatore proposita exemplo illustrandi occasionem commodam praebebit. Ope principii conservationis virium vivarum quaestio in aequationis differentialis secundi ordinis integrationem redit. At *Eulerus* olim absque Integrali ab illo principio suppeditato reductionem problematis ad aequationem differentialem secundi ordinis per substitutionem memorabilem effecit. Cf. *Nov. Comm. Ac. Petrop. Vol. XI. pg. 144 sqq., Nova Acta Vol III. pg. 141 sqq.* Quam rem hic ita repetam ut simul per idoneam variabilium electionem formularum symmetriae consulam.

Sint $m$, $m'$, $m''$ tria eiusdem rectae puncta massis $m$, $m'$, $m''$ praedita sitque $m'$ inter $m$ et $m''$. Designante $O$ rectae punctum fixum, ponatur

$$Om = x, \quad Om' = x_1, \quad Om'' = x_2.$$

Si directionem motus, qua punctum a $m$ ad $m'$, a $m'$ ad $m''$ fertur, positivam, directionem oppositam, qua punctum a $m''$ ad $m'$, a $m'$ ad $m$ movetur, negativam dicimus, statuo $x$, $x_1$, $x_2$ quantitates positivas aut negativas esse, prout a puncto fixo $O$ ad puncta $m$, $m'$, $m''$ directio positiva aut negativa est. Ubi massae $m$, $m'$, $m''$ se mutuo secundum legem *Neutonianam* attrahunt, fit

$$1. \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \quad * \quad + \frac{m'}{(x_1-x)^2} + \frac{m''}{(x_2-x)^2}, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-m}{(x_1-x)^2} + \quad * \quad + \frac{m''}{(x_2-x_1)^2}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{-m}{(x_2-x)^2} - \frac{m'}{(x_2-x_1)^2} \quad * \quad . \end{cases}$$

Trium massarum se mutuo attrahentium centrum gravitatis statuamus in quiete manere, quod salva generalitate licet, ipsumque ponamus centrum gravitatis esse punctum fixum $O$. Hinc tres quantitates $x$, $x$ , $x_2$ duabus aliis $u$ et $v$ exprimi possunt per substitutiones lineares,

$$2. \quad x = \alpha u + \beta v, \quad x_1 = \alpha' u + \beta' v, \quad x_2 = \alpha'' u + \beta'' v,$$

in quibus $\alpha$, $\beta$, etc. designant Constantes quascunque satisfacientes duabus aequationibus,

$$3. \quad m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha''=0, \quad m\beta+m'\beta'+m''\beta''=0.$$

Quibus ex arbitrio addamus tertiam,

$$4. \quad m\alpha\beta+m'\alpha'\beta'+m''\alpha''\beta'' = 0,$$

porro ponamus

$$m\alpha\alpha+m'\alpha'\alpha'+m''\alpha''\alpha'' = \mu,$$
$$m\beta\beta+m'\beta'\beta'+m''\beta''\beta'' = \nu.$$

Substitutis (2.) in aequationibus differentialibus (1.) et additis tribus aequationibus respective per $m\alpha$, $m'\alpha'$, $m''\alpha''$ vel per $m\beta$, $m'\beta'$, $m''\beta''$ multiplicatis, obtinetur

$$5. \quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{m'm''(\alpha'-\alpha'')}{(x_2-x_1)^2}+\dfrac{m''m(\alpha-\alpha'')}{(x_2-x)^2}+\dfrac{mm'(\alpha-\alpha')}{(x_1-x)^2}, \\ \nu\dfrac{d^2v}{dt^2} = \dfrac{m'm''(\beta'-\beta'')}{(x_2-x_1)^2}+\dfrac{m''m(\beta-\beta'')}{(x_2-x)^2}+\dfrac{mm'(\beta-\beta')}{(x_1-x)^2}. \end{cases}$$

Sit

$$6. \quad \begin{cases} \alpha''-\alpha'=a, & \alpha''-\alpha=a', & \alpha'-\alpha=a'', \\ \beta''-\beta'=b, & \beta''-\beta=b', & \beta'-\beta=b'', \end{cases}$$

unde

$$7. \quad \begin{cases} a+a''=a', & b+b''=b', \\ m'm''.ab+m''m.a'b'+mm'.a''b''=0\ ^*); \end{cases}$$

obtinentur inter $u$ et $v$ aequationes differentiales,

$$8. \quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2u}{dt^2} = -\dfrac{m'm''a}{(au+bv)^2}-\dfrac{m''ma'}{(a'u+b'v)^2}-\dfrac{mm'a''}{(a''u+b''v)^2}, \\ \nu\dfrac{d^2v}{dt^2} = -\dfrac{m'm''b}{(au+bv)^2}-\dfrac{m''mb'}{(a'u+b'v)^2}-\dfrac{mm'b''}{(a''u+b''v)^2}. \end{cases}$$

Aequationibus (8.) respective per $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ multiplicatis et additis factaque integratione obtinetur aequatio, conservationem virium vivarum exprimens,

$$9. \quad \tfrac{1}{2}\left\{\mu\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\nu\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\} = \frac{m'm''}{au+bv}+\frac{m''m}{a'u+b'v}+\frac{mm'}{a''u+b''v}-h,$$

designante $h$ Constantem Arbitrariam.

---

*) Haec aequatio sequitur e formula identica,

$$(m+m'+m'')(m\alpha\beta+m'\alpha'\beta'+m''\alpha''\beta'')-(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')$$
$$= m'm''ab+m''ma'b'+mm'a''b''.$$

Quantitates $\mu$ et $\nu$ ipsis $a$, $b$, etc. determinantur per formulas,

$$10. \quad \begin{cases} (m+m'+m'')\mu = m'm''a^2+m''ma'^2+mm'a''^2, \\ (m+m'+m'')\nu = m'm''b^2+m''mb'^2+mm'b''^2 \text{ *)}. \end{cases}$$

Ponamus

$$11. \quad \mu = \nu = 1,$$

inter quatuor quantitates $a$, $b$, $a''$, $b''$ locum habebunt tres aequationes,

$$12. \quad \begin{cases} m+m'+m'' = m''(m+m')a^2+2m''maa''+m(m'+m'')a''^2, \\ m+m'+m'' = m''(m+m')b^2+2m''mbb''+m(m'+m'')b''^2, \\ 0 = m''(m+m')ab+m''m(ab''+a''b)+m(m'+m'')a''b''. \end{cases}$$

Quae demonstrant, quantitates $a$ et $a''$, $b$ et $b''$ haberi posse pro Coordinatis punctorum in terminis positorum quarumcunque binarum semidiametrorum coniugatarum sectionis conicae, cuius aequatio est

$$m+m'+m'' = m''(m+m')x^2+2m''mxy+m(m'+m'')y^2.$$

Si pro diametris coniugatis axes principales sumere placet, quantitates $a$, $b$, etc. determinandae erunt per aequationes,

$$13. \quad a = A\cos\varepsilon, \quad a'' = A\sin\varepsilon, \quad b = B\sin\varepsilon, \quad b'' = -B\cos\varepsilon,$$

ubi, posito br. c.

$$m''(m+m')+m(m''+m') = n,$$

et nova quantitate $M$ introducta, angulus $\varepsilon$ et quantitates $A$ et $B$ dantur per formulas,

$$14. \quad \begin{cases} M\cos 2\varepsilon = m'(m''-m), & M\sin 2\varepsilon = 2mm'', \\ A = \sqrt{\dfrac{m+m'+m''}{\frac{n+M}{2}}}, & B = \sqrt{\dfrac{m+m'+m''}{\frac{n-M}{2}}}. \end{cases}$$

Determinatis $a$, $b$, etc. invenitur

$$15. \quad \begin{cases} \alpha = \alpha'-a'', \quad \alpha'' = \alpha'+a, \quad \beta = \beta'-b'', \quad \beta'' = \beta'+b, \\ \alpha' = \dfrac{ma''-m''a}{m+m'+m''}, \quad \beta' = \dfrac{mb''-m''b}{m+m'+m''}. \end{cases}$$

De substitutione hic a me adhibita pluribus egi in Commentatione „*sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps.*"

---

*) Hae aequationes sequuntur e formulis identicis,

$$(m+m'+m'')(m\alpha^2+m'\alpha'^2+m''\alpha''^2)^2-(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')^2 = m'm''.a^2+m''m.a'^2+mm'.a''^2,$$

$$(m+m'+m'')(m\beta^2+m'\beta'^2+m''\beta''^2)^2-(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')^2 = m'm''.b^2+m''m.b'^2+mm'.b''^2.$$

His de coëfficientibus substitutionis linearis (2.) obiter adnotatis, iam novas variabiles $r$, $\varphi$, $s$, $\eta$ introduco ope substitutionis,

$$16.\quad \begin{cases} u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \\ s = \sqrt{r}\cdot\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{u\,du+v\,dv}{\sqrt[4]{(u^2+v^2)}\,.\,dt}, \\ \eta = \sqrt{r^3}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{u\,dv-v\,du}{\sqrt[4]{(u^2+v^2)}\,.\,dt}. \end{cases}$$

Ex aequationibus differentialibus (8.), posito $\mu = \nu = 1$, sequitur

$$17.\quad \begin{cases} \sqrt{r^3}\cdot\dfrac{ds}{dt} = \frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi, \\ \sqrt{r^3}\cdot\dfrac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2}\eta s+\Phi', \end{cases}$$

siquidem ponitur $\Phi' = \dfrac{d\Phi}{d\varphi}$ atque

$$18.\quad \Phi = \frac{m'm''}{a\cos\varphi+b\sin\varphi}+\frac{m''m}{a'\cos\varphi+b'\sin\varphi}+\frac{mm'}{a''\cos\varphi+b''\sin\varphi}.$$

E formulis (16.) et (17.) patet, ***determinationem motus propositi pendere ab integratione duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles*** $\varphi$, $s$, $\eta$,

$$19.\quad d\varphi : ds : d\eta = \eta : \tfrac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi : -\tfrac{1}{2}s\eta+\Phi'.$$

Quas aequationes differentiales, quia a Constante generali $h$ vacuae sunt, simpliciores censere licet iis quae, non adhibitis substitutionibus (16.) aut earum similibus, adiumento aequationis (9.) per unius variabilis eliminationem obtinentur. Integratis (19.) suppeditabit formula (9.) valorem ipsius $r$. Nimirum cum sit

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r}\{s^2+\eta^2\},$$

fit e (9.),

$$20.\quad r = \frac{1}{h}\{\Phi-\tfrac{1}{2}(s^2+\eta^2)\}.$$

Denique tempus $t$ invenitur formula

$$21.\quad dt = \frac{\sqrt{r}}{s}\,dr = \frac{\sqrt{r^3}}{\eta}\,.\,d\varphi.$$

Iam aequationum differentialium (19.) investigabo Multiplicatorem $N$.

Si adhibemus formulam differentialem, qua generaliter Multiplicatorem definivi, fit

$$-\frac{\eta\,d\log N}{d\varphi} = \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi)}{\partial s}+\frac{\partial(-\frac{1}{2}s\eta+\Phi')}{\partial\eta} = \tfrac{1}{2}s,$$

ideoque e (16.),

$$22. \quad d\log N = -\tfrac{1}{2}\frac{s}{\eta}d\varphi = -\frac{dr}{r}; \quad N = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Unde substituendo (20.) et factorem constantem $\sqrt{h}$ reiiciendo, *fit aequationum differentialium* (19.) ***Multiplicator***

$$N = \frac{1}{\sqrt{\{\Phi - \frac{1}{2}(v^2+\eta^2)\}}}.$$

Qui Multiplicatoris valor valet, quaecunque anguli $\varphi$ sit functio $\Phi$, qua aequationes differentiales (19.) afficiuntur.

Multiplicatorem etiam per praecepta generalia Cap. II. tradita hoc modo indagare licet. Scilicet aequationum differentialium (8.) Multiplicator est ***unitas.*** Unde aequationum differentialium

$$23. \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{s}{\sqrt{r}}, & \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\eta}{\sqrt{r^3}}, \\ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^3}}\{\frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi\}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^3}}\{-\frac{1}{2}\eta s+\Phi'\} \end{cases}$$

Multiplicator aequatur unitati divisae per quantitatum $r$, $\varphi$, $s$, $\eta$ Determinans, variabilium $u$, $v$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ respectu formatum. Quod Determinans, cum quantitatum $r$ et $\varphi$ valores ab ipsis $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ vacui sint, aequatur producto Determinantis quantitatum $r$ et $\varphi$ ipsorum $u$ et $v$ respectu et Determinantis quantitatum $s$ et $\eta$ ipsorum $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ respectu formati. Quorum Determinantium alterum fit $\frac{1}{r}$, alterum $r$, unde aequationum (23.) Multiplicator et ipse $= 1$ invenitur. Deinde si Integralis (20.) ope eliminatur variabilis $r$ simulque de aequationibus differentialibus (23.) prima reiicitur, Multiplicator aequationum differentialium, ea eliminatione ad minorem numerum paucioresque variabiles reductarum, secundum §. 10. aequatur differentiali partiali $\frac{\partial r}{\partial h}$, designante $h$ Constantem Arbitrariam qua Integrale (20.) afficitur. Quod differentiale partiale e (20.) fit $-\frac{r}{h}$. Denique aequationum differentialium (19.) Multiplicator invenitur dividendo per $\sqrt{r^3}$, quippe per quod multiplicandum erat ut quantitates ad dextram aequationum (19.) prodirent; unde factore constante $-\frac{1}{h}$ reiecto prodit aequationum (19.) Multiplicator $\frac{1}{\sqrt{r}}$, uti supra.

Cognito ipsius $N$ valore, si aequationum differentialium (19.) integratione prima exprimitur variabilis $\eta$ per $r$, $s$ et Constantem Arbitrariam $\alpha$, principio ultimi multiplicatoris obtinetur alterum Integrale

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \cdot \frac{\eta ds + \{\Phi - \frac{1}{2}s^2 - \eta^2\} d\varphi}{\sqrt{\{\Phi - \frac{1}{2}(s^2+\eta^2)\}}} = \beta,$$

ubi sub integrationis signo post valorem ipsius $\eta$ substitutum differentiale completum habetur atque $\beta$ Constantem Arbitrariam designat. ***Eulerus*** integrationem primam, etsi succederet, in hac quaestione parvi adiumenti fore putavit, cum de ulteriore integratione desperandum esset. At novo principio generali ultimi multiplicatoris ipsam ulteriorem integrationem absolvere licuit, dum de prima integratione nihil constat.

Evanescente $h$ habetur aequatio integralis particularis,

$$24. \quad \Phi = \tfrac{1}{2}(ss + \eta\eta),$$

unde una tantum integranda manet aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles $s$ et $\varphi$,

$$25. \quad \frac{ds}{d\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\Phi - ss)} = 0.$$

Cuius aequationis differentialis Multiplicator $M$ definitur formula

$$\frac{d\log M}{d\varphi} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial.\sqrt{(2\Phi - ss)}}{ds} = \tfrac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{(2\Phi - ss)}} = \frac{s}{2\eta} = \tfrac{1}{2}\frac{d\log r}{d\varphi},$$

unde $\beta M = \sqrt{r}$. Invento aequationis differentialis (25.) Integrali eiusque ope expressa $\varphi$ per $s$ et $\alpha$, fit $M^{-1} = \frac{\partial s}{\partial \alpha}$, ideoque

$$26. \quad r = \frac{\beta^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^2},$$

designantibus $\alpha$ et $\beta$ Constantes Arbitrarias.

Formulae prorsus analogae habentur, si mutuae attractiones non distantiarum quadratis inversis sed aliis quibuscunque potestatibus proportionales sunt. Observo tamen, casu quo trium corporum quae in eadem recta moventur mutuae attractiones ***cubis*** distantiarum inverse proportionales sint, motum totum tantum ab ***unica Quadratura*** pendere.

Si vires sollicitantes in motu systematis liberi functiones Coordinatarum homogeneae quaecunque sunt, generaliter per substitutiones antecedentibus similes systematis aequationum differentialium ordinem ***unitate*** diminuere licet, quantitate cui Coordinatae proportionales statuuntur eliminata. Quam, docet theoria

nostra, aequationum differentialium iis substitutionibus reductarum Multiplicatore determinari, ideoque, si illae complete integratae sint, Determinante functionali, quo earum Multiplicator detur, variabilis quoque eliminatae valorem absque Quadratura suppeditari. Si principium conservationis virium vivarum valet, eo ipso variabilis eliminata determinari potest, unde vice versa aequationum differentialium reductarum Multiplicatorem eruere earumque ultimam integrationem reducere licet ad Quadraturas. Excipiendus est casus particularis, quo Constans Arbitraria, quae valori semisummae virium vivarum accedit, nihilo aequiparatur. Eo casu aequationum differentialium reductarum habetur Integrale particulare, unde ordinem systematis earum denuo unitate diminuere licet; quantitas eliminata autem rursus determinabitur Multiplicatore systematis aequationum differentialium bis reductarum. Hinc sequens nanciscimur theorema:

„Sint vires, quibus systema liberum $n$ punctorum materialium sollicitatur, „functiones Coordinatarum homogeneae, valeatque principium conservationis „virium vivarum; casu particulari, quo Constans Arbitraria valori virium „vivarum adiicienda nihilo aequatur, systematis aequationum differentialium „ordo *duabus* unitatibus diminui sive problema revocari potest ad integra- „tionem $6n-3$ aequationum differentialium primi ordinis inter $6n-2$ va- „riabiles; quibus complete integratis obtinetur valor $(6n-1)^{tae}$ variabilis *per* „*differentiationes* secundum Constantes Arbitrarias institutas, qui valor in „novam Constantem Arbitrariam ducitur; $6n^{ta}$ variabilis principio conser- „vationis virium vivarum determinatur, postremo tempus ut semper obti- „netur Quadratura."

Quae hac Analysi demonstrantur.

Sit $x$ una $3n$ Coordinatarum, sit $m$ massa puncti ad quod ea pertinet, ponatur $\frac{dx}{dt}=x'$, habeanturque $3n$ aequationes differentiales $m\frac{dx'}{dt}=X$, designante $X$ functionem $3n$ Coordinatarum homogeneam $i^{ti}$ ordinis. Ad quantitates analogas denotandas indices subscriptos adhibebo. Summationibus semper ad omnes $3n$ Coordinatas extensis, pono

$$\Sigma m x x = r r, \quad x = r q, \quad x' = p\sqrt{r^{i+1}}, \quad r' = \varrho\sqrt{r^{i+1}}, \quad X = r^i Q,$$

unde quantitates $Q$ erunt solarum quantitatum $q$ functiones et ipsae homogeneae $i^{ti}$ ordinis. His statutis obtinetur

$$27. \quad \begin{cases} q' = \frac{dq}{dt} = \frac{x'}{r} - \frac{x r'}{r^2} = \sqrt{r^{i-1}}.(p - q\varrho), \\ p' = \frac{dp}{dt} = \frac{X}{m\sqrt{r^{i+1}}} - \frac{i+1}{2}.\frac{x' r'}{\sqrt{r^{i+3}}} = \sqrt{r^{i-1}}.\left(\frac{Q}{m} - \frac{1}{2}(i+1)p\varrho\right), \\ \Sigma m q p = \varrho. \end{cases}$$

Hinc inter variabilem $r$ et $6n$ variabiles $q$ et $p$ obtinentur $6n$ aequationes differentiales primi ordinis,

$$28. \quad dr : dq : dq_1 \ldots . : dp : dp_1 \ldots .$$
$$= r\varrho : p - q\varrho : p_1 - q_1\varrho \ldots . : \frac{Q}{m} - \frac{i+1}{2} p\varrho : \frac{Q_1}{m_1} - \frac{i+1}{2} p_1\varrho \ldots .,$$

in quibus suppono ipsius $\varrho$ substitutum esse valorem $\Sigma mqp$. Si de parte dextra $r\varrho$, de laeva $dr$ reiicitur, abeunt formulae (28.) in $6n-1$ aequationes differentiales inter $6n$ variabiles $q$ et $p$.

Sequitur e (28.):

$$dr : \tfrac{1}{2} d\Sigma mqq = r : 1 - \Sigma mqq,$$

unde, designante $c$ Constantem Arbitrariam, fit

$$29. \quad r^2(1 - \Sigma mqq) = c.$$

Valente principio virium vivarum, designet $K$ functionem ipsarum $q$ homogeneam $(i+1)$ti ordinis $= \frac{1}{i+1} \Sigma qQ = \int \Sigma Q dq$, atque $h$ alteram Constantem Arbitrariam, obtinetur

$$30. \quad r^{i+1}(K - \tfrac{1}{2}\Sigma mpp) = h.$$

Vocemus $M$ Multiplicatorem aequationum differentialium (28.), erit

$$d \log M + \frac{U dr}{r\varrho} = 0,$$

siquidem $U$ designat summam quantitatum $r\varrho$, $p - q\varrho$ etc., $\frac{Q}{m} - \frac{i+1}{2} p\varrho$ etc., respective secundum variabiles $r$, $q$ etc., $p$ etc. differentiatarum. Quae summa, cum sit $\frac{\partial \varrho}{\partial q} = mp$, $\frac{\partial \varrho}{\partial p} = mq$, evadit

$$U = \varkappa\varrho, \quad \text{ubi} \quad \varkappa = 1 - \tfrac{1}{2}(i+3)(3n+1),$$

unde sequitur

$$31. \quad d \log M = -\varkappa d \log r, \quad M = r^{-\varkappa}.$$

In quaestione proposita non adhibendum est Integrale completum (29.), sed particulare pro quo fit $c = 0$; substitutiones enim adhibitae suppeditant aequationem

$$32. \quad \Sigma mqq = 1,$$

cuius ope $3n$ variabiles $q$ ad alias $3n-1$ variabiles $w$ reducere licet. Vocemus $H$ Determinans functionale $3n-1$ quantitatum $w$ et quantitatis $1 - \Sigma mqq$, $3n$ variabilium $q$ respectu formatum, sintque aequationes differentiales reductae,

$$32. \quad dr : dw : dw_1 \ldots . : dp : dp_1 \ldots .$$
$$= r\varrho : W : W_1 \ldots . : P : P_1 \ldots .$$

secundum regulas generales fit aequationum (32.) Multiplicator

$$N = \frac{M}{Hr^2} = \frac{1}{Hr^{n+2}}.$$

Qui satisfacere debet aequationi

$$33. \quad d\log N + \frac{d\log r}{\varrho}\left\{\varrho + \frac{\partial W}{\partial w} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \ldots + \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \ldots\right\} = 0.$$

Si vocamus $L$ Multiplicatorem $6n-2$ aequationum differentialium primi ordinis, inter $3n-1$ variabiles $w$ et $3n$ variabiles $p$ locum habentium,

$$34. \quad dw : dw_1 \ldots : dp : dp_1 \ldots = W : W_1 \ldots : P : P_1 \ldots,$$

determinatur $L$ formula

$$0 = d\log L + \frac{dw}{W}\left\{\frac{\partial W}{\partial w} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \ldots + \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \ldots\right\},$$

unde, cum e (32.) sit $\frac{dw}{W} = \frac{d\log r}{\varrho}$, e (33.) sequitur,

$$d\log L = d\log Nr,$$

ideoque aequationum (34.) fit Multiplicator

$$35. \quad L = rN = \frac{1}{H.r^{n+1}} = \frac{1}{H.r^{2-\frac{1}{2}(i+3)(3n+1)}}.$$

Aequationibus (34.) complete integratis, quantitas $L$ per theoremata initio huius Commentationis proposita obtinetur formatione Determinantis functionalis, ideoque variabilis $r$ ope aequationis (35.) absque Quadratura per variabiles $w$ et $p$ determinabitur. Si conservatio virium vivarum valet, dabitur $r$ aequatione (30.), unde eo casu dato variabilis $r$ valore vice versa aequationum differentialium (34.) suppeditatur Multiplicator

$$36. \quad L = \frac{1}{H.(K - \frac{1}{2}\Sigma mpp)^{\frac{1}{i+1}(3n-1)+\frac{1}{2}(3n+1)}}.$$

Seorsim examinemus casum particularem $h = 0$, quo fieri non potest ut ipsius $r$ per quantitates $w$ et $p$ determinatio ex aequatione (30.) petatur. Eo casu ope aequationum

$$\Sigma mqq = 1, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mpp = K$$

poterunt $6n$ quantitates $q$ et $p$ ad $6n-2$ alias quantitates $v$ reduci. Sint aequationes differentiales reductae,

$$37. \quad dr : dv_1 : dv_2 \ldots : dv_{6n-2} = r\varrho : V_1 : V_2 \ldots : V_{6n-2},$$

sitque $G$ Determinans functionale $6n-2$ quantitatum $v$ duarumque $\Sigma mqq$ et $K - \frac{1}{2}\Sigma mqq$, $6n$ variabilium $q$ et $p$ respectu formatum: secundum regulas generales Cap. II. traditas erit aequationum differentialium reductarum (37.)

Multiplicator

$$\mu = \frac{M}{G.r^{i+3}} = \frac{1}{G.r^{n+i+3}},$$

denominatore $r^{i+3}$ inde proveniente, quod in aequationibus (29.) et (30.) functiones Constantibus Arbitrariis $c$ et $h$ aequatae per $r^2$ et $r^{i+1}$ multiplicantur. Eadem ratione, qua supra Multiplicatorem $L$ e $N$ deduxi, sequitur, $6n-3$ aequationum differentialium primi ordinis inter $6n-2$ variabiles $v$ locum habentium,

$$38. \quad dv_1 : dv_2 \ldots . : dv_{6n-2} = V_1 : V_2 \ldots . : V_{6n-2}$$

Multiplicatorem fieri

$$39. \quad \nu = \mu r = \frac{1}{G.r^{n+i+2}} = \frac{1}{G}.r^{\frac{1}{2}(i+3)(3n-1)}.$$

Aequationibus (38.) complete integratis, Multiplicator $\nu$ Determinante functionali datur, ideoque ope formulae (39.) variabilis $r$ valor per quantitates $v$ sine Quadratura determinatur. Qui insuper in Constantem Arbitrariam ducendus est, quippe proportionalis est potestati Multiplicatoris, quem factore constante arbitrario afficere licet.

Principium ultimi Multiplicatoris applicatur ad systema liberum punctorum materialium in medio resistente motum. De cometa in aethere resistente circa solem moto.

§. 29.

Determinatio multiplicatoris etiam in quibusdam problematis mechanicis succedit, in quibus viribus sollicitantibus aliae accedunt e medii resistentia natae, veluti in motu puncti in medio resistente circa centrum fixum, versus quod secundum legem *Neutonianam* attrahitur.

Sint rursus puncti massa $m_i$ praediti Coordinatae orthogonales $x_i$, $y_i$, $z_i$, sit $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$, $y_i' = \frac{dy_i}{dt}$, $z_i' = \frac{dz_i}{dt}$, atque puncti velocitas

$$v_i = \sqrt{(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i')}.$$

Si puncta moventur in medio, quod cuiusque motui in directione tangentis orbitae eius resistit, viribus massam $m_i$ secundum Coordinatarum directiones sollicitantibus $X_i$, $Y_i$, $Z_i$, quae solarum Coordinatarum et, si placet, temporis $t$ functiones esse supponuntur, accedunt vires resistentia medii provenientes,

$$-m_i f_i V_i . \frac{x_i'}{v_i}, \quad -m_i f_i V_i . \frac{y_i'}{v_i}, \quad -m_i f_i V_i . \frac{z_i'}{v_i},$$

ubi $V_i$ est solius $v_i$ functio resistentiae legem exprimens atque $f_i$, si forma corporis $m_i$ non respicitur, est solarum $x_i$, $y_i$, $z_i$ functio aequalis densitati medii

in puncto $m_i$, divisae per massam $m_i$ et multiplicatae per Constantem superficiei corporis $m_i$ proportionalem. Est igitur motus systematis liberi punctorum materialium determinandus per systema aequationum differentialium secundi ordinis huiusmodi,

$$1. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} X_i - f_i V_i \cdot \frac{x_i'}{v_i}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Y_i - f_i V_i \cdot \frac{y_i'}{v_i}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Z_i - f_i V_i \cdot \frac{z_i'}{v_i}. \end{cases}$$

Quarum aequationum differentialium Multiplicator $M$, cum functiones $X_i$, $Y_i$, $Z_i$, $f_i$ ab ipsis $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ vacuae supponantur, definitur per formulam differentialem,

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . x_i'}{\partial x_i'} + \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . y_i'}{\partial y_i'} + \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . z_i'}{\partial z_i'} \right\},$$

sive

$$2. \quad \frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ 2 V_i v_i^{-1} + \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right\}.$$

Si motus in plano fit, aequationis (2.) loco habetur

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ V_i v_i^{-1} + \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right\}.$$

Si motus in eadem recta fit, habetur

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \frac{\partial V_i}{\partial v_i},$$

unde fit $M = 1$, si $V_i$ est constans.

Sit $V_i = v_i$ sitque medium uniforme ideoque quantitates $f_i$ constantes [illegible]; sequitur e (2.):

$$3. \quad M = e^{3 \Sigma f_i \cdot t} \text{ *)}.$$

Haec docet formula, *si motus fiat in medio uniformi, cuius resistentia velocitati directe proportionalis sit, atque vires sollicitantes $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ a solis Coordinatis pendeant, post omnia inter quantitates $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ inventa Integralia ultimo loco $t$ per Coordinatam aliquam sine nova Quadratura exprimi posse.* Sint enim pro numero $n$ punctorum materialium $6n-1$ Integralia inventa,

$$F_1 = \alpha_1, \quad F_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad F_{6n-1} = \alpha_{6n-1},$$

*) Pro motu in plano fit eo casu $M = e^{2 \Sigma f_i \cdot t}$, pro motu in eadem recta, $M = e^{\Sigma f_i \cdot t}$.

ubi $\alpha_1$, $\alpha_2$ etc. sunt Constantes Arbitrariae; sit $x$ una quaecunque Coordinatarum atque $\Delta$ Determinans functionum $F_1$, $F_2$ etc., quantitatum respectu omnium $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ praeter $x$ formatum: sequitur e (3.) secundum Multiplicatoris definitionem initio huius Commentationis traditam,

$$4. \quad 3t\Sigma f_i + \tau = \log \frac{\Delta}{x'},$$

designante $\tau$ novam Constantem Arbitrariam. Si virium sollicitantium expressiones $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ praeter mobilium Coordinatas ipsam quoque variabilem $t$ continent, hanc non amplius separare licet; at docet formula (3.), ***constante Multiplicatore M ultimam integrationem absolvi Quadraturis.***

Ponamus, systema punctorum materialium sive liberum sive certis conditionibus subiectum si in medio non resistente moveretur ***conservatione arearum*** gaudere, valebunt pro motu in medio resistente tres aequationes,

$$5. \quad \begin{cases} d.\Sigma m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = -\Sigma m_i f_i \frac{V_i}{v_i}(y_i z_i' - z_i y_i')\, dt, \\ d.\Sigma m_i(z_i x_i' - x_i z_i') = -\Sigma m_i f_i \frac{V_i}{v_i}(z_i x_i' - x_i z_i')\, dt, \\ d.\Sigma m_i(x_i y_i' - y_i x_i') = -\Sigma m_i f_i \frac{V_i}{v_i}(x_i y_i' - y_i x_i')\, dt. \end{cases}$$

Hinc si rursus $V_i = v_i$ et quantitates $f_i$ omnes eidem Constanti $f$ aequantur, sequitur

$$6. \quad \begin{cases} \Sigma m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = a e^{-ft}, \\ \Sigma m\ (z_i x_i' - x_i z_i') = b e^{-ft}, \\ \Sigma m_i(x_i y_i' - y_i x_i') = c e^{-ft}, \end{cases}$$

designantibus $a$, $b$, $c$ Constantes Arbitrarias. Patet e formulis (6.), ***si elementa omnia sphaerica eiusdemque densitatis et magnitudinis supponantur, atque systema eorum in motu in vacuo conservatione arearum gauderet, eandem locum habere, si motus fiat in medio uniformi cuius resistentia velocitati proportionalis est, eandemque fore plani invariabilis positionem; summam arearum autem inde a tempore*** $t = 0$ ***descriptarum et per massas multiplicatarum non sicuti in vacuo proportionalem fore tempori*** $t$, ***sed quantitati***

$$1 - \frac{1}{e^{ft}},$$

***designante*** $f$ ***Constantem positivam, ideoque tempore in infinitum crescente ad limitem crescere finitum.*** Ubi systema liberum est ideoque e (6.) et (3.) constat ipsius $M$ valor per quantitates $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ expressus, docet

principium ultimi Multiplicatoris, praeter tria cognita Integralia prima (6.) adhuc *ultimum Integrale, inter quantitates* $x_i$, $y_i$, $z_i$, $x_i'$, $y_i'$, $z_i'$ *locum habens, Quadraturis absolvi posse.*

Iam unius puncti liberi consideremus motum planum in medio resistente. Qui motus definitur duabus aequationibus differentialibus secundi ordinis,

$$7. \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X - f.\frac{x'V}{v}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y - f.\frac{y'V}{v}, \end{cases}$$

ubi $X$, $Y$, $f$ Coordinatarum orthogonalium $x$ et $y$, atque $V$ velocitatis $v = \sqrt{(x'x' + y'y')}$ functiones supponuntur. Aequationum (7.) Multiplicator $M$ definitur formula differentiali,

$$8. \quad \frac{d\log M}{dt} = f\left\{\frac{\partial . x'v^{-1}V}{\partial x'} + \frac{\partial . y'v^{-1}V}{\partial y'}\right\} = f\left\{v^{-1}V + \frac{dV}{dv}\right\}.$$

Ponamus vim sollicitantem constanter dirigi versus centrum fixum, quod sit initium Coordinatarum, sive esse $X : Y = x : y$, sequitur e (7.):

$$9. \quad \frac{d\log(xy' - yx')}{dt} = -f.\frac{V}{v}.$$

Unde si $V = v^n$, e (8.) et (9.) eruitur, quaecunque sit functio $f$,

$$10. \quad M = \frac{1}{(xy' - yx')^{n+1}}.$$

Si vis attractiva est functio radii vectoris $r$ sive distantiae a centro attractionis, quam functionem designemus per

$$F'(r) = \frac{dF(r)}{dr} = -\frac{Xdx + Ydy}{dr},$$

Multiplicatorem pro lege resistantiae adhuc generaliori assignare licet. Scilicet eo casu e (7.) sequitur formula,

$$11. \quad d\{\tfrac{1}{2}vv + F(r)\} = -f.vV.dt.$$

Qua iuncta aequationi (9.) patet, si $a$ et $b$ Constantes sint, assignari posse integrale expressionis

$$fV\left(av + \frac{b}{v}\right)dt = -ad\{\tfrac{1}{2}vv + F(r)\} - bd\log(xy' - yx').$$

Expressione ad laevam aequiparata huic,

$$f\left(\frac{V}{v} + \frac{dV}{dv}\right)dt = d\log M,$$

eruitur

$$12. \quad V = v^{b-1}e^{\frac{1}{2}avv}.$$

Qua resistentiae lege supposita fit

$$13. \quad M = \frac{e^{-\alpha[\frac{1}{2}vv+F(r)]}}{(xy'-yx')^b}.$$

Pro motibus incitatissimis, sicuti sunt cometarum, resistentiae lex formula (12.) expressa non a rerum natura abhorrere videtur, praesertim si Constanti $a$ valor perparvus tribuitur.

Introducendo Coordinatas polares sit

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r' = \frac{dr}{dt}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt},$$

unde

$$vv = r'r' + rr\varphi'\varphi',$$
$$xy'-yx' = rr\varphi' = r\sqrt{(vv-r'r')}.$$

Ponamus

$$\tfrac{1}{2}vv + F(r) = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y') + F(r) = \alpha,$$
$$xy'-yx' = rr\varphi' = \beta,$$

fit

$$\alpha = \tfrac{1}{2}r'r' + \tfrac{1}{2}\frac{\beta\beta}{rr} + F(r),$$

unde

$$14. \quad r' = \sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}.$$

Hinc cum sit $r'dt = dr$, sequitur e (9.) et (11.):

$$15. \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dr} = -\dfrac{fvV}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}, \\ \dfrac{d\beta}{dr} = -\dfrac{\beta f v^{-1}V}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}. \end{cases}$$

Si motus propositus est motus cometae circa solem, atque densitas aetheris solem circumdantis functioni distantiae a sole aequatur, fit $f$ solius $r$ functio. Porro cum sit $V$ solius $v$ functio, ope aequationis

$$v = \sqrt{(2\alpha - 2F(r))}$$

quantitates $vV$ et $v^{-1}V$ per $\alpha$ et $r$ exprimere licet. Unde idonea variabilium electione effectum est, *ut motus cometae circa solem in aethere resistente tantum pendeat ab integratione duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles $\alpha$, $\beta$, $r$; qua transacta si determinantur $\alpha$ et $\beta$ per $r$, obtinentur $\varphi$ et $t$ per Quadraturas,*

$$16.\quad \begin{cases} \varphi = \int \frac{\beta\, dr}{r r \sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}, \\ t = \int \frac{dr}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}. \end{cases}$$

Antecedentia valent, quaecunque sit resistentiae lex sive quaecunque sit $V$ ipsius $v$ functio. ***Ubi autem aetheris, in quo cometa circa solem movetur, resistentia potestati velocitati cuicunque proportionalis est sive etiam legem generaliorem sequitur expressam formula*** $V = v^{b-1} e^{\frac{1}{2}avv}$, ***in qua a et b Constantes quascunque designant, sive aether uniformis sive cum distantia a sole secundum quamcunque legem variabilis sit, quaecunque sit vis attractiva solis, unico cognito Integrali reliquae tres integrationes per Quadraturas absolvuntur.*** Nimirum determinata $V$ per formulam (12.), constat per formulam (13.) aequationum differentialium propositarum (7.) Muliplicator $M$; eo autem cognito etiam dabitur Multiplicator $M_1$ aequationum differentialium, quae e (7.) obtinentur loco ipsarum $x$, $y$, $x'$, $y'$ quantitates $r$, $\varphi$, $\alpha$, $\beta$ introducendo,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta}{rr}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -fvV, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\beta f v^{-1} V.$$

Etenim aequatur $\frac{M_1}{M}$ Determinanti quantitatum $x$, $y$, $x'$, $y'$, variabilium $r$, $\varphi$, $\alpha$, $\beta$ respectu formato, unde si reputamus, ipsarum $x$ et $y$ expressiones quantitates $\alpha$ et $\beta$ non continere, fit

$$M_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right).M$$

$$= \frac{rM}{\frac{\partial \alpha}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y'} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x'}} = \frac{rM}{xx'+yy'} = \frac{M}{r'}.$$

Si uti in (15.) variabilem $r$ loco ipsius $t$ pro independente adhibemus, Multiplicator antecedens in $r'$ ducendus est, unde in ipsum $M$ redimus, qui ponendo $V = v^{b-1} e^{\frac{1}{2}avv}$ secundum (13.) invenitur

$$17.\quad M = \beta^{-b} e^{-a\alpha}.$$

Qui valor cum non afficiatur variabilibus $\varphi$ et $t$ iisque non magis afficiantur differentialium $\frac{d\alpha}{dr}$ et $\frac{d\beta}{dr}$ valores (15.), erit $M = \beta^{-b} e^{-a\alpha}$ etiam Multiplicator

duarum aequationum differentialium primi ordinis (15.), inter tres variabiles $r, \alpha, \beta$ locum habentium.

Quod ut directe pateat, pono

$$18. \quad r\gamma = \frac{\beta}{v} = \frac{\beta}{\sqrt{(2\alpha - 2F(r))}},$$

unde

$$r' = \sqrt{\left(2\alpha - 2F(r) - \frac{\beta\beta}{rr}\right)} = v\sqrt{(1-\gamma\gamma)},$$

$$r\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = \frac{-\beta}{v^3}, \quad r\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \frac{1}{v}.$$

Ubi insuper brevitatis causa vocamus $R$ solius $r$ functionem

$$19. \quad r^{-(b-1)} f . e^{-aF(r)} = R,$$

fit

$$20. \quad rvf.MV = rv^b\beta^{-b}.fe^{2avv-a\alpha} = R.\gamma^{-b}.$$

Quibus substitutis si elementum independens $dr$ Multiplicatori $M$ proportionale statuimus, aequationes differentiales (9.) evadunt:

$$21. \quad dr : d\alpha : d\beta = \beta^{-b} e^{-a\alpha} : -R.\frac{\gamma^{-b}}{\sqrt{(1-\gamma\gamma)}} \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} : R\frac{\gamma^{-b}}{\sqrt{(1-\gamma\gamma)}} \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}.$$

Quam patet ita comparatam esse formulam ut, dextris partibus vocatis $A, B, C$, fiat

$$22. \quad \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial C}{\partial\beta} = \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial C}{\partial\beta} = 0,$$

sicuti fieri debet.

Sint $u$ et $w$ duae quaecunque variabilium $r, \alpha, \beta$ functiones atque obtineatur e (15.) sive e (21.),

$$dr : du : dw = \beta^{-b} e^{-a\alpha} : D : E.$$

Sit porro inventum aequationum differentialium (15.) sive (21.) Integrale, Constante Arbitraria $c$ affectum, cuius ope exprimantur $r, \alpha, \beta$ per $c, u, w$, ponaturque

$$\frac{\partial r}{\partial c}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial w} - \frac{\partial\alpha}{\partial w}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial u}\right\} + \frac{\partial r}{\partial u}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial w}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial c} - \frac{\partial\alpha}{\partial c}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial w}\right\} + \frac{\partial r}{\partial w}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial c}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial u} - \frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial c}\right\} = \Delta;$$

sequitur e principio ultimi Multiplicatoris altera aequatio integralis,

$$\int \Delta\{E\,du - D\,dw\} = \text{Const.},$$

ubi, et ipsis $D$ et $E$ per $u, w, c$ expressis, sub integrationis signo differentiale completum subest.

### De multiplicatore aequationum differentialium isoperimetricarum.

### §. 30.

Sit $U$ data functio variabilis independentis $t$, dependentium $x, y, z$ etc. et quotientium earum differentialium $x', x''$ etc., $y', y''$ etc., $z', z''$ etc. etc. Si proponitur problema, functiones $x, y, z$ etc. ita determinandi, ut integrale

$$\int U\,dt$$

*maximum minimumve* evadat seu generalius, ut eius integralis variatio evanescat, constat problematis solutionem pendere ab integratione systematis aequationum differentialium,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \text{ etc.},$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt^2} \text{ etc.},$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt^2} \text{ etc. etc.}$$

Quas in sequentibus vocabo *aequationes differentiales isoperimetricas*, cum problema, quod ab earum integratione pendet, nomine licet improprio isoperimetrici appellari soleat. Quaeram aequationum differentialium isoperimetricarum Multiplicatorem.

Inchoabo a casu quo ipsa $U$ praeter variabilem independentem $t$ unicam continet functionem incognitam $x$ una cum eius differentialibus $x', x'', \ldots x^{(n)}$. Eo casu unica integranda est aequatio differentialis $2n^{ti}$ ordinis,

$$1. \quad 0 = V = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \ldots \pm \frac{d^n\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}.$$

Ex aequatione (1.) si eruitur quantitatis $x^{(2n)}$ valor

$$x^{(2n)} = A,$$

huius aequationis Multiplicator $M$ secundum (5.) §. 14. definitur formula differentiali,

$$\frac{d\log M}{dt} = -\frac{\partial A}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}}}{\frac{\partial V}{\partial x^{(2n)}}}.$$

E $n+1$ expressionis $V$ terminis bini ultimi soli continent quantitatem $x^{(2n-1)}$, solus ultimus quantitatem $x^{(2n)}$, unde fit

$$2.\quad \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}} = \dfrac{\partial . \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n-1)}} - \dfrac{\partial . \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}}{\partial x^{(2n-1)}}, \\ (-1)^n \dfrac{\partial V}{\partial x^{(2n)}} = \dfrac{\partial . \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n)}}. \end{cases}$$

Quantitatum ad dextram valores suppeditat formula generalis, quam in variis occasionibus utilem hic apponam.

Sit $W$ functio quaecunque variabilis independentis $t$, dependentis $x$ atque ipsius $x$ quotientium differentialium $x'$, $x''$ etc.; fit

$$\delta \frac{d^m W}{dt^m} = \frac{d^m . \delta W}{dt^m} = \frac{d^m \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \delta t + \frac{\partial W}{\partial x} \delta x + \frac{\partial W}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial W}{\partial x''} \delta x'' \text{ etc.} \right\}}{dt^m}.$$

Factis differentiationibus et ubique substituta formula

$$\frac{d^i . \delta x^{(h)}}{dt^i} = \delta \frac{d^i x^{(h)}}{dt^i} = \delta x^{(h+i)},$$

eruitur quantitas in $\delta x^{(x)}$ ducta,

$$3.\quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(x)}} = \frac{d^m . \frac{\partial W}{\partial x^{(x)}}}{dt^m} + m \frac{d^{m-1} . \frac{\partial W}{\partial x^{(x-1)}}}{dt^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{d^{m-2} . \frac{\partial W}{\partial x^{(x-2)}}}{dt^{m-2}} + \text{etc.},$$

quae formula, si $m \geqq x$, usque ad terminum

$$\frac{m.(m-1)(m-2)\ldots.(m-x+1)}{1.2\ldots.x} . \frac{d^{m-x} . \frac{\partial W}{\partial x}}{dt^{m-x}},$$

si $m \leqq x$, usque ad terminum

$$\frac{\partial W}{\partial x^{(x-m)}}$$

continuanda est. Posteriore casu formula (3.) etiam hoc modo exhiberi potest,

$$4.\quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(x)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(x-m)}} + m \frac{d . \frac{\partial W}{\partial x^{(x-m+1)}}}{dt} + \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{d^2 . \frac{\partial W}{\partial x^{(x-m+2)}}}{dt^2} + \text{etc.}$$

Formulae antecedentes (3.) et (4.) immutatae manent, si functio $W$ praeter variabilem dependentem $x$ eiusque quotientes differentiales alias dependentes $y$, $z$, etc. earumque quotientes differentiales continet. Si functionem $W$ plures variabiles independentes dependentesque earumque differentialia partialia affi-

ciunt, eamque secundum diversas variabiles independentes diversis vicibus iteratis complete differentiamus, huius quoque differentialis completi differentialia partialia simili ratione inveniuntur.

Ponamus ipsius $x$ differentiale $n^{\text{tum}}$ altissimum esse quod in expressione $W$ obveniat, sequitur e (4.), si $\varkappa = m+n$,

$$5. \qquad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(m+n)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(n)}},$$

si $\varkappa = m+n-1$,

$$6. \qquad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(m+n-1)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(n-1)}} + m \frac{d . \frac{\partial W}{\partial x^{(n)}}}{dt}.$$

Unde ponendo $m = n$, $m = n-1$ prodit

$$\frac{\partial . \frac{d^n . \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}, \qquad \frac{\partial . \frac{d^{n-1} . \frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n-1)}},$$

$$\frac{\partial . \frac{d^n . \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n-1)}} + n \frac{d . \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt}.$$

Quibus valoribus in formulis (2.) substitutis eruitur

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial x^{(2n)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}},$$

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}} = n \frac{d . \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt},$$

unde iam

$$\frac{d \log M}{dt} = n \frac{d \log \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt}; \qquad M = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} \right\}^n.$$

Multiplicatoris $M$ valore invento, principio ultimi Multiplicatoris ultima integratio Quadraturis absolvi potest. Sit ex. gr.

$$U = \sqrt{(E + 2Fx' + G'x'x')},$$

ubi $E$, $F$, $G$ ipsarum $t$ et $x$ datae functiones sunt, unde eruitur

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial x'} = \frac{EG - FF}{\{E + 2Fx' + Gx'x'\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc, proposita aequatione differentiali,

$$\frac{d.\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

si per primam integrationem $x'$ per $t$, $x$ et Constantem Arbitrariam $\alpha$ expressa datur, altera integratio dabitur formula

$$\int \frac{\frac{\partial x'}{\partial \alpha}(EG - FF)(x'dt - dx)}{\{E + 2Fx' + Gx'x'\}^{\frac{3}{2}}} = \text{Const.},$$

ubi sub integrationis signo differentiale completum subest.

## §. 31.

Iam statuamus, functionem $U$ praeter variabilem independentem $t$ pluribus affici dependentibus earumque quotientibus differentialibus, omnium autem variabilium differentialia altissima ad eundem $n^{\text{tum}}$ ordinem ascendere. Sint variabiles dependentes tres $x$, $y$, $z$; tres integrandae sunt aequationes differentiales

$$1. \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

posito

$$2. \quad \begin{cases} (-1)^n X = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \ldots . (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}, \\ (-1)^n Y = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial y'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt^2} \ldots . (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n}, \\ (-1)^n Z = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial z'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt^2} \ldots . (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial z^{(n)}}}{dt^{(n)}}. \end{cases}$$

Ex aequationibus (1.) altissimorum quibus afficiuntur differentialium $x^{(2n)}$, $y^{(2n)}$, $z^{(2n)}$ petantur valores, per differentialia inferiora ipsasque variabiles $x$, $y$, $z$, $t$ expressi, quibus respective secundum quantitates $x^{(2n-1)}$, $y^{(2n-1)}$, $z^{(2n-1)}$ differentiatis fiat

$$3. \quad \frac{\partial x^{(2n)}}{\partial x^{(2n-1)}} = u, \quad \frac{\partial y^{(2n)}}{\partial y^{(2n-1)}} = v_1, \quad \frac{\partial z^{(2n)}}{\partial z^{(2n-1)}} = w_2,$$

unde aequationum differentialium (3.) Multiplicator $M$ secundum (5.) §. 14. erit

$$4. \quad \frac{d \log M}{dt} = -\{u + v_1 + w_2\}.$$

Quantitates $u$, $v_1$, $w_2$ determinandae sunt ternis aequationum linearium systematis, quae solis terminis ad dextram positis inter se differunt,

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}}u + \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}}v + \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}}w = -\frac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}}u + \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}}v + \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}}w = -\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}}u + \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}}v + \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}}w = -\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}}u_1 + \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}}v_1 + \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}}w_1 = -\frac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}}u_1 + \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}}v_1 + \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}}w_1 = -\frac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}}u_1 + \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}}v_1 + \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}}w_1 = -\frac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}}u_2 + \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}}v_2 + \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}}w_2 = -\frac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}}u_2 + \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}}v_2 + \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}}w_2 = -\frac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}}u_2 + \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}}v_2 + \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}}w_2 = -\frac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}}. \end{cases}$$

Ponamus

$$6.\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)}\partial x^{(n)}} = A, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}} = B, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n)}\partial z^{(n)}} = C, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n)}\partial z^{(n)}} = D, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n)}\partial x^{(n)}} = E, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)}\partial y^{(n)}} = F, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n-1)}\partial z^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n-1)}\partial y^{(n)}} = a, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n-1)}\partial x^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n-1)}\partial z^{(n)}} = b, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n-1)}\partial y^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n-1)}\partial x^{(n)}} = c. \end{cases}$$

In formulis (5.) et (6.) §. pr. ipsi $W$ substituendo sex functiones $\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial z^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial z^{(n-1)}}$, pro ipsa $x$ autem functiones $x$, $y$ sumendo sequitur

$$7.\quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} = A, & \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} = F, & \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} = E, \\ \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} = F, & \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} = B, & \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} = D, \\ \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} = E, & \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} = D, & \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} = C, \\ \frac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}} = n\frac{dA}{dt}, & \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}} = n\frac{dF}{dt} + c, & \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}} = n\frac{dE}{dt} - b, \\ \frac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}} = n\frac{dF}{dt} - c, & \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}} = n\frac{dB}{dt}, & \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}} = n\frac{dD}{dt} + a, \\ \frac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}} = n\frac{dE}{dt} + b, & \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}} = n\frac{dD}{dt} - a, & \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}} = n\frac{dC}{dt}. \end{cases}$$

Hos valores substituendo tria systemata aequationum linearium (5.) evadunt,

$$8.\quad \begin{cases} Au + Fv + Ew = -n\frac{dA}{dt}, \\ Fu + Bv + Dw = -n\frac{dF}{dt} - c, \\ Eu + Dv + Cw = -n\frac{dE}{dt} + b, \\ Au_1 + Fv_1 + Ew_1 = -n\frac{dF}{dt} + c, \\ Fu_1 + Bv_1 + Dw_1 = -n\frac{dB}{dt}, \\ Eu_1 + Dv_1 + Cw_1 = -n\frac{dD}{dt} - a, \\ Au_2 + Fv_2 + Ew_2 = -n\frac{dE}{dt} - b, \\ Fu_2 + Bv_2 + Dw_2 = -n\frac{dD}{dt} + a, \\ Eu_2 + Dv_2 + Cw_2 = -n\frac{dC}{dt}. \end{cases}$$

Quorum systematum Determinans commune si vocatur

$$9.\quad R = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF,$$

eorum resolutione algebraica obtinetur,

$$10.\quad \begin{cases} -Ru = n\left\{\frac{\partial R}{\partial A}\cdot\frac{dA}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}\cdot\frac{dF}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}c-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}b, \\ -Rv_1 = n\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}\cdot\frac{dF}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial B}\cdot\frac{dB}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}\cdot\frac{dD}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}a-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}c, \\ -Rw_2 = n\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}\cdot\frac{dD}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial C}\cdot\frac{dC}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}b-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}a. \end{cases}$$

Quibus formulis additis termini per $a$, $b$, $c$ multiplicati se mutuo destruunt, unde prodit

$$\frac{d\log M}{dt} = -\{u+v_1+w_2\} = n\frac{dR}{Rdt},$$

ideoque

$$M = R^n = \{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF\}^n.$$

Quo valore invento, si per omnia praeter unum Integralia inventa problema in aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles redit, huius quoque Multiplicator constabit.

Adiumento theorematum generalium in fine §$^{i}$ 16. propositorum antecedentia extendere licet ad casum quo functio $U$ praeter variabilem independentem numerum quemlibet dependentium continet, singularum differentialibus altissimis omnibus ad eundem ordinem ascendentibus. At si diversarum variabilium dependentium differentialia altissima in functione $U$ non omnia ad eundem ordinem ascendunt, Multiplicatoris aequationum differentialium isoperimetricarum determinatio difficilior est. Scilicet nascitur difficultas eo quod casu quem innui aequationes differentiales isoperimetricae formam normalem exuant, qua altissima diversarum variabilium differentialia per differentialia inferiora ipsasque variabiles determinantur. Reductio ad formam normalem cum molestissima ac saepe inextricabilibus difficultatibus obnoxia sit, demonstrabo sequentibus, quomodo generaliter eruere liceat formulam differentialem qua Multiplicator definiatur, etiamsi ipsa reductio effecta non supponatur. Quae formula in problemate isoperimetrico generali proposito ipsum Multiplicatoris valorem suppeditabit.

### De reductione aequationum differentialium ad formam normalem et formula symbolica qua reductarum Multiplicator definiatur. Aequationum differentialium isoperimetricarum ad formam normalem reductarum Multiplicator.

### §. 32.

Datae sint inter variabilem independentem $t$ atque $n$ dependentes $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ totidem aequationes differentiales

$$1.\quad F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad \ldots.\quad F_n = 0,$$

non ea forma normali praeditae quae permittat, ut differentialium singularum variabilium altissimorum valores per differentialia inferiora ipsasque variabiles exprimantur. Cuiusmodi habentur aequationes, si in earum una pluribusve altissima differentialia sive omnino desunt sive ex iis reliquarum adiumento aequationum eliminari possunt. Eo casu iteratis aequationum (1.) differentiationibus formandum est systema *aequationum auxiliarium*, quarum ope totidem differentialia eliminando forma normalis eruatur. Varios modos, quibus ea operatio institui potest, in alia Commentatione tradam, quippe quae quaestio multis egregiis theorematis nititur, quae uberiorem expositionem poscunt. Hic observare sufficiat, si ad aequationes auxiliares formandas aequatio $F_i = 0$ sit $\lambda_i$ vicibus iteratis differentianda, ponaturque

$$\frac{d^{\lambda_i} F_i}{dt^{\lambda_i}} = \varphi_i ,$$

numeros $\lambda_i$ ita comparatos esse debere, ut ex aequationibus

$$2. \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots . \quad \varphi_n = 0$$

altissimorum differentialium in iis obvenientium

$$x_1^{(p_1)}, \quad x_2^{(p_2)}, \quad \ldots . \quad x_n^{(p_n)}$$

peti possint valores per differentialia inferiora ipsasque variabiles expressi. Unde aequationes (2.) per se consideratae constituere debent aequationum differentialium systema forma normali gaudens, multo tamen altioris ordinis quam qui systemati aequationum differentialium propositarum proprius est. Aequationes enim propositas atque auxiliares praeter ipsas (2.) omnes habere licet pro aequationum (2.) Integralibus earum reductioni inservientibus. Quae Integralia, licet particularia, talia sunt, ut aequationum differentialium eorum ope reductarum Multiplicator e Multiplicatore aequationum (2.) erui possit. Etenim si tantum aequationes (2.) proponerentur, loco aequationum

$$\frac{d^{\lambda_i - 1} F_i}{dt^{\lambda_i - 1}} = 0, \quad \frac{d^{\lambda_i - 2} F_i}{dt^{\lambda_i - 2}} = 0, \quad \ldots . \quad F_i = 0$$

ad reductionem adhiberi possent aequationum (2.) Integralia completa

$$\frac{d^{\lambda_i - 1} F_i}{dt^{\lambda_i - 1}} = c_1^{(i)}, \quad \frac{d^{\lambda_i - 2} F_i}{dt^{\lambda_i - 2}} = c_1^{(i)} t + c_2^{(i)}, \text{ etc.}$$

designantibus $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ etc. Constantes Arbitrarias. Multiplicator autem aequationum reductarum secundum §. 12. obtinetur dividendo aequationum (2.) Multiplicatorem per Determinans $\lambda_1 + \lambda_2 \ldots . + \lambda_n$ functionum

$$\frac{d^{\lambda_i-1}F_i}{dt^{\lambda_i-1}}, \quad \frac{d^{\lambda_i-2}F_i}{dt^{\lambda_i-2}}, \quad \ldots\ldots \quad F_i,$$

formatum respectu differentialium eliminandorum, idque sive Constantibus Arbitrariis $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ etc. valores generales servantur, sive iis valores tribuuntur particulares, uti in quaestione proposita, in qua omnes statuuntur evanescere.

Aequationum (2.) Multiplicator definitur formula symbolica §. 15. tradita,

$$3. \qquad d\log M = \delta\log\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots\ldots A_n^{(n)},$$

posito

$$4. \qquad A_x^{(i)} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_x^{(p_x)}}, \qquad \delta A_x^{(i)} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_x^{(p_x-1)}}dt.$$

Has quantitates secundum formulas (5.) et (6.) §. 30. sic exhibere licet,

$$5. \qquad A_x^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_x^{(p_x-\lambda_i)}}, \qquad \delta A_x^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_x^{(p_x-\lambda_i-1)}}dt + \lambda_i\, dA_x^{(i)}.$$

Unde ad condendam formulam (3.) sufficiunt datae aequationes (1.) numerorumque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$ cognitio. Observo si ponatur

$$\Delta A_x^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_x^{(p_x-\lambda_i-1)}}dt + (\lambda_i-\alpha)dA_x^{(i)},$$

designante $\alpha$ numerum quemcunque, formulam (3.) abire in hanc,

$$d\log\frac{M}{\{\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots\ldots A_n^{(n)}\}^\alpha} = \Delta\log\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots\ldots A_n^{(n)},$$

unde obtineri potest variationis formandae simplificatio.

In problemate isoperimetrico, quod aequatione $\delta\int U\,dt = 0$ continetur, expressio $U$ praeter variabilem independentem $t$ contineat $n$ dependentes $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ atque differentialia ipsius $x_1$ usque ad $m_1$tum, ipsius $x_2$ usque ad $m_2$tum etc.: erunt aequationes differentiales integrandae,

$$6. \quad \begin{cases} 0 = F_1 = \dfrac{d^{m_1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1-1)}}}{dt^{m_1-1}}\ldots\ldots, \\ 0 = F_2 = \dfrac{d^{m_2}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}}{dt^{m_2}} - \dfrac{d^{m_2-1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2-1)}}}{dt^{m_2-1}}\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = F_n = \dfrac{d^{m_n}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m_n)}}}{dt^{m_n}} - \dfrac{d^{m_n-1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n-1)}}}{dt^{m_n-1}}\ldots\ldots \end{cases}$$

Si $m_1$ omnium numerorum $m_1, m_2, \ldots m_n$ maximus est, aequationum auxiliarium systema facile constat obtineri differentiando aequationes $F_2=0, F_3=0$ etc. respective $m_1-m_2$, $m_1-m_3$ etc. vicibus, unde fit

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=m_1-m_2, \quad \lambda_3=m_1-m_3, \quad \ldots \quad \lambda_n=m_1-m_n,$$
$$p_1=2m_1, \quad p_2=m_1+m_2, \quad p_3=m_1+m_3, \quad \ldots \quad p_n=m_1+m_n.$$

Hinc eruitur

$$7. \quad \begin{cases} 0=\varphi_1=\dfrac{d^{m_1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}}{dt^{m_1}}-\dfrac{d^{m_1-1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1-1)}}}{dt^{m_1-1}}\ldots, \\ 0=\varphi_2=\dfrac{d^{m_1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}}{dt^{m_1}}-\dfrac{d^{m_1-1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2-1)}}}{dt^{m_1-1}}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0=\varphi_n=\dfrac{d^{m_1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}}}{dt^{m_1}}-\dfrac{d^{m_1-1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n-1)}}}{dt^{m_1-1}}\ldots \end{cases}$$

Unde per formulas §i 30. sequitur

$$8. \quad \begin{cases} A_x^{(i)}=\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_x^{(m_1+m_x)}}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i)}\partial x_x^{(m_x)}}, \\ \delta A_x^{(i)}=\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_x^{(m_1+m_x-1)}}dt=m_1\dfrac{dA_x^{(i)}}{dt}+B_{i,x}\,dt, \end{cases}$$

siquidem ponitur

$$B_{i,x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i)}\partial x_x^{(m_x-1)}}-\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i-1)}\partial x_x^{(m_x)}}.$$

Cum sit

$$A_x^{(i)}=A_i^{(x)} \quad \text{ideoque} \quad \frac{\partial\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)}}{\partial A_x^{(i)}}=\frac{\partial\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)}}{\partial A_i^{(x)}},$$
$$B_x^{(i)}=-B_i^{(x)}, \quad B_i^{(i)}=0,$$

in formanda variatione (3.) binorum terminorum aggregata

$$\left\{\frac{\partial\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)}}{\partial A_x^{(i)}}B_{i,x}+\frac{\partial\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)}}{\partial A_i^{(x)}}B_{x,i}\right\}dt$$

evanescunt, unde ipsius $d\log M$ valor (3.) eruitur

$$\delta\log\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)}=m_1\,d\log\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)},$$

ideoque

$$9. \quad M=\{\Sigma\pm A_1' A_2''\ldots A_n^{(n)}\}^{m_1}.$$

Qua in formula ipsis $A_x^{(i)}$ valores (8.) substituendo patet, *si* $m_1$ *maximus omnium* $m_1$, $m_2$ *etc., aequari* $M$ *potestati* $m_1^{tae}$ *Determinantis functionum*

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}},$$

*ipsarum* $x_1^{(m_1)}$, $x_2^{(m_2)}$ *etc. respectu formati.*

## §. 33.

Reductio ad formam normalem reductarumque aequationum differentialium Multiplicator sic obtinetur.

Quoniam aequationibus (2.) valores quantitatum

$$x_1^{(p_1)}, \quad x_2^{(p_2)}, \quad \ldots \quad x_n^{(p_n)}$$

determinantur, his quantitatibus expressiones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ aliae aliis afficiantur necesse est, ita ut eliminatio successiva locum habere possit. Sint

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots \quad \varkappa_n$$

ipsi numeri $1, 2, \ldots n$ inter se permutati, positoque

$$p_{\varkappa_i} = q_i$$

statuamus, quantitates $x_{\varkappa_1}^{(q_1)}$ ipsam $\varphi_1$, $x_{\varkappa_2}^{(q_2)}$ ipsam $\varphi_2$, $\ldots$ $x_{\varkappa_n}^{(q_n)}$ ipsam $\varphi_n$ afficere, quo nihil impeditur, quin functio $\varphi_i$ praeter $x_{\varkappa_i}^{(q_i)}$ quantitatum $x_{\varkappa_1}^{(q_1)}$, $x_{\varkappa_2}^{(q_2)}$ etc. alias vel etiam omnes contineat. Supponamus

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \ldots \leqq \lambda_{n-1} \leqq \lambda_n,$$

atque fieri

$$\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_a = \alpha; \quad \lambda_{a+1} = \lambda_{a+2} \ldots = \lambda_b = \beta; \quad \text{etc.},$$
$$\lambda_{q+1} = \lambda_{q+2} \ldots = \lambda_r = \varrho; \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} \ldots = \lambda_n = \sigma.$$

Porro, designante $\mu$ numerum ipso $\lambda_i$ non maiorem, statuamus

$$\frac{d^{\lambda_i - \mu}.F_i}{dt^{\lambda_i - \mu}} = \varphi_i^{(-\mu)}, \quad F_i = \varphi_i^{(-\lambda_i)}.$$

Iam ex aequationibus propositis et auxiliaribus seligamus haec $a+1$ systemata $n$ aequationum,

$$10. \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots \ \varphi_n = 0, \\ \varphi_1^{(-1)} = 0, \ \varphi_2^{(-1)} = 0, \ \ldots \ \varphi_n^{(-1)} = 0, \\ \varphi_1^{(-2)} = 0, \ \varphi_2^{(-2)} = 0, \ \ldots \ \varphi_n^{(-2)} = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ \ldots \ F_a = 0, \ \varphi_{a+1}^{(-a)} = 0, \ \varphi_{a+2}^{(-a)} = 0, \ \ldots \ \varphi_n^{(-a)} = 0. \end{cases}$$

Systemate primo, secundo etc., ultimo respective determinantur quantitates

$$\begin{array}{llll} x_{x_1}^{(q_1)}, & x_{x_2}^{(q_2)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n)}, \\ x_{x_1}^{(q_1-1)}, & x_{x_2}^{(q_2-1)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{x_1}^{(q_1-\alpha)}, & x_{x_2}^{(q_2-\alpha)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n-\alpha)}. \end{array}$$

Unde aequationibus (10.) differentialia omnia exprimuntur per alia his postremis inferiora. Eadem ratione aequationibus

$$\begin{array}{llll} \varphi_{\alpha+1}^{(-\alpha-1)}=0, & \varphi_{\alpha+2}^{(-\alpha-1)}=0, & \ldots\ldots & \varphi_n^{(-\alpha-1)}=0, \\ \varphi_{\alpha+1}^{(-\alpha-2)}=0, & \varphi_{\alpha+2}^{(-\alpha-2)}=0, & \ldots\ldots & \varphi_n^{(-\alpha-2)}=0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{\alpha+1}=0, & F_{\alpha+2}=0, & \ldots\ldots & F_\beta=0, \quad \varphi_{\beta+1}^{(-\beta)}=0, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_n^{(-\beta)}=0 \end{array}$$

differentialia omnia revocantur ad alia ipsis

$$x_{x_1}^{(q_1-\alpha)}, \quad x_{x_2}^{(q_2-\alpha)}, \quad \ldots\ldots \quad x_{x_\alpha}^{(q_\alpha-\alpha)}, \quad x_{x_{\alpha+1}}^{(q_{\alpha+1}-\beta)}, \quad \ldots\ldots \quad x_{x_n}^{(q_n-\beta)}$$

inferiora et ita porro. Postremo advocatis aequationibus

$$\begin{array}{llll} \varphi_{\rho+1}^{(-\varrho-1)}=0, & \varphi_{\rho+2}^{(-\varrho-1)}=0, & \ldots\ldots & \varphi_n^{(-\varrho-1)}=0, \\ \varphi_{\rho+1}^{(-\varrho-2)}=0, & \varphi_{\rho+2}^{(-\varrho-2)}=0, & \ldots\ldots & \varphi_n^{(-\varrho-2)}=0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{\rho+1}=0, & F_{\rho+2}=0, & \ldots\ldots & F_n=0 \end{array}$$

fit ut differentialia omnia ad alia revocentur inferiora ipsis

$$11. \quad x_{x_1}^{(q_1-\lambda_1)}, \quad x_{x_2}^{(q_2-\lambda_2)}, \quad \ldots\ldots \quad x_{x_n}^{(q_n-\lambda_n)}.$$

Formulae, quibus ista differentialia (11.) per inferiora exprimuntur, ipsum constituunt aequationum differentialium systema forma normali gaudens, ad quod propositae (1.) revocari possunt. Cuius Multiplicator secundum theoremata Cap. II. proposita eruitur $\frac{M}{D}$, designante $D$ omnium functionum

$$\begin{array}{llll} \varphi_1^{(-1)}, & \varphi_1^{(-2)}, & \ldots\ldots & \varphi_1^{(-\lambda_1)}, \\ \varphi_2^{(-1)}, & \varphi_2^{(-2)}, & \ldots\ldots & \varphi_2^{(-\lambda_2)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^{(-1)}, & \varphi_n^{(-2)}, & \ldots\ldots & \varphi_n^{(-\lambda_n} \end{array}$$

Determinans sumtum respectu quantitatum

$$\begin{array}{llll} x_{x_1}^{(q_1-1)}, & x_{x_1}^{(q_1-2)}, & \ldots\ldots & x_1^{(q_1-\lambda_1)}, \\ x_{x_2}^{(q_2-1)}, & x_{x_2}^{(q_2-2)}, & \ldots\ldots & x_{x_2}^{(q_2-\lambda_2)}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{x_n}^{(q_n-1)}, & x_{x_n}^{(q_n-2)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n-\lambda_n)}. \end{array}$$

Functiones enim illas nihilo aequiparando obtinemus aequationes reducendis (2.) adhibitas; quantitates illae autem sunt ipsae harum aequationum ope eliminandae. Quae eliminationes vidimus successive institui posse, ita ut aequationes quas in eadem linea horizontali posui per se constituant systema totidem quantitatibus eliminandis sufficiens. Unde fit ut Determinans $D$ productum evadat $\sigma$ sive $\lambda_n$ Determinantium functionalium simpliciorum,

$$\begin{aligned} D = \overset{\alpha}{\underset{1}{\Pi}} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1^{(-h)}}{\partial x_{x_1}^{(q_1-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_2^{(-h)}}{\partial x_{x_2}^{(q_2-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}} \\ \times \overset{\beta}{\underset{\alpha+1}{\Pi}} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{\alpha+1}^{(-h)}}{\partial \varphi_{x_{\alpha+1}}^{(q_{\alpha+1}-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\alpha+2}^{(-h)}}{\partial x_{x_{\alpha+2}}^{(q_{\alpha+2}-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times \overset{\sigma}{\underset{\varrho+1}{\Pi}} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{r+1}^{(-h)}}{\partial x_{x_{r+1}}^{(q_{r+1}-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{r+2}^{(-h)}}{\partial x_{x_{r+2}}^{(q_{r+2}-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}}, \end{aligned}$$

siquidem in hac formula, designante $h$ indicem in functione aliqua $f$ obvenientem, ipso $\overset{\nu}{\underset{\mu}{\Pi}} f(h)$ designatur productum $f(\mu) f(\mu+1) f(\mu+2) \ldots . f(\nu)$. Iam in formula antecedente singula Determinantia functionalia, quae idem signum $\Pi$ amplectatur, observo inter se aequalia evadere eademque fore ac si ubique index $-h$ omitteretur. Unde si ponimus

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i^{(-h)}}{\partial x_{x_f}^{(q_f-h)}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{x_f}^{(q_f)}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{x_f}^{(q_f-\lambda_i)}},$$

obtinetur

$$\begin{aligned} 12. \quad D = & \{\Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots . A_n^{(n)}\}^{\alpha} \\ & \times \{\Sigma \pm A_{a+1}^{(a+1)} A_{a+2}^{(a+2)} \ldots . A_n^{(n)}\}^{\beta-\alpha} \\ & \times \{\Sigma \pm A_{b+1}^{(b+1)} A_{b+2}^{(b+2)} \ldots . A_n^{(n)}\}^{\gamma-\beta} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times \{\Sigma \pm A_{r+1}^{(r+1)} A_{r+2}^{(r+2)} \ldots . A_n^{(n)}\}^{\sigma-\varrho}. \end{aligned}$$

Posito

$$13. \quad \Sigma \pm A_{i+1}^{(i+1)} A_{i+2}^{(i+2)} \ldots . A_n^{(n)} = R_i,$$

valor antecedens fit $R_0^{\alpha} R_a^{\beta-\alpha} R_b^{\gamma-\beta} \ldots R_r^{\sigma-\varrho}$, qui etiam sic exhiberi potest,

$$14. \quad D = R_0^{\lambda_1} R_1^{\lambda_2-\lambda_1} R_2^{\lambda_3-\lambda_2} \ldots R_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}},$$

qua de formula, si bini numeri se proxime insequentes $\lambda_i$ et $\lambda_{i+1}$ inter se aequales existunt, potestatem $R_i^{\lambda_{i+1}-\lambda_i}$ unitati aequalem reiicere licet.

Reductiones, quibus aequationes differentiales propositae ad formas normales antecedentibus assignatas revocantur, eae sunt quae omnium simplicissimo modo efficiuntur. Pro quibus supponere licet $\alpha = 0$ sive simul de omnibus numeris $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ eorum minimum detrahere licet; nam aequationum auxiliarium (10.) nonnisi ultima series ad reductionem adhibebatur. Formae normales illis reductionibus simplicissimis erutae tot existunt inter se diversae, quot modis numeri $1, 2, \ldots n$ in talem ordinem $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ disponi possunt, ut quantitates

$x_{\varkappa_1}^{(q_1)}, \; x_{\varkappa_2}^{(q_2)}, \; \ldots \; x_{\varkappa_a}^{(q_a)}$ aequationibus $\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0, \; \ldots \; \varphi_a = 0,$

$x_{\varkappa_{a+1}}^{(q_{a+1})}, \; x_{\varkappa_{a+2}}^{(q_{a+2})}, \; \ldots \; x_{\varkappa_b}^{(q_b)}$ aequationibus $\varphi_{a+1} = 0, \; \varphi_{a+2} = 0, \; \ldots \; \varphi_b = 0,$

. . . . . .

$x_{\varkappa_{r+1}}^{(q_{r+1})}, \; x_{\varkappa_{r+2}}^{(q_{r+2})}, \; \ldots \; x_{\varkappa_n}^{(q_n)}$ aequationibus $\varphi_{r+1} = 0, \; \varphi_{r+2} = 0, \; \ldots \; \varphi_n = 0$

determinentur, siquidem in aequationibus illis quantitates illae solae pro incognitis, reliquae pro datis habentur. Reductiones ad has formas pauciores poscunt aequationes auxiliares eliminationesque ac si proponeretur reductio ad ullam aliam formam normalem, ex. gr. reductio vulgaris ad unicam aequationem differentialem inter duas variabiles, quae vel omnium maxime prolixa est. Neque pro aliis formis normalibus Determinans, per quod $M$ dividendum est, concinnitate expressionis (12.) gaudet.

Antecedentia ad problema isoperimetricum propositum applicemus. Aequationum differentialium (7.) unaquaeque simul omnibus altissimis differentialibus

$$x_1^{(2m_1)}, \quad x_2^{(m_1+m_2)}, \quad \ldots \ldots \quad x_n^{(m_1+m_n)}$$

afficintur; unde ipsi $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ designare possunt numeros $1, 2, \ldots n$ *quocunque modo* permutatos. Fit

$$\lambda_i = m_1 - m_i, \qquad q_i = p_{\varkappa_i} = m_1 + m_{\varkappa_i}, \qquad q_i - \lambda_i = m_i + m_{\varkappa_i},$$

unde $n$ quantitates (11.) abeunt in quantitates $x_{\varkappa_i}^{(m_i+m_{\varkappa_i})}$; porro fit

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{\varkappa_f}^{(m_{\varkappa_f}+m_i)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_{\varkappa_f}^{(m_{\varkappa_f})} \partial x_i^{(m_i)}}.$$

Hinc, collectis formulis (9.) et (14.), fluit sequens theorema.

Theorema

*„Proponatur integrale $\int U dt$ Maximum Minimumve reddere, expressione U praeter variabilem independentem t continente n dependentes $x_1, x_2, \ldots x_n$ una cum earum differentialibus, respective usque ad $m_1$tum, $m_2$tum, etc. $m_n$tum ordinem ascendentibus; designantibus $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ numeros $1, 2, \ldots n$ quocunque ordine dispositos, integrandae erunt n aequationes differentiales,*

$$x_{\varkappa_1}^{(m_1+m_{\varkappa_1})} = L_1, \quad x_{\varkappa_2}^{(m_2+m_{\varkappa_2})} = L_2, \quad \ldots \quad x_{\varkappa_n}^{(m_n+m_{\varkappa_n})} = L_n,$$

*in quibus $L_1, L_2, \ldots L_n$ ipsis differentialibus altissimis ad laevam positis non afficiuntur; si $m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \ldots \geqq m_{n-1} \geqq m_n$, poniturque*

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_f^{(m_{\varkappa f})} \partial x_i^{(m_i)}}, \qquad R_i = \Sigma \pm A_{i+1}^{(i+1)} A_{i+2}^{(i+2)} \ldots A_n^{(n)},$$

*illarum n aequationum differentialium habetur Multiplicator*

$$\frac{R_0^{m_1}}{R_1^{m_1-m_2} R_2^{m_2-m_3} \ldots R_{n-1}^{m_{n-1}-m_n}}.“$$

Integralibus omnibus praeter unum inventis eorumque ope totidem quantitatibus variabilibus eliminatis si aequationes $x_{\varkappa_1}^{(m_1+m_{\varkappa_1})} = L_1$ etc. ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles reducuntur, huius quoque Multiplicator, cuius ope ea solis Quadraturis integrabilis fiat, constabit multiplicando valorem praecedentem per quantitatum eliminatarum Determinans, Constantium respectu Arbitrariarum, quibus Integralia afficiuntur, formatum.

Berol. d. 26 Julii 1845.

---

§. 21. aequat. 39*. lege $-X_{m+1}, -X_{m+2}, \ldots -X_{2m}$

# 5.

# Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen *).

## 1.

In der Theorie der Säcularstörungen und der kleinen Oscillationen wird man auf ein System lineärer Gleichungen geführt, in welchem die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten in Bezug auf die Diagonale symmetrisch sind, die ganz constanten Glieder fehlen und zu allen in der Diagonale befindlichen Coëfficienten noch dieselbe Gröfse $-x$ addirt ist. Durch Elimination der Unbekannten aus solchen lineären Gleichungen erhält man eine Bedingungsgleichung, welcher $x$ genügen mufs. Für jeden Werth von $x$, welcher diese Bedingungsgleichung erfüllt, hat man sodann aus den lineären Gleichungen die Verhältnisse der Unbekannten zu bestimmen. Ich werde hier zuerst die für ein solches System Gleichungen geltenden algebraischen Formeln ableiten, welche im Folgenden ihre Anwendung finden, und hierauf eine für die Rechnung sehr bequeme Methode mittheilen, wodurch man die numerischen Werthe der Gröfsen $x$ und der ihnen entsprechenden Systeme der Unbekannten mit Leichtigkeit und mit jeder beliebigen Schärfe erhält. Diese Methode überhebt der beschwerlichen Bildung und Auflösung der Gleichung, deren Wurzeln die Werthe von $x$ sind, indem man das gegebne System Gleichungen so transformirt, dafs man für die Gröfsen $x$ starke Annäherungen erhält, worauf für jedes $x$ ein schnell convergirendes Näherungsverfahren zugleich dessen *genauen* Werth und die entsprechenden Werthe der Unbekannten und zwar diese letztern viel leichter als durch die gewöhnlichen Eliminationen ergiebt. Zur Erläuterung dieser Methode habe ich die numerische Auflösung derjenigen Gleichungen gewählt, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und der Längen der Perihelien der Pla-

*) Die sorgfältige Ausführung der in diesem Aufsatze vorkommenden numerischen Rechnungen verdanke ich der Gefälligkeit eines meiner Schüler, des Herrn *Ludwig Seidel* in München.

neten unsers Sonnensystems abhängen, wenn man die höhern Potenzen der Excentricitäten und Neigungen vernachlässigt, da diese numerische Auflösung neuerdings mehrere Astronomen beschäftigt hat. Endlich habe ich neue Formeln für die Correctionen hinzugefügt, welche die gefundnen Zahlenresultate durch Änderung der angenommenen Planetenmassen erfahren, und auch diese Formeln durch die vollständig durchgeführten Rechnungen erläutert. Für die Zahlencoëfficienten habe ich dieselben numerischen Werthe genommen, welche Herr *Leverrier* seinen schätzenswerthen Arbeiten über diesen Gegenstand zum Grunde gelegt hat, um eine Vergleichung der Methoden zu erleichtern.

### Relationen zwischen den verschiedenen Systemen der Unbekannten.

## 2.

Es sei zwischen den $n$ Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$ ein System von $n$ lineären Gleichungen von folgender Form gegeben,

$$1.\quad \begin{cases} \{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma + \ldots + (a,p)\varpi = 0, \\ (b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma + \ldots + (b,p)\varpi = 0, \\ (c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma + \ldots + (c,p)\varpi = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,a)\alpha + (p,b)\beta + (p,c)\gamma + \ldots + \{(p,p)-x\}\varpi = 0, \end{cases}$$

in welchen je zwei zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten, welche durch Vertauschung der Buchstaben auseinander erhalten werden, gleich sind,

$$2.\quad (a,b)=(b,a),\quad (a,c)=(c,a),\quad (b,c)=(c,b),\quad \text{u. s. w.}$$

Die Gröfsen $(a,a)$, $(a,b)$ u. s. w. sind in Zahlen gegeben, die Gröfse $x$ dagegen noch zu bestimmen. Da nämlich die ganz constanten Glieder sämmtlich $=0$ sind, so kann man aus den $n$ Gleichungen (1.) die $n$ Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$ eliminiren, und erhält dadurch für $x$ eine Gleichung $n$ten Grades. Für jeden der $n$ Werthe von $x$, welche dieser genügen, wird jede der $n$ Gleichungen (1.) eine Folge der übrigen $n-1$, und bestimmen irgend $n-1$ derselben die Verhältnisse der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$. Da nur diese Verhältnisse und nicht die absoluten Werthe der Gröfsen $\alpha, \beta$ etc. durch die Aufgabe bestimmt werden, so werde ich annehmen, dafs für jedes der $n$ Systeme dieser Gröfsen, welche den $n$ Wurzeln $x$ entsprechen, die Summe

ihrer Quadrate

$$3.\quad \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\ldots+\varpi\varpi = 1$$

werde, wodurch alle hier vorkommenden Gröfsen bestimmt sind.

### 3.

Es seien nun $x'$, $x''$ irgend zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades, und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, .... $\varpi'$; $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, .... $\varpi''$ die ihnen entsprechenden Werthe der Unbekannten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\varpi$. Man hat dann aus (1.)

$$\begin{aligned}(a,a)\alpha'+(a,b)\beta'+\ldots+(a,p)\varpi' &= \alpha' x',\\ (b,a)\alpha'+(b,b)\beta'+\ldots+(b,p)\varpi' &= \beta' x',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\\ (p,a)\alpha'+(p,b)\beta'+\ldots+(p,p)\varpi' &= \varpi' x'.\end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen der Ordnung nach mit $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, .... $\varpi''$ multiplicirt und nach geschehner Multiplication addirt, so erhält auf der linken Seite $\alpha'$ den Factor

$$(a,a)\alpha''+(b,a)\beta''+(c,a)\gamma''+\ldots+(p,a)\varpi'';$$

dieser ist aber, weil $(b,a)=(a,b)$ u. s. w. und weil $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, .... $\varpi''$ nebst $x''$ die Gleichungen (1.) erfüllen, $=\alpha'' x''$; ebenso wird $\beta'' x''$ der Coëfficient von $\beta'$ u. s. f. Man erhält daher

$$(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'')x'' = (\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'')x'.$$

Hieraus folgt wegen der Voraussetzung, dafs $x'$ und $x''$ *von einander verschiedene Wurzeln* seien,

$$4.\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'' = 0.$$

Aus dieser Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen je zwei Auflösungen ausdrückt, ergiebt sich, wie *Cauchy* bemerkt hat, dafs alle Wurzeln $x$ der Gleichung $n$ten Grades reell sind. Denn wären imaginäre vorhanden, und nähme man für $x'$, $x''$ ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln, so würden auch die Gröfsen $\frac{\beta'}{\alpha'}$ und $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma''}{\alpha''}$, u. s. w., welche rationale Ausdrücke von $x$ sind, die sich durch Auflösung der Gleichungen (1.) ergeben, conjugirte imaginäre Werthe erhalten: die Producte $\frac{\beta'\beta''}{\alpha'\alpha''}$, $\frac{\gamma'\gamma''}{\alpha'\alpha''}$ etc. würden daher jedes eine Summe von zwei Quadraten werden und die Summe aller dieser Producte könnte nicht $=-1$ sein, wie es die Formel (4.) erfordert.

Betrachten wir nun folgende lineäre Ausdrücke:

$$5.\quad \begin{cases} p_1 = \alpha' q_1 + \alpha'' q_2 + \ldots + \alpha^{(n)} q_n, \\ p_2 = \beta' q_1 + \beta'' q_2 + \ldots + \beta^{(n)} q_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \varpi' q_1 + \varpi'' q_2 + \ldots + \varpi^{(n)} q_n, \end{cases}$$

wo $\alpha', \beta', \ldots \varpi'$; $\alpha'', \beta'', \ldots \varpi''$; u. s. w. die verschiedenen Systeme der Werthe der Gröfsen $\alpha, \beta, \ldots \varpi$ sind und zwischen den Gröfsen je zweier Systeme eine Gleichung (4.) Statt findet.

Addirt man die Quadrate dieser Ausdrücke, so verschwinden rechts wegen der Gleichungen (4.) die Coëfficienten der Producte $q_1 q_2$, $q_1 q_3$ etc., und da die Summen der Quadrate der demselben Systeme angehörigen Werthe der Unbekannten $= 1$ angenommen worden sind (3.), so erhält man

$$6.\quad p_1 p_1 + p_2 p_2 + \ldots + p_n p_n = q_1 q_1 + q_2 q_2 + \ldots + q_n q_n.$$

Ferner folgen aus dem System (5.) unmittelbar die umgekehrten Ausdrücke der Gröfsen $q_i$ durch die Gröfsen $p_i$, wenn man die Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander vertauscht. Um nemlich $q_i$ zu finden, braucht man blofs die erste Gleichung mit $\alpha^{(i)}$, die zweite mit $\beta^{(i)}$ u. s. w. zu multipliciren und sie nach geschehener Multiplication zu addiren, so werden nach (4.) alle $q$ eliminirt bis auf $q_i$, das den Factor 1 erhält. Man findet so die umgekehrten Gleichungen

$$7.\quad \begin{cases} q_1 = \alpha' p_1 + \beta' p_2 + \ldots + \varpi' p_n, \\ q_2 = \alpha'' p_1 + \beta'' p_2 + \ldots + \varpi'' p_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = \alpha^{(n)} p_1 + \beta^{(n)} p_2 + \ldots + \varpi^{(n)} p_n. \end{cases}$$

Substituirt man wieder diese Werthe in die durch die Gleichungen (5.) gegebnen Ausdrücke der Gröfsen $p_1, p_2, \ldots p_n$, so giebt die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} p_1 = {} & \{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)}\} p_1 \\ & + \{\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)}\} p_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \{\alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)}\} p_n. \end{aligned}$$

Wegen der ganz allgemeinen Bedeutung der Gröfsen $p_i$ mufs also sein:

$$8.\quad \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)} = 1,$$

$$9.\quad \begin{cases} \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0, \\ \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \ldots + \alpha^{(n)}\gamma^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Analoge Gleichungen wie die hier in Bezug auf $\alpha$ erhaltnen kann man in Bezug auf jedes $\beta, \gamma$ etc. aufstellen, wenn man in den Ausdrücken (5.) von $p_2, p_3$ etc. die Werthe von $q_1, q_3, \ldots q_n$ aus (7.) substituirt. Diese Gleichungen ergeben sich auch sämmtlich auf einmal, wenn man die Summe der Quadrate der Werthe (7.) von $q_1, q_2, \ldots q_n$ bildet, welche zufolge (6.) gleich

$$p_1 p_2 + p_2 p_2 \ldots + p_n p_n$$

sein mufs.

Wenn man, anstatt die Quadrate der Werthe (7.) der Gröfsen $q_i$ unmittelbar zu addiren, vorher $q_1^2$ mit $x'$, $q_2^2$ mit $x''$, u. s. w. multiplicirt, wo $x', x'', \ldots x^{(n)}$ die $n$ Werthe von $x$ bedeuten, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung das Aggregat

$$x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots + x^{(n)} q_n^2,$$

zur Rechten eine homogene Function zweiten Grades der Gröfsen $p_i$ und in derselben als Coëfficient von $p_1^2$ den Ausdruck

$$x' \cdot \alpha' \alpha' + x'' \cdot \alpha'' \alpha'' + \ldots + x^{(n)} \cdot \alpha^{(n)} \alpha^{(n)},$$

als Coëfficient von $2 p_1 p_2$ den Ausdruck

$$x' \cdot \alpha' \beta' + x'' \cdot \alpha'' \beta'' + \ldots + x^{(n)} \cdot \alpha^{(n)} \beta^{(n)},$$

und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Coëfficienten. Diese Ausdrücke lassen sich aber unmittelbar auf die Zahlencoëfficienten der Gleichungen (1.) zurückführen. Die erste dieser Gleichungen ergiebt nämlich:

$$\begin{aligned} x' \alpha' &= (a,a)\alpha' + (a,b)\beta' + \ldots + (a,p)\varpi', \\ x'' \alpha'' &= (a,b)\alpha'' + (a,b)\beta'' + \ldots + (a,p)\varpi'', \end{aligned}$$

u. s. w.

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ multiplicirt und addirt, so erhält man nach (8.) und (9.) den Coëfficient von $p_1^2$,

$$x' \alpha'^2 + x'' \alpha''^2 + \ldots + x^{(n)} \alpha^{(n)2} = (a,a).$$

Wenn man hingegen dieselben Gleichungen der Ordnung nach mit $\beta', \beta''$ etc. multiplicirt und addirt, so erhält man den Coëfficient von $2 p_1 p_2$,

$$x' \alpha' \beta' + x'' \alpha'' \beta'' + \ldots + x^{(n)} \alpha^{(n)} \beta^{(n)} = (a,b),$$

und auf dieselbe Weise ergeben sich die Werthe aller übrigen Coëfficienten der homogenen Function 2ten Grades. Man findet so die Gleichung

$$\begin{aligned} 10. \quad & x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots + x^{(n)} q_n^2 = \\ & (a,a) p_1^2 + 2(a,b) p_1 p_2 + 2(a,c) p_1 p_3 + \ldots \\ & \quad + (b,b) p_2^2 + 2(b,c) p_2 p_3 + \ldots \\ & \quad\quad + (c,c) p_3^2 + \ldots \\ & \quad\quad\quad \ldots\ldots \end{aligned}$$

Hätte man statt der symbolischen Ausdrücke $(a, a)$, $(a, b)$ u. s. w. wirklich die Quadrate und Producte $aa$, $ab$ u. s. w., so würde die homogene Function zur Rechten sich in das Quadrat $\{ap_1+bp_2+cp_3+\ldots.\}^2$ verwandeln.

Auf eine noch übersichtlichere Art ergiebt sich die Gleichung (10.) aus den Gleichungen

$$(a,a)p_1+(a,b)p_2+(a,c)p_3+\ldots. = x'\alpha'\cdot q_1+x''\alpha''\cdot q_2+x'''\alpha'''\cdot q_3+\ldots.,$$
$$(b,a)p_1+(b,b)p_2+(b,c)p_3+\ldots. = x'\beta'\cdot q_1+x''\beta''\cdot q_2+x'''\beta'''\cdot q_3+\ldots.,$$
$$(c,a)p_1+(c,b)p_2+(c,c)p_3+\ldots. = x'\gamma'\cdot q_1+x''\gamma''\cdot q_2+x'''\gamma'''\cdot q_3+\ldots.,$$

u. s. w.,

die man dadurch erhält, dafs man für die Gröfsen $p_i$ ihre Ausdrücke durch die Gröfsen $q_i$ setzt, und die Coëfficienten der einzelnen $q_i$ vermittelst der Gleichungen (1.) auf einen Term reducirt. Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $p_1$, $p_2$ u. s. w. und addirt sie alle, so erhält man links die obige homogene Function 2ter Ordnung, und rechts vermittelst der Gleichungen (7.) den Ausdruck

$$x'q_1^2+x''q_2^2+\ldots.+x^{(n)}q_n^2.$$

In der Abhandlung „De binis quibuslibet functionibus etc." im 12ten Bande von *Crelle's* Journal bin ich von den beiden Gleichungen (6.) und (10.) ausgegangen, und auf dem umgekehrten Wege zu dem System (1.) und den Gleichungen (3.) und (4.) gelangt.

### Allgemeine Correctionsformeln der Werthe der Unbekannten.

### 4.

Aus den bereits entwickelten Relationen zwischen den verschiedenen Systemen von Werthen der Unbekannten, welche den verschiedenen Werthen von $x$ entsprechen, lassen sich auch einfache Ausdrücke für die nach den Gröfsen $(a, a)$, $(a, b)$, .... genommnen partiellen Differentialquotienten von $x$, $\alpha, \beta, \ldots.$ folgern. Diese partiellen Differentialquotienten bestimmen die für kleine Änderungen der Zahlencoëfficienten $(a, a)$, $(a, b)$ etc. an den gefundnen Werthen anzubringenden Correctionen, wenn man die Quadrate und Producte dieser Änderungen vernachlässigt. Es ist hiebei nur nöthig, die Differentialquotienten zweier Gröfsen, $x'$ und $\alpha'$, zu suchen, da die übrigen sich ganz analog bilden lassen. Bezeichnet man durch

$$(a,a)+\Delta(a,a), \quad x'+\Delta x', \quad \alpha'+\Delta\alpha' \quad \text{u. s. w.}$$

die geänderten Werthe von $(a, a)$, $x'$, $\alpha'$ u. s. w., und vernachlässigt man die

2ten Potenzen der Incremente, so dafs die Formeln für Differentiale streng richtig sind, so hat man zuerst aus (1.)

$$11.\quad \begin{cases} \alpha'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(a,a)+\beta'\cdot\Delta(a,b)+\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\ldots.\} \\ \quad = \{(a,a)-x'\}\Delta\alpha'+(a,b)\Delta\beta'+(a,c)\Delta\gamma'+\ldots., \\ \beta'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(b,a)+\beta'\cdot\Delta(b,b)+\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\ldots.\} \\ \quad = (b,a)\Delta\alpha'+\{(b,b)-x'\}\Delta\beta'+(b,c)\Delta\gamma'+\ldots., \\ \gamma'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(c,a)+\beta'\cdot\Delta(c,b)+\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\ldots.\} \\ \quad = (c,a)\Delta\alpha'+(c,b)\Delta\beta'+\{(c,c)-x'\}\Delta\gamma'+\ldots., \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, .... und addirt sie nach geschehener Multiplication, so verschwinden wegen der Gleichungen (1.) die Gröfsen zur Rechten des Gleichheitszeichens, und man erhält, da der Coëfficient von $\Delta x' = 1$ wird:

$$12.\quad \begin{aligned} \Delta x' = {} & \alpha'\alpha'\cdot\Delta(a,a)+2\alpha'\beta'\cdot\Delta(a,b)+2\alpha'\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\ldots. \\ & +\beta'\beta'\cdot\Delta(b,b)+2\beta'\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\ldots. \\ & +\gamma'\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\ldots. \\ & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Um die Correctionen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. zu erhalten, verfahre ich wie folgt. Ich addire zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten der Reihe nach die Gröfsen $(x'-x'')\Delta\alpha'$, $(x'-x'')\Delta\beta'$, $(x'-x'')\Delta\gamma'$ etc., multiplicire sie hierauf mit $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ etc. und addire alle. Ebenso addire ich zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten $(x'-x''')\Delta\alpha'$, $(x'-x''')\Delta\beta'$ etc., multiplicire mit $\alpha'''$, $\beta'''$ etc. und addire, etc. etc. Durch dieses Verfahren verschwinden jedesmal die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen und der in $\Delta x'$ multiplicirte Term, und man erhält zwischen den $n$ Variationen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. $n-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} & (x'-x'')\{\alpha''\Delta\alpha'+\beta''\Delta\beta'+\gamma''\Delta\gamma'+\ldots.\} \\ = {} & \alpha''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha''\beta'+\alpha'\beta''\}\Delta(a,b)+\beta''\beta'\Delta(b,b) \text{ etc.}, \\ & (x'-x''')\{\alpha'''\Delta\alpha'+\beta'''\Delta\beta'+\gamma'''\Delta\gamma'+\ldots.\} \\ = {} & \alpha'''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha'''\beta'+\alpha'\beta'''\}\Delta(a,b)+\beta'''\beta'\Delta(b,b) \text{ etc.}, \\ & \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}, \end{aligned}$$

zu welchen als $n$te noch nach (3.) die Gleichung

$$\alpha'\Delta\alpha'+\beta'\Delta\beta'+\gamma'\Delta\gamma'+\ldots. = 0$$

kommt. Multiplicirt man diese letzte Gleichung mit $\alpha'$ und die $n-1$ vorhergehenden respective mit $\frac{\alpha''}{x'-x''}$, $\frac{\alpha'''}{x'-x'''}$ u. s. f. und addirt alle, so werden zufolge (9.) die Gröfsen $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$ etc. sämmtlich eliminirt und man erhält:

$$13.\quad \Delta\alpha' = \alpha'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}\Delta(a,a)$$
$$+\left(\beta'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}+\alpha'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}\right)\Delta(a,b)$$
$$+\ \beta'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}\Delta(b,b)+\text{etc.}$$

Man hat daher aus (12.) und (13.) die strengen Differentialformeln:

$$14.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial(a,a)} = \alpha'\alpha'; \quad \dfrac{\partial x'}{\partial(a,b)} = 2\alpha'\beta'; \quad \text{etc.} \\ \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)} = \alpha'\left\{\dfrac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\dfrac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}; \quad \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)} = \beta'\left\{\dfrac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\dfrac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}; \\ \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,b)} = \dfrac{\beta'}{\alpha'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)}+\dfrac{\alpha'}{\beta'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}; \quad \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,c)} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}+\dfrac{\beta'}{\gamma'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(c,c)}; \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Mit den nöthigen Vertauschungen geben diese eleganten Formeln die ersten Differentialquotienten aller Unbekannten der $n$ Systeme nach allen Coëfficienten des gegebenen Systems (1.). Man sieht aus denselben, dafs die ersten Differentialquotienten der Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades ohne weitere Rechnung unmittelbar durch die Werthe der Unbekannten gegeben sind, und dafs die ersten Differentialquotienten jeder der Unbekannten $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. nach den Gröfsen $(a, b)$, $(b, c)$ etc. sich aus ihren ersten Differentialquotienten nach den Gröfsen $(a, a)$, $(b, b)$ etc. leicht zusammensetzen lassen, so dafs man nur diese letztern zu berechnen hat, von welchen wieder je zwei auseinander durch die Gleichung $\dfrac{\alpha'\partial\alpha'}{\partial(b,b)} = \dfrac{\beta'\partial\beta'}{\partial(a,a)}$ erhalten werden. Die ersten Differentialquotienten der Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. geben ferner sogleich auch die *zweiten* der Wurzeln $x'$, $x''$ etc. Wenn die Incremente $\Delta(a, b)$ und $\Delta(b, a)$ verschieden sind, so hat man für $\Delta(a, b)$ in (12.) ihre halbe Summe $\frac{1}{2}(\Delta(a, b)+\Delta(b, a))$ zu setzen, und in (13.) den ersten Theil des mit $\Delta(a, b)$ multiplicirten Aggregats mit $\Delta(a, b)$, den zweiten mit $\Delta(b, a)$ zu multipliciren.

Aufstellung der numerischen Gleichungen, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der Planeten abhängen, in der in Bezug auf die Diagonale symmetrischen Form. Formeln zur Bestimmung der willkürlichen Constanten.

## 5.

Von einem System von der Form der Gleichungen (1.) hängen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der sieben Hauptplaneten unseres Sonnensystems ab. Die zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthigen numerischen Daten entnehme ich aus Herrn *Leverrier's* Aufsatz „Sur

les variations séculaires des éléments des orbites etc." in den „Additions à la connaissance des temps pour l'an 1843."

Bezeichnet $e$ die Excentricität der Merkursbahn, $\varpi$ die Länge ihres Perihels, und setzt man

$$h = e\sin\varpi, \qquad l = e\cos\varpi,$$

werden ferner dieselben Gröfsen für Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus durch die nämlichen Buchstaben mit einem, zwei, drei, .... sechs Accenten bezeichnet, so hat man für die Gröfsen $h$ und $l$, wenn man sich auf die Glieder beschränkt, die von der ersten Ordnung der Excentricitäten sind, folgende lineäre Differentialgleichungen, in welchen $t$ die Zeit, in Julian. Jahren ausgedrückt, bedeutet:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \frac{dh}{dt} = \{(0,1)+(0,2)+\ldots.\}l - \boxed{0,1}l' - \boxed{0,2}l'' - \ldots., \\ \frac{dl}{dt} = -\{(0,1)+(0,2)+\ldots.\}h + \boxed{0,1}h' + \boxed{0,2}h'' + \ldots., \\ \frac{dh'}{dt} = \{(1,0)+(1,2)+\ldots.\}l' - \boxed{1,0}l - \boxed{1,2}l'' - \ldots., \\ \frac{dl'}{dt} = -\{(1,0)+(1,2)+\ldots.\}h' + \boxed{1,0}h + \boxed{1,2}h'' + \ldots., \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

(*Laplace*, Méc. cél. Buch II. §. 55.). Die Coëfficienten (0, 1) etc. und $\boxed{0,1}$ etc. hängen nur von den Massen der Planeten und von den grofsen Axen ihrer Bahnen ab. Bezeichnet man die ersten mit $m$ und die halben Axen mit $a$, und versieht diese Gröfsen ebenso mit Accenten wie die andern Gröfsen, so sind je zwei Coëfficienten wie (0, 1) und (1, 0), $\boxed{0,1}$ und $\boxed{1,0}$ durch die Gleichungen

$$\text{II.}\quad \begin{cases} m\sqrt{a}\,(0,1) = m'\sqrt{a'}\,(1,0), \\ m\sqrt{a}\,\boxed{0,1} = m'\sqrt{a'}\,\boxed{1,0} \end{cases}$$

mit einander verbunden. Setzt man zur Integration der Gleichungen I.

$$\begin{aligned} h &= N_0\sin(gt+\beta); & l &= N_0\cos(gt+\beta), \\ h' &= N_1\sin(gt+\beta); & l' &= N_1\cos(gt+\beta), \\ &\text{etc.} & &\text{etc.}, \end{aligned}$$

wo $g$ und die Gröfsen $N$ Constanten bedeuten, so erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen I. sieben Bedingungsgleichungen zwischen $g$ und den Gröfsen $N$:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} (g-(0,1)-(0,2)-\ldots.)N_0 + \boxed{0,1}N_1 + \boxed{0,2}N_2 + \ldots. = 0, \\ \boxed{1,0}N_0 + (g-(1,0)-(1,2)-\ldots.)N_1 + \boxed{1,2}N_2 + \ldots. = 0, \\ \boxed{2,0}N_0 + \boxed{2,1}N_1 + (g-(2,0)-(2,1)-\ldots.)N_2 + \ldots. = 0, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen 7 Gleichungen die Verhältnisse von 6 der Gröfsen $N$ zur 7ten, so erhält man für $g$ eine Gleichung siebenten Grades, also sieben Wurzeln $g, g', g'', \ldots g^{vi}$, und ein zu jeder gehöriges System von Werthen der Verhältnisse der sieben Gröfsen $N$. Die allgemeinen Integrale der Gleichungen I. sind dann:

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} h = N_0 \sin(gt+\beta) + N_0' \sin(g't+\beta') + \ldots., \\ l = N_0 \cos(gt+\beta) + N_0' \cos(g't+\beta') + \ldots., \\ h' = N_1 \sin(gt+\beta) + N_1' \sin(g't+\beta') + \ldots., \\ l' = N_1 \cos(gt+\beta) + N_1' \cos(g't+\beta') + \ldots. \end{cases}$$

Da in jedem System nur $g$ und die Verhältnisse der Gröfsen $N_i$ bestimmt sind, eine der Gröfsen $N_i$ und der Winkel $\beta$ willkürlich bleiben, so hat man im Ganzen noch 14 willkürliche Constanten, welche durch die als gegeben anzusehenden Anfangswerthe der 14 Gröfsen $h$ und $l$ bestimmt werden müssen.

Nimmt man für die Gröfsen $m$ und $a$ folgende Zahlenwerthe an:

| | Masse | Halbe gr. Axe |
|---|---|---|
| Mercur | $\frac{1}{1000706}$ | 0,38709812 |
| Venus | $\frac{1}{401839}$ | 0,72333230 |
| Erde | $\frac{1}{332854}$ | 1,00000000 |
| Mars | $\frac{1}{3088337}$ | 1,52369352 |
| Jupiter | $\frac{1}{1050}$ | 5,20116636 |
| Saturn | $\frac{1}{3512}$ | 9,53787090 |
| Uranus | $\frac{1}{17918}$ | 19,18330500 |

so werden (nach *Leverrier* a. a. O. S. 13) die Werthe der Gröfsen $(i, k)$ in Sexagesimalsecunden ausgedrückt:

| $i$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | * | 0,447992 | 0,103506 | 0,019797 | 0,00024016 | 0,00002855 | 0,00000247 |
| 1 | 2,910335 | * | 5,174037 | 0,468978 | 0,00409110 | 0,00047742 | 0,00004104 |
| 2 | 0,891538 | 6,860112 | * | 1,817218 | 0,00912341 | 0,00103919 | 0,00008866 |
| 3 | 0,027984 | 0,102046 | 0,298228 | * | 0,00310537 | 0,00032980 | 0,00002755 |
| 4 | 1,601114 | 4,198404 | 7,061544 | 14,645853 | * | 18,196879 | 0,934785 |
| 5 | 0,077059 | 0,198360 | 0,325649 | 0,629736 | 7,367279 | * | 1,390990 |
| 6 | 0,001852 | 0,004740 | 0,007723 | 0,014625 | 0,105202 | 0,386656 | * |

Durch Addition der unter einander stehenden Zahlen erhält man die Zahlen, welche in der Diagonale in III. von $g$ abgezogen werden. Substituirt man ferner

in III. die von Herrn *Leverrier* gegebnen, ebenfalls in Sexagesimalsecunden ausgedrückten, Werthe der Coëfficienten $[\overline{i,k}]$, so wird das aufzulösende System Gleichungen:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} (g-5{,}509882)N_0+1{,}870086N_1+0{,}422908N_2+0{,}008814N_3 \\ \qquad +0{,}148711N_4+0{,}003908N_5+0{,}000045N_6 \end{cases} =0,$$
$$\begin{cases} 0{,}287865N_0+(g-11{,}811654)N_1+5{,}711900N_2+0{,}058717N_3 \\ \qquad +0{,}728088N_4+0{,}018788N_5+0{,}000224N_6 \end{cases} =0,$$
$$\begin{cases} 0{,}049099N_0+4{,}308033N_1+(g-12{,}970687)N_2+0{,}229326N_3 \\ \qquad +1{,}689087N_4+0{,}042580N_5+0{,}000504N_6 \end{cases} =0,$$
$$\begin{cases} 0{,}006235N_0+0{,}269851N_1+1{,}397369N_2+(g-17{,}596207)N_3 \\ \qquad +5{,}304038N_4+0{,}125346N_5+0{,}001451N_6 \end{cases} =0,$$
$$\begin{cases} 0{,}00002231N_0+0{,}00070948N_1+0{,}00218227N_2+0{,}00112462N_3 \\ \qquad +(g-7{,}489041)N_4+4{,}815454N_5+0{,}035319N_6 \end{cases} =0,$$
$$\begin{cases} 0{,}00000145N_0+0{,}00004522N_1+0{,}00013588N_2+0{,}00006565N_3 \\ \qquad +11{,}893979N_4+(g-18{,}585410)N_5+0{,}232241N_6 \end{cases} =0,$$
$$\begin{cases} 0{,}00000006N_0+0{,}00000194N_1+0{,}00000579N_2+0{,}00000273N_3 \\ \qquad +0{,}313829N_4+0{,}835482N_5+(g-2{,}325935)N_6 \end{cases} =0.$$

Das hier vorliegende System hat noch keine in Bezug auf die Diagonale symmetrische Form, wie sie der Gegenstand der Betrachtung in den vorhergehenden Paragraphen gewesen ist. Diese Form kann ihm aber vermöge der Gleichungen II., die zwischen je zweien zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten Statt finden, sehr leicht gegeben werden *). Setzt man nämlich in den Gleichungen V.

$$\text{VI.}\quad N_0=\frac{KM_0}{\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}};\quad N_1=\frac{KM_1}{\sqrt{(m'\sqrt{a'})}};\quad \ldots.\quad N_6=\frac{KM_6}{\sqrt{(m^{\text{VI}}\sqrt{a^{\text{VI}}})}},$$

und multiplicirt nach Ausführung dieser Substitution die erste Gleichung mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}$, die zweite mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m'\sqrt{a'})}$, u. s. f., so bleiben die Coëfficienten in der Diagonale unverändert und es ist nach II. klar, dafs nun allgemein der Coëfficient in der $i$ten Horizontal- und $k$ten Verticalreihe gleich dem Coëfficienten in der $k$ten Horizontal- und $i$ten Verticalreihe werden mufs.

*) Dadurch, dafs man früher diese vorläufige Präparation, durch welche die zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten gleich werden, verabsäumt hat, ist, abgesehen von der angewandten Auflösungsmethode, die Mühe der Rechnung fast verdoppelt worden.

Man erhält so mit Anwendung der Werthe

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} 6{,}7564720-10\ \ldots\ = \log\gamma'(m^{0}\gamma a^{0}), \\ 7{,}1628084\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma'(m'\gamma a'), \\ 7{,}2240592\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma'(m''\gamma a''), \\ 6{,}8316297\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma'(m'''\gamma a'''), \\ 8{,}6684306\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma'(m^{\text{IV}}\gamma a^{\text{IV}}), \\ 8{,}4720856\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma'(m^{\text{V}}\gamma a^{\text{V}}), \\ 8{,}1940861\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma'(m^{\text{VI}}\gamma a^{\text{VI}}) \end{cases}$$

folgende Gleichungen, in denen statt der Coëfficienten selbst überall, ausgenommen in der Diagonale, ihre Logarithmen gesetzt sind:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} (g-5{,}509882.0)M_0+9{,}8655252M_1+9{,}1586592M_2+7{,}8700057M_3 \\ \qquad +7{,}2604292M_4+5{,}8766796M_5+4{,}2156819M_6 \end{cases}=0, \\ \begin{cases} 9{,}8655252M_0+(g-11{,}8116540)M_1+0{,}6955298M_2+9{,}0999439M_3 \\ \qquad +8{,}3565631M_4+6{,}9646084M_5+5{,}3191061M_6 \end{cases}=0, \\ \begin{cases} 9{,}1586592M_0+0{,}6955298M_1+(g-12{,}970687.0)M_2+9{,}7528822M_3 \\ \qquad +8{,}7832803M_4+7{,}3811819M_5+5{,}7325546M_6 \end{cases}=0, \\ \begin{cases} 7{,}8700057M_0+9{,}0999439M_1+9{,}7528822M_2+(g-17{,}596207.0)M_3 \\ \qquad +8{,}8878063M_4+7{,}4576700M_5+5{,}7989267M_6 \end{cases}=0, \\ \begin{cases} 7{,}2604292M_0+8{,}3565631M_1+8{,}7832803M_2+8{,}8878063M_3 \\ \qquad +(g-7{,}489041.0)M_4+0{,}8789822M_5+9{,}0223508M_6 \end{cases}=0, \\ \begin{cases} 5{,}8766796M_0+6{,}9646084M_1+7{,}3811819M_2+7{,}4576700M_3 \\ \qquad +0{,}8789822M_4+(g-18{,}585410.0)M_5+9{,}6439380M_6 \end{cases}=0, \\ \begin{cases} 4{,}2156819M_0+5{,}3191061M_1+5{,}7325546M_2+5{,}7989267M_3 \\ \qquad +9{,}0223508M_4+9{,}6439380M_5+(g-2{,}325935.0)M_6 \end{cases}=0. \end{cases}$$

Damit die Gröfsen $M$ völlig bestimmt seien, füge ich zu den Gleichungen VIII. noch die Bedingung

$$\text{IX.}\quad M_0^2+M_1^2+M_2^2+\ldots.+M_6^2=1.$$

Die algebraischen Ausdrücke der mit $(i,k)$ und $\overline{|i,k|}$ bezeichneten Gröfsen haben den Factor $m^{(i)}$. Ändert man daher die für die Massen oben angenommnen Zahlenwerthe, indem man der Masse $m^{(i)}$ einen wenig von 1 verschiednen Factor $1+\mu^{(i)}$ giebt, so sind die für $(i,k)$ und $\overline{|i,k|}$ angegebnen Zahlen noch mit diesem Factor $1+\mu^{(i)}$ zu multipliciren. Hiernach erhält in der $(i+1)$ten Gleichung die von $g$ abzuziehende Zahl, die in V. und VIII. dieselbe geblieben ist, die Änderung

$$(i,0)\cdot\mu+(i,1)\cdot\mu'\ldots.+(i,6)\cdot\mu^{\text{VI}},$$

wo jedesmal der Term $(i,i)\cdot\mu^{(i)}$ auszulassen ist. Nach der Art, wie die Gleichungen VIII. aus V. abgeleitet sind, wird in VIII., wenn $i$ und $k$ von einander verschieden sind, der Coëfficient von $M_k$ in der $(i+1)$ten Gleichung

$$\sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}\cdot\boxed{i,k},$$

und erhält daher den Factor

$$\sqrt{((1+\mu^{(i)})(1+\mu^{(k)}))},$$

wofür man, da die Quadrate und Producte der Gröfsen $\mu$ vernachlässigt werden, einfacher $1+\frac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)})$ setzen kann. Auf diese Weise werden die Variationen der Coëfficienten der Gleichungen VIII. bestimmt, welche kleinen Änderungen der angenommenen Werthe der Planetenmassen entsprechen.

Sind $h_0$, $l_0$; $h_0'$, $l_0'$ etc. die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe von $h$, $l$; $h'$, $l'$ etc., und setzt man

$$h_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}=H^{(i)},\qquad l_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}=L^{(i)},$$

bezeichnet man ferner die den verschiednen Wurzeln $g$, $g'$, .... $g^{\text{VI}}$ entsprechenden Werthe von $M_i$ mit $M_i$, $M_i'$, .... $M_i^{\text{VI}}$, so hat man zur Bestimmung der 14 willkürlichen Constanten $K$, $\beta$; $K'$, $\beta'$ etc. zufolge (IV.) und (VI.) die beiden Systeme Gleichungen:

$$\begin{aligned}
H &= M_0\cdot K\sin\beta+M_0'\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_0^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
H' &= M_1\cdot K\sin\beta+M_1'\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_1^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H^{\text{VI}} &= M_6\cdot K\sin\beta+M_6'\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_6^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
L &= M_0\cdot K\cos\beta+M_0'\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_0^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}},\\
L' &= M_1\cdot K\cos\beta+M_1'\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_1^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L^{\text{VI}} &= M_6\cdot K\cos\beta+M_6'\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_6^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man nach §. 3., da die Gröfsen $M_0$, $M_1$ etc. mit den dort gebrauchten $\alpha$, $\beta$ etc. übereinkommen,

$$\begin{aligned}
A &= K\sin\beta = HM_0+H'M_1\ldots.+H^{\text{VI}}M_6,\\
B &= K\cos\beta = LM_0+L'M_1\ldots.+L^{\text{VI}}M_6,\\
A' &= K'\sin\beta' = HM_0'+H'M_1'\ldots.+H^{\text{VI}}M_6',\\
B' &= K'\cos\beta' = LM_0'+L'M_1'\ldots.+L^{\text{VI}}M_6',\\
&\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.},
\end{aligned}$$

woraus sich die Werthe der Winkel $\beta$, $\beta'$ etc. und der Gröfsen $K$, $K'$ etc. ergeben, aus welchen letztern durch die Formel (VI.)

$$N_i^{(h)} = \frac{M_i^{(h)} K^{(h)}}{\sqrt{(m^{(i)} \sqrt{a^{(i)}})}}$$

die Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ folgen.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ und der Winkel $\beta^{(h)}$ können die Gleichungen

$$k_0^{(i)} = N_i \sin\beta + N_i' \sin\beta' \ldots + N_i^{\nu_1} \sin\beta^{\nu_1},$$
$$l_0^{(i)} = N_i \cos\beta + N_i' \cos\beta' \ldots + N_i^{\nu_1} \cos\beta^{\nu_1}$$

dienen, welche aus (IV.) für $t = 0$ folgen.

### Wiederholte Transformationen des Systems der Gleichungen VIII.

### 6.

In den Gleichungen VIII. bemerkt man, dafs im Allgemeinen die Zahlencoëfficienten, die in der Diagonale stehen, beträchtlich gröfser sind als die übrigen, von welchen letztern die Logarithmen angesetzt sind. Wäre dies überall der Fall, so würde man unmittelbar durch ein leichtes und schnelles Näherungsverfahren, welches ich weiter unten auseinander setzen werde, die Werthe der Unbekannten mit beliebiger Strenge finden können. Sobald aber auch nur einzelne der Coëfficienten, die nicht in der Diagonale stehn, beträchtliche Werthe haben, wie es in VIII. der Fall ist, kann dies Verfahren nicht angewendet werden. Dieser hinderliche Umstand läfst sich jedoch dadurch beseitigen, dafs man auf zweckmäfsige Weise die Gleichungen transformirt, indem man mittelst einfacher lineärer Substitutionen immer für zwei der Unbekannten zwei andere Gröfsen einführt.

Es seien nämlich die Gleichungen

$$\ldots + (g-a) M_i + \ldots + c M_k + \ldots + h_{i,l} M_l + \ldots = 0,$$
$$\ldots + c M_i + \ldots + (g-b) M_k + \ldots + h_{k,l} M_l + \ldots = 0$$

zwei von den Gleichungen des Systems VIII., in welchen der aufserhalb der Diagonale befindliche Coëfficient $c$ einen erheblichen Werth hat: so kann man dadurch, dafs man $M_i$ und $M_k$ durch andere Unbekannte $P_i$ und $P_k$ ersetzt und die beiden Gleichungen gehörig zu zwei andern combinirt, das gegebne System in ein andres von ähnlicher Form verwandeln, in welchem, während $g$ unverändert bleibt, der Coëfficient, welcher an die Stelle von $c$ tritt, *verschwindet.* Setzt man nämlich

$$\text{X.} \quad \begin{cases} M_i = \cos\alpha\, P_i - \sin\alpha\, P_k, \\ M_k = \sin\alpha\, P_i + \cos\alpha\, P_k, \end{cases}$$

so wird jetzt in jeder von den beiden Gleichungen die Gröfse $g$ in zwei Gliedern stehn. Man kann aber aus ihnen sogleich wieder zwei solche Gleichungen ableiten, die $g$ nur in Einem Glied enthalten, wenn man einmal die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die 2te mit $\sin\alpha$ multiplicirt und sie nach geschehner Multiplication addirt, und dann die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt, und beide nach geschehner Multiplication ebenfalls addirt. Die neuen Gleichungen werden dadurch

$$\ldots. + \{g - a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha\} P_i + \ldots. + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\} P_k + \ldots. + (h_{i,l}\cos\alpha + h_{k,l}\sin\alpha) M_l + \ldots. = 0,$$

$$\ldots. + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\} P_i + \ldots. + \{g - a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha\} P_k + \ldots. + (-h_{i,l}\sin\alpha + h_{k,l}\cos\alpha) M_l + \ldots. = 0.$$

Man sieht, dafs hierdurch die Coëfficienten, welche in beiden Gleichungen dem $c$ entsprechen, wieder wie früher einander gleich werden. Auch sonst behält das System seine Symmetrie, wenn statt $M_i$, $M_k$ überall $P_i$, $P_k$ eingeführt wird; denn im transformirten System werden die Coëfficienten von $P_i$ und $P_k$ in der $(l+1)$ten Gleichung

$$h_{l,i}\cos\alpha + h_{l,k}\sin\alpha \quad \text{und} \quad -h_{l,i}\sin\alpha + h_{l,k}\cos\alpha,$$

welche mit den Coëfficienten von $M_l$ in der oben angegebnen transformirten $(i+1)$ten und $(k+1)$ten Gleichung übereinkommen, weil nach der Eigenschaft des ursprünglichen Systems VIII. man $h_{l,i} = h_{i,l}$, $h_{l,k} = h_{k,l}$ hat.

Man kann nun den noch willkürlichen Winkel $\alpha$ so bestimmen, dafs der an die Stelle von $c$ getretene Coëfficient

$$(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha = 0$$

wird, was für $\alpha$ die Gleichung

$$\text{XI.} \quad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2c}{b-a}$$

giebt. Sind $a'$ und $b'$ die neuen, den frühern $a$ und $b$ entsprechenden, Gröfsen in der Diagonale, so hat man

$$a' = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$b' = a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha,$$

und daher zur bequemen Berechnung von $a'$ und $b'$ die Formeln

$$\text{XII.} \quad \begin{cases} b' + a' = b + a, \\ b' - a' = \dfrac{b-a}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2c}{\sin 2\alpha}, \end{cases}$$

welche zugleich durch den für $b' - a'$ angegebnen doppelten Ausdruck eine Controlle der Rechnung enthalten. Die Werthe der beiden Systeme Gröfsen

$$h'_{i,l} = \cos\alpha \cdot h_{i,l} + \sin\alpha \cdot h_{k,l},$$
$$h'_{k,l} = \cos\alpha \cdot h_{k,l} - \sin\alpha \cdot h_{i,l},$$

in welchen $l$ von $i$ und $k$ verschieden ist, können ebenfalls leicht controllirt werden, da der Winkel $\alpha$ derselbe bleibt, und daher zwischen den Summen der den verschiednen $l$ entsprechenden Gröfsen die nämlichen Gleichungen Statt finden.

Die Summen der Quadrate der Zahlencoëfficienten des gegebnen und transformirten Systems sind einander gleich, wenn man jeden Coëfficienten so oft als er vorkommt nimmt, d. h. die aufserhalb der Diagonale befindlichen zweimal. Denn für jedes $l$ ist $h'^2_{i,l} + h'^2_{k,l} = h^2_{i,l} + h^2_{k,l}$; ferner

$$(a'+b')^2 + (a'-b')^2\cos^2 2\alpha + (a'-b')^2\sin^2 2\alpha = (a+b)^2 + (a-b)^2 + 4c^2,$$

und daher

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 + 2c^2.$$

Theilt man daher die Summe der Quadrate der Zahlencoëfficienten in die Summe der Quadrate der in der Diagonale und in die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wächst durch die Transformation die erste Summe um $2c^2$, während die zweite Summe sich um dieselbe Gröfse $2c^2$, nämlich um die Summe der Quadrate der beiden vernichteten Coëfficienten, verkleinert hat. Wiederholt man die Transformation, indem man immer nur für zwei Unbekannte andre Gröfsen einführt, und zwei Gleichungen auf die angegebne Art zu zwei andern Gleichungen combinirt, so wird für jedes nach und nach durch die angegebne Transformation erhaltene System Gleichungen der Satz gelten,

*dafs die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten um die Summe der Quadrate aller in den einzelnen Transformationen vernichteten Coëfficienten kleiner geworden ist als in dem ursprünglich gegebnen System Gleichungen, und dafs die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Coëfficienten sich um dieselbe Gröfse vermehrt hat.*

Man ersieht aus diesem Satze, dafs man in allen Fällen die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten nach und nach so klein als man nur will machen kann, so dafs sie kleiner werden kann als jede gegebne noch so kleine Gröfse. *Es lassen sich also auch alle einzelnen aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten durch wiederholte Anwendung der angegebnen Transformation unendlich verkleinern.* Man kann so immer dem Grenzfall, wo jene Coëfficienten ganz verschwinden und die

Gleichungen sich unmittelbar auflösen lassen, beliebig nahe kommen, ohne dafs es nothwendig wäre, dafs, wie in unserm Fall, schon Anfangs die Mehrzahl der Glieder aufserhalb der Diagonale von denen in derselben an Gröfse übertroffen würde.

Ist nämlich $n$ die Anzahl der Gleichungen und $S$ nach der ersten Transformation die Summe der Quadrate der $n(n-1)$ aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wird, da immer wenigstens zwei dieser Coëfficienten in jedem transformirten System $=0$ sind, das Quadrat des gröfsten $> \frac{S}{(n-2)(n+1)}$. Wenn man daher durch jede neue Transformation immer den gröfsten der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten zerstört, so wird die Summe im nächsten System $< S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)$, im nächst folgenden $< S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)^2$, und nach $i$ Transformationen $< S\left(1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}\right)^i$, welche Gröfse mit wachsendem $i$ kleiner als jede gegebne werden kann. Diese Summen werden aber in der Wirklichkeit viel schneller abnehmen, da die Verringerung nur dann genau in dem Verhältnisse $1 : 1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}$ Statt fände, wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten aufser den zweien verschwindenden sämmtlich einander gleich wären. Man sieht zugleich, dafs die Transformation mit dem meisten Erfolg angewandt wird, wenn unter den aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten ein Paar gleiche zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten einen vorzugsweise bedeutenden Werth haben. Aus dem Umstande, dafs man durch den unendlich fortgesetzten Procefs die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten unendlich klein machen kann, folgt, dafs die Gleichung $n$ten Grades lauter reelle Wurzeln hat. Denn nach jeder Transformation bleiben die Coëfficienten reell, und wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen verschwinden, werden die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen in der Diagonale die verschiednen Werthe von $g$.

Aus den eben gemachten Bemerkungen folgt noch der Satz, dafs die Summe der Coëfficienten in der Diagonale gleich der Summe der Gröfsen $g$ und die Summe der Quadrate *aller* Coëfficienten gleich der Summe ihrer Quadrate sein mufs, wenn man für die Coëfficienten in der Diagonale immer die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen nimmt. Denn die beiden Summen behalten nach jeder Transformation denselben Werth wie in den ursprünglichen Gleichungen VIII. und müssen ihn daher noch in dem Grenzfalle behalten, in welchem die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale verschwinden und die in der Diagonale befindlichen den Gröfsen $g$ gleich werden.

In den Gleichungen VIII. ist unter allen Coëfficienten aufserhalb der Diagonale der gröfste in der 5ten und 6ten Gleichung, dessen Logarithmus $= 0{,}8789822$. Dieser wurde bei der Rechnung zuerst zu Null gemacht, und so wurde auch bei allen folgenden Substitutionen im Allgemeinen die Regel befolgt, jedesmal den gröfsten von den aufserhalb der Diagonale vorhandnen Coëfficienten gleich Null zu machen. Im Ganzen wurden nach und nach zehn Paare von Unbekannten durch neue ersetzt. Da die Ausführung einer Substitution sehr schnell gemacht ist, und jede derselben für die Auffindung aller Systeme der Werthe der Unbekannten, welche die sieben Auflösungen ergeben, zugleich Gewinn bringt, so schien es am vortheilhaftesten, dieser für alle sieben Auflösungen gleichzeitig vorbereitenden Rechnung die angegebne Ausdehnung zu geben, obgleich man schon früher zur Anwendung einer Näherungsmethode hätte schreiten können. Wenn die jedesmalige erste Unbekannte mit (0), die zweite mit (I) u. s. f. bezeichnet wird, so sind die verschiednen Paare, die nach und nach durch neue ersetzt wurden, und die zu der Substitution dienenden Winkel $\alpha$ folgende:

XIII.
$$\begin{cases}
(\text{IV}) \text{ und } (\text{V}) \ldots\ldots \alpha = +26^\circ\,52'\,38'',12, \\
(\text{I}) - (\text{II}) \ldots\ldots - - +41\;40\;\;5{,}92, \\
(0) - (\text{I}) \ldots\ldots - - +17\;\;9\;20{,}35, \\
(\text{II}) - (\text{III}) \ldots\ldots - - +36\;22\;14{,}58, \\
(\text{IV}) - (\text{VI}) \ldots\ldots - - -11\;54\;41{,}37, \\
(0) - (\text{III}) \ldots\ldots - - +\;1\;31\;11{,}46, \\
(\text{I}) - (\text{II}) \ldots\ldots - - +\;2\;\;7\;52{,}40, \\
(\text{V}) - (\text{VI}) \ldots\ldots - - -\;0\;57\;36{,}18, \\
(0) - (\text{II}) \ldots\ldots - - -\;0\;59\;46{,}42, \\
(\text{I}) - (\text{III}) \ldots\ldots - - +\;1\;38\;\;7{,}62.
\end{cases}$$

Man sieht, dafs nur die Unbekaunten (0), (I), (II), (III) und wiederum die Unbekannten (IV), (V), (VI) mit einander verbunden worden sind, und so hat sich bei diesen Transformationen die Gruppirung der *sieben* Planeten in *vier* und *drei* von selber dargeboten, ohne dafs hiebei von der Strenge etwas geopfert werden durfte.

Die unten folgende Tabelle giebt die *zehn* Systeme, in welches das gegebne nach und nach transformirt worden ist, wobei ich in jedem System den Coëfficient, welcher in dem folgenden Systeme beseitigt ist, durch Sternchen bezeichnet habe.

## Schemata der Gleichungen (VIII.) und der zehn transformirten Systeme.

(Es ist aufser den Gröfsen der Diagonale abwechselnd blofs die obere oder die untere Hälfte jedes Schemas angesetzt, das letzte jedoch vollständig ausgefüllt worden. Nur in der Diagonale stehn Numeri, vor welchen die Gröfsen $g$ weggelassen worden, sonst überall die Logarithmen, bei welchen durchweg $-10$ zu ergänzen ist. Wenn die Logarithmen zu negativen Numeris gehören, ist es durch n angezeigt.)

| | 0. | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Gegebenes System. | | | | |
| | −5.5098820 | 9.8655252 | 9.1586592 | 7.8700057 | 7.2604292 | 5.8766796 | 4.2156819 | 0 |
| | | −11.8116540 | 10.6955298 | 9.0999439 | 8.3565631 | 6.9646084 | 5.3191061 | 1 |
| 0 | −5.5098820 | | −12.9706870 | 9.7528822 | 8.7832803 | 7.3811819 | 5.7325546 | 2 |
| 1 | 9.8655252 | −11.8116540 | | −17.5962070 | 8.8878063 | 7.4576700 | 5.7989267 | 3 |
| 2 | 9.1586592 | ***10.6955298** | −12.9706870 | | −7.4890410 | ***10.8789822** | 9.0223508 | 4 |
| 3 | 7.8700057 | 9.0999439 | 9.7528872 | −17.5962070 | | −18.5854100 | 9.6439380 | 5 |
| 4 | 7.2197860 | 8.3157530 | 8 7422682 | 8.8462593 | −3.6533425 | | −2.3259350 | 6 |
| 5 | 6.8787034n | 7.9755587n | 8.4031471n | 8.5099694n | * | −22.4211085 | | |
| 6 | 4.2156819 | 5.3191061 | 5.7325546 | 5.7989267 | 9.4669363 | 9.5382132 | −2.3259350 | |
| | | | | Erstes transformirtes System. | | | | |
| | | | | Zweites transformirtes System. | | | | |
| | −5.5098820 | ***9.8088089** | 9.5799453n | 7.8700057 | 7.2197860 | 6.8787034n | 4.2156819 | 0 |
| | | −7.3968844 | * | 9.6724433 | 8.7175126 | 8.3780737n | 5.7117103 | 1 |
| 0 | −5.3111122 | | −17.3854565 | 9.5304363 | 8.4395088 | 8.1009230n | 5.4231118 | 2 |
| 1 | * | −7.5956542 | | −17.5962070 | 8.8462593 | 8.5099694n | 5.7989267 | 3 |
| 2 | 9.5601792n | 9.0497211 | −17.3854565 | | −3.6533425 | * | 9.4669363 | 4 |
| 3 | 9.1638436 | 9.6505590 | ***9.5304363** | −17.5962070 | | −22.4211085 | 9.5382132 | 5 |
| 4 | 8.2298539 | 8.6934635 | 8.4395088 | 8.8462593 | −3.6533425 | | −2.3259350 | 6 |
| 5 | 7.8902619n | 8.3540409n | 8.1009230n | 8.5099694n | * | −22.4211085 | | |
| 6 | 5.2242105 | 5.6876443 | 5.4231118 | 5.7989267 | 9.4669363 | 9.5382132 | −2.3259350 | |
| | | | | Drittes transformirtes System. | | | | |
| | | | | Viertes transformirtes System. | | | | |
| | −5.3111122 | * | 9.3138512n | 9 5222066 | 8.2298539 | 7.8902619n | 5.2242105 | 0 |
| | | −7.5956542 | 9.5508572 | 9.4678118 | 8.6934635 | 8.3540409n | 5.6876443 | 1 |
| 0 | −5.3111122 | | −17.1356554 | * | 8.8046407 | 8.4675546n | 5.7683052 | 2 |
| 1 | * | −7.5956542 | | −17.8460080 | 8.6042303 | 8.2688686n | 5.5436860 | 3 |
| 2 | 9.3138512n | 9.5508572 | −17.1356554 | | −3.6533425 | * | ***9.4669363** | 4 |
| 3 | ***9.5222066** | 9.4678118 | * | −17.8460080 | | −22.4211085 | 9.5382132 | 5 |
| 4 | 8.2203099 | 8.6839195 | 8.7951029 | 8.5946971 | −3.7151584 | | −2.3259350 | 6 |
| 5 | 7.8902619n | 8.3540409n | 8.4675546n | 8 2688686n | 8.8529238n | −22.4211085 | | |
| 6 | 7.4465920 | 8.0102012 | 8.1212408 | 7.9207282 | * | 9.5287595 | −2.2641190 | |
| | | | | Fünftes transformirtes System. | | | | |
| | 0. | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | |

| | 0. | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Sechstes transformirtes System. | | | | | |
| | −5.3022811 | 7.8914390 | *9.3136984n | * | 8.2466210 | 7.9168235n | 7.5728881 | 0 |
| | | −7.5956542 | 9.5508572 | 9.4676590 | 4.6839195 | 8.3540409n | 8.0102012 | 1 |
| 0 | −5.3022811 | | −17.1356554 | 7.7374784 | 8.7951029 | 8.4675546n | 8.1212408 | 2 |
| 1 | 6.0970453 | −7.5824233 | | −17.8548391 | 8.5896508 | 8.2638698 | 7.9156789 | 3 |
| 2 | 9.3140047n | * | −17.1488863 | | −3.7151584 | 8.8529238n | * | 4 |
| 3 | * | 9.4676593 | 7.7368910n | −17.8548391 | | −22.4211085 | 9.5287595 | 5 |
| 4 | 8.2466210 | 8.7040099 | 8.7821072 | 8.5896508 | −3.7151584 | | −2.2641190 | 6 |
| 5 | 7.9168235n | 8.3742385n | 8.4546278n | 8.2638698n | 8.8529238 | −22.4211085 | | |
| 6 | 7.5728881 | 8.0302850 | 8.1082409 | 7.9156789 | * | *9.5287595 | −2.2641190 | |
| | | | Siebentes transformirtes System. | | | | | |
| | | | Achtes transformirtes System. | | | | | |
| | −5.3022811 | 6.0970453 | *9.3140047n | * | 8.2466210 | 7.9200467n | 7.5564556 | 0 |
| | | −7.5824233 | * | 9.4676593 | 8.7040099 | 8.3774615n | 8.0138517 | 1 |
| 0 | −5 2986987 | | −17.1488863 | 7.7368910n | 8.7821072 | 8.4578325n | 8.0917138 | 2 |
| 1 | 6.0969796 | −7.5824233 | | −17.8548391 | 8.5896508 | 8.2670610n | 7.8990825 | 3 |
| 2 | * | 4.3372594 | −17.1524687 | | −3.7151584 | 8.8528628n | 7.0770747n | 4 |
| 3 | 5.9771051 | *9.4676593 | 7.7368253n | −17.8548391 | | −22.4267712 | * | 5 |
| 4 | 8.2198352 | 8.7040099 | 8.7842368 | 8.5896508 | −3.7151584 | | −2.2584562 | 6 |
| 5 | 7.8931143n | 8.3774615n | 8.4599504n | 8.2670610n | 8.8528628n | −22.4267712 | | |
| 6 | 7.5296841 | 8.0138517 | 8.0938446 | 7.8990825 | 7.0770747n | * | −2.2584562 | |
| | | | Neuntes transformirtes System. | | | | | |
| | | | Zehntes transformirtes System. | | | | | |
| XIV. | −5.2986987 | 6.1061176 | * | 5.9602777 | 8.2198352 | 7.8931143n | 7.5296841 | |
| | 6.1061176 | −7.5740431 | 6.1861782n | * | 8.7132591 | 8.3867961n | 8.0230921 | |
| | * | 6.1861782n | −17.1524687 | 7.7366533n | 8.7842368 | 8.4599504n | 8.0938446 | |
| | 5.9602777 | * | 7.7366533n | −17.8632192 | 8.5730312 | 8.2505934n | 7.8824471 | |
| | 8.2198352 | 8.7132591 | 8.7842368 | 8.5730312 | −3.7151584 | 8.8528628n | 7.0770747n | |
| | 7.8931143n | 8.3867961n | 8.4599504n | 8.2505934n | 8.8528628n | −22.4267712 | * | |
| | 7.5296841 | 8.0230921 | 8.0938446 | 7.8824471 | 7.0770747n | * | −2.2584562 | |

In dem System VIII. geben die in der Diagonale befindlichen Zahlen noch keine Vorstellung von der Gröfse und der Aufeinanderfolge der sieben Wurzeln $g$; aber schon sogleich nach der zweiten Transformation erhält man durch diese Zahlen eine starke Annäherung an alle *sieben* Wurzeln auf einmal, welche bald so grofs wird, dafs sie nur noch kleiner Correctionen bedarf.

Wenn man alle in (XIII.) angegebenen Substitutionen von der Form (X.) zusammenfafst, so dafs die Unbekannten $M$ des Systems (VIII.) unmittelbar durch die Unbekannten des letzten transformirten Systems, welche ich mit

$$R_0,\ R_1,\ \ldots .\ R_6$$

bezeichnen will, ausgedrückt werden, so findet man, wenn man statt der Zahlen die Logarithmen, aber mit den Vorzeichen der Zahlen, setzt:

$$
\text{XV.}\quad\begin{cases}
M_0 = 9{,}9799291\,R_0 - 9{,}4703632\,R_1 + 8{,}4405137\,R_2 - 8{,}2284096\,R_3,\\
M_1 = 9{,}3810153\,R_0 + 9{,}8476757\,R_1 - 9{,}7461559\,R_2 + 9{,}5662156\,R_3,\\
M_2 = 9{,}2410836\,R_0 + 9{,}8089612\,R_1 + 9{,}7638502\,R_2 - 9{,}6689433\,R_3,\\
M_3 = 8{,}0433639\,R_0 + 8{,}6533681\,R_1 + 9{,}7729660\,R_2 + 9{,}9052324\,R_3,\\
M_4 = \quad 9{,}9409002\,R_4 - 9{,}6581085\,R_5 + 9{,}2467542\,R_6,\\
M_5 = \quad 9{,}6457624\,R_4 + 9{,}9495307\,R_5 + 9{,}0343951\,R_6,\\
M_6 = -9{,}3147106\,R_4 - 8{,}2146974\,R_5 + 9{,}9904855\,R_6.
\end{cases}
$$

So oft vermittelst der Gleichungen X. zwei Unbekannte durch zwei neue ersetzt werden, bleibt die Summe ihrer Quadrate unverändert. Da niemals eine der vier ersten Unbekannten mit einer der drei letzten verbunden worden ist, sondern beide Gruppen nur unter sich, so mufs man folgende zwei Gleichungen besonders haben:

$$
\begin{aligned}
M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 &= R_0^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2,\\
M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 &= R_4^2 + R_5^2 + R_6^2.
\end{aligned}
$$

Setzt man links statt der Gröfsen $M$ ihre Ausdrücke XV., so erhält man für die Coëfficienten der vier ersten Gleichungen XV. zehn und für die der drei letzten sechs Bedingungen, die zur Prüfung der Zahlen in (XV.) benutzt worden sind. Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt auch noch, dafs, um umgekehrt die Gröfsen $R$ durch die Gröfsen $M$ auszudrücken, man in jeder der beiden Gruppen in XV. nur die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander zu vertauschen braucht.

### Näherungsmethode zur numerischen Auflösung des Systems der Gleichungen (1.), wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten als kleine Gröfsen erster Ordnung betrachtet werden können.

### 7.

Wenn in dem System der $n$ Gleichungen (1.)

$$
\begin{aligned}
\{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma \;\ldots + (a,p)\varpi &= 0,\\
(b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma \;\ldots + (b,p)\varpi &= 0,\\
(c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma \;\ldots + (c,p)\varpi &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(p,a)\alpha + (p,b)\beta + (p,c)\gamma \;\ldots + \{(p,p)-x\}\varpi &= 0,
\end{aligned}
$$

die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten $(a,b)$, $(a,c)$ etc. als kleine Gröfsen *erster* Ordnung betrachtet werden können, so lassen sich die Werthe der Unbekannten durch eine successive Annäherung finden, welche sehr rasch zum Ziele führt und jede Strenge verstattet.

Bezeichnet man nämlich im Allgemeinen den Werth einer Gröfse $u$ durch

$$u = \Delta^0 u + \Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u \text{ etc.},$$

wo $\Delta^0 u$ den Näherungswerth, $\Delta' u$, $\Delta'' u$ etc. seine successiven Correctionen von den verschiednen Ordnungen bedeuten, so dafs $\Delta^i u$ eine kleine Gröfse der $i$ten Ordnung ist, so findet man in unserm Falle diese immer kleiner werdenden Gröfsen auf folgende Weise. Zuerst bemerke ich, dafs man als Näherungswerth von $x$ jede der $n$ Gröfscn

$$(a, a), \quad (b, b), \quad (c, c), \quad \ldots . \quad (p, p)$$

annehmen kann. Für jede dieser Annahmen erhält man ein System von Werthen der Unbekannten. Es reicht hin, das Verfahren für eine dieser Annahmen $\Delta^0 x = (a, a)$ auseinander zu setzen. Man erhält für diese Annahme zunächst

$$\Delta^0 x + \Delta' x = (a, a), \quad \Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0, \quad \Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$\Delta' \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(b, a)}{(a, a) - (b, b)}, \quad \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{(c, a)}{(a, a) - (c, c)}, \quad \text{etc.}$$

Der Werth von $x$ weicht nämlich von $(a, a)$ nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung ab, weshalb die in (XIV.) in der Diagonale befindlichen Coëfficienten die Werthe der Wurzeln $x$ sogleich mit so grofser Annäherung geben, dafs es nur einer leichten Verbesserung bedarf, um die wahren Werthe zu erhalten. Die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. sind Gröfsen der *ersten* Ordnung; der Werth von $\alpha$ selber, welcher $= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \text{etc.}\right)}}$, weicht daher von der *Einheit* ebenfalls nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung ab. Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$ etc. von der *zweiten* Ordnung erhält man aus den Gleichungen:

$$\{(a, a) - (b, b)\} \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = (b, c) \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + (b, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots,$$

$$\{(a, a) - (c, c)\} \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = (c, b) \Delta' \frac{\beta}{\alpha} + (c, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots,$$

etc. etc.

Die Correctionen von $x$ von der zweiten und dritten Ordnung erhält man hierauf durch die Gleichung

$$\Delta^2 x + \Delta^3 x = (a, b) \left\{\Delta' \frac{\beta}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha}\right\} + (a, c) \left\{\Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha}\right\} + \text{etc.}$$

Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. von der *dritten* und *vierten* Ordnung ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-\{\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-(\Delta^2 x+\Delta^3 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

etc. etc.

Man erhält dann $\Delta^4 x+\Delta^5 x$ und $\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$, etc., $\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}$, etc. durch die Gleichungen

$$\Delta^4 x+\Delta^5 x=(a,b)\left\{\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\ldots.,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.,$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.,$$

etc. etc.

Endlich erhält man

$$\Delta^6 x+\Delta^7 x=(a,b)\left\{\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\ldots.,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2x+\Delta^3x+\Delta^4x+\Delta^5x\}\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^6x+\Delta^7x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\ldots.+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right),$$
$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2x+\Delta^3x+\Delta^4x+\Delta^5x\}\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^6x+\Delta^7x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\ldots.+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$
. . . . . .*).

---

*) Wenn in den vorgelegten Gleichungen (1.) die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale nur in *einer* Horizontal- und Verticalreihe klein sind, in den übrigen aber von beliebiger Gröfse, so kann man durch ein ähnliches Näherungsverfahren immer *eine* Wurzel der Gleichung $n$ten Grades und die ihr entsprechenden Werthe der Unbekannten finden. Sind z. B. die Gröfsen $(ab)$, $(ac)$, .... $(ap)$ klein, so erhält man wieder aus der ersten Gleichung den Näherungswerth $x=(aa)$ bis auf Gröfsen 2ter Ordnung exclusive genau. Wenn man diesen Werth in die $n-1$ folgenden Gleichungen substituirt, so erhält man durch strenge Auflösung eines Systems von $n-1$ lineären Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \ldots. \frac{\varpi}{\alpha}$ bis auf Gröfsen 3ter Ordnung excl. genau. Substituirt man diese Werthe wieder in die erste Gleichung, so erhält man den Werth von $x$ bis auf Gröfsen 4ter Ordnung excl. genau, und mit diesem Werthe von $x$ erhält man dann wieder durch Auflösung von $n-1$ lineären Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ etc. bis zu der 5ten Ordnung excl. genau, u. s. f. Es wird hiebei von Vortheil sein, in den jedesmal aufzulösenden $n-1$ lineären Gleichungen den ersten Näherungswerth von $x$ in den Coëfficienten beizubehalten und die von den Correctionen von $x$ herrührenden Gröfsen mit den ganz constanten Gliedern zu vereinigen, wodurch die Coëfficienten der lineären Gleichungen immer dieselben bleiben und sich nur ihre ganz constanten Glieder ändern, so dafs der gröfste Theil der numerischen Rechnung, welche zur Auflösung der lineären Gleichungen gemacht werden mufs, für die Correctionen aller Ordnungen unverändert beibehalten werden kann. Setzt man

$$x=(aa)+\delta'x+\delta''x+\delta'''x \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}x$ von der $(2i)$ten Ordnung ist, ferner

$$\frac{\beta}{\alpha}=\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\delta'''\frac{\beta}{\alpha} \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}$ von der $(2i-1)$ten Ordnung ist; setzt man endlich

$$\delta'x+\delta''x+\ldots.+\delta^{(i)}x=(x)_i,$$
$$\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\ldots.+\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_i,$$

und gebraucht dieselben Bezeichnungen in Bezug auf $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}$, etc., so werden die Correctionen der Gröfse $x$ von der $(2i)$ten und der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$. etc. von der $(2i+1)$ten Ordnung aus den bereits gefundenen Correctionen niedriger Ordnung durch die folgen-

Nimmt man z. B. für das System der $n$ Gleichungen (1.) die 7 Gleichungen XIV., nachdem man darin alle Zeichen umgekehrt hat, und nimmt als Näherungswerth von $x$ oder $g$ denjenigen, welchen die erste Gleichung giebt, so findet man nach und nach:

$$\begin{aligned} \Delta^0 x + \Delta^1 x &= 5'',2986987 \\ \Delta^2 x + \Delta^3 x &= +\quad 1747\cdot 6 \\ \Delta^4 x + \Delta^5 x &= -\quad 2\cdot 3 \\ \Delta^6 x + \Delta^7 x &= \quad 0\cdot 0 \\ \hline x = g &= 5'',2988732 \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0$ | $\Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ | $\Delta^0 \frac{\delta}{\alpha} = 0$ |
| $\Delta^1 \frac{\beta}{\alpha} = +0{,}00005611390$ | $\Delta^1 \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ | $\Delta^1 \frac{\delta}{\alpha} = +0{,}000007263263$ |
| $\Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00023818658\cdot 9$ | $\Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005383551\cdot 3$ | $\Delta^2 \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000031224732\cdot 1$ |
| $\Delta^3 \frac{\beta}{\alpha} = -\quad 102738\cdot 2$ | $\Delta^3 \frac{\gamma}{\alpha} = -\quad 21373\cdot 6$ | $\Delta^3 \frac{\delta}{\alpha} = -\quad 110879\cdot 5$ |
| $\Delta^4 \frac{\beta}{\alpha} = -\quad 31046\cdot 2$ | $\Delta^4 \frac{\gamma}{\alpha} = +\quad 7022\cdot 3$ | $\Delta^4 \frac{\delta}{\alpha} = +\quad 40788\cdot 6$ |
| $\Delta^5 \frac{\beta}{\alpha} = +\quad 220\cdot 7$ | $\Delta^5 \frac{\gamma}{\alpha} = +\quad 48\cdot 1$ | $\Delta^5 \frac{\delta}{\alpha} = +\quad 262\cdot 2$ |
| $\Delta^6 \frac{\beta}{\alpha} = -\quad 33\cdot 2$ | $\Delta^6 \frac{\gamma}{\alpha} = -\quad 7\cdot 5$ | $\Delta^6 \frac{\delta}{\alpha} = -\quad 43\cdot 8$ |
| $\Delta^7 \frac{\beta}{\alpha} = -\quad 0\cdot 3$ | $\Delta^7 \frac{\gamma}{\alpha} = \quad 0\cdot 0$ | $\Delta^7 \frac{\delta}{\alpha} = -\quad 0\cdot 3$ |
| $\frac{R_1}{R_0} = \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00018278774$ | $\frac{R_2}{R_0} = \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005397862$ | $\frac{R_3}{R_0} = \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000024031342$ |

den Gleichungen erhalten:

$$\delta^{(i)} x = (ab)\,\delta^{(i)} \frac{\beta}{\alpha} + (ac)\,\delta^{(i)} \frac{\gamma}{\alpha} \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{i-1} \delta^{(i)} x + (x)_i \delta^{(i)} \frac{\beta}{\alpha} = \{(bb) - (aa)\}.\delta^{(i+1)} \frac{\beta}{\alpha} + (bc).\delta^{(i+1)} \frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_{i-1} \delta^{(i)} x + (x)_i \delta^{(i)} \frac{\gamma}{\alpha} = (cb).\delta^{(i+1)} \frac{\beta}{\alpha} + \{(cc) - (aa)\}.\delta^{(i+1)} \frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Die Näherungsmethode wird hier beschwerlicher, weil man die $n-1$ lineären Gleichungen streng aufzulösen hat, welche im obigen Falle ebenfalls durch Näherung leicht aufgelöst werden konnten, so dafs der Vortheil der Methode sich in diesem Falle grofsentheils darauf beschränkt, dafs man, um den Werth von $x$ zu finden, nicht die Gleichung $n$ten Grades zu bilden und aufzulösen braucht.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta^0 \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$ | $\Delta^0 \frac{\zeta}{\alpha} = 0$ | $\Delta^0 \frac{\eta}{\alpha} = 0$ |
| $\Delta^1 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010476254$ | $\Delta^1 \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00045646310$ | $\Delta^1 \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011137195$ |
| $\Delta^2 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\ 23384{\cdot}3$ | $\Delta^2 \frac{\zeta}{\alpha} = +\ 4349994$ | $\Delta^2 \frac{\eta}{\alpha} = -\ 43279{\cdot}0$ |
| $\Delta^3 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\ 13690{\cdot}2$ | $\Delta^3 \frac{\zeta}{\alpha} = +\ 55503{\cdot}2$ | $\Delta^3 \frac{\eta}{\alpha} = +\ 11793{\cdot}7$ |
| $\Delta^4 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\ 70{\cdot}2$ | $\Delta^4 \frac{\zeta}{\alpha} = -\ 5502{\cdot}3$ | $\Delta^4 \frac{\eta}{\alpha} = +\ 100{\cdot}9$ |
| $\Delta^5 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\ 14{\cdot}8$ | $\Delta^5 \frac{\zeta}{\alpha} = -\ 89{\cdot}9$ | $\Delta^5 \frac{\eta}{\alpha} = -\ 13{\cdot}6$ |
| $\Delta^6 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\ 0{\cdot}1$ | $\Delta^6 \frac{\zeta}{\alpha} = +\ 5{\cdot}8$ | $\Delta^6 \frac{\eta}{\alpha} = -\ 0{\cdot}2$ |
| $\Delta^7 \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0{\cdot}0$ | $\Delta^7 \frac{\zeta}{\alpha} = 0{\cdot}0$ | $\Delta^7 \frac{\eta}{\alpha} = 0{\cdot}0$ |
| $\frac{R_4}{R_0} = \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010485893$ | $\frac{R_5}{R_0} = \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00041246399$ | $\frac{R_6}{R_0} = \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011168593$ |

Aus $\alpha^2\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\ldots.\right\}=1$ folgt noch

$$\log\alpha = \log R_0 = 9{,}9999758,$$

woraus ferner

$$\log\beta = \log R_1 = 6{,}2619229\,\text{n}, \qquad \log\varepsilon = \log R_4 = 8{,}0205812.5\,\text{n},$$
$$\log\gamma = \log R_2 = 5{,}7321976\,\text{n}, \qquad \log\zeta = \log R_5 = 6{,}6153618\,\text{n},$$
$$\log\delta = \log R_3 = 5{,}3807537\,\text{n}, \qquad \log\eta = \log R_6 = 7{,}0479743\,\text{n}$$

gefunden wird. Die Genauigkeit ist hier viel weiter getrieben als der nachherige Gebrauch verlangt. Wenn man in der That die gefundnen Werthe der Unbekannten in die Gleichungen XIV. substituirt, so findet man eine vollendete Übereinstimmung, indem der Werth des Aggregats, welches verschwinden soll, in keiner Gleichung den zehnmillionensten Theil seines gröfsten Terms erreicht.

Durch die hier auseinandergesetzte Methode sind die folgenden Resultate für die sieben Systeme der Unbekannten gefunden worden.

## Tabelle der sieben Systeme der Werthe der Unbekannten des transformirten Systems XIV.

(Nur bei $g$ sind die Zahlen angesetzt, sonst die Logarithmen, bei denen überall $-10$ in der Characteristik zu ergänzen ist.)

| | System I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 5.2988733 | 7.5747191 | 17.1525573 | 17.8632966 | 3.7136434 | 22.4273091 | 2.2584168 |
| $R_0$ | 9.9999758 | 5.59372 | 4.49078 | 4.77888n | 8.020611 | 6.6558531 | 7.0453348 |
| $R_1$ | 6.26186n | 9.9999595 | 5.44276 | 4.69090 | 8.127403 | 7.2114826 | 7.296067 |
| $R_2$ | 5.73272n | 5.99605n | 9.9999760 | 7.88943 | 7.656551 | 7.7345775 | 6.919256 |
| $R_3$ | 5.38164n | 5.67660n | 7.8913067n | 9.9999850 | 7.422751 | 7.5884936 | 6.687464 |
| $R_4$ | 8.0205807n | 8.1275834n | 7.6565719n | 7.4309490n | 9.9999278 | 7.5772574 | 6.83876n |
| $R_5$ | 6.6153199n | 7.1975215n | 7.7307677n | 7.5920478n | 7.58422n | 9.9999867 | 4.25271 |
| $R_6$ | 7.0479752n | 7.2980444n | 6.9189241n | 6.6948000n | 6.80754 | 4.73984n | 9.9999986 |

Wenn man die vorstehenden 7 Systeme der Werthe der Gröfsen $R$ in die Gleichungen XV. substituirt, so findet man die 7 Systeme der Werthe der Gröfsen $M$. Es ist, um diese Gröfsen mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten, überflüssig, die Logarithmen aller Gröfsen $R$ auf dieselbe Zahl Stellen zu berechnen. Denn wenn man die Werthe der Gröfsen $R$ substituirt, wird in vielen zur Bestimmung der Gröfsen $M$ zu bildenden Aggregaten der Werth *eines* Terms die andern beträchtlich übertreffen, so dafs man nur von den *Zahlen* die erforderliche Anzahl Stellen zu kennen braucht. Es sind deshalb in der obigen Tabelle einige Logarithmen mit 7, andere aber nur mit 5 Stellen angesetzt worden.

Die Werthe der 7 Systeme der Gröfsen $M$, wie sie aus den Gröfsen $R$ durch die Formeln XV. abgeleitet worden sind, giebt die folgende Tabelle. Sie sind mit aller Genauigkeit berechnet, welche die Anwendung siebenstelliger Tafeln verstattet.

| System I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,2988733 | 7,5747191 | 17,1525573 | 17,8632966 | 3,7136434 | 22,4273091 | 2,2584168 |
| +0,9548364.7 | −0,2953047.4 | +0,0276998.70 | −0,0167131.95 | +0,0061320.4 | +0,0000356.840 | +0,0004905.317 |
| +0,2403236.7 | +0,7041486.2 | −0,5602023.6 | +0,3639800.2 | +0,0104109.52 | −0,0003423.278 | +0,0013757.54 |
| +0,1740664.5 | +0,6440231.1 | +0,5841832.64 | −0,4620795.6 | +0,0118614.62 | +0,0024689.22 | +0,0017218.36 |
| +0,0109897.86 | +0,0449154.3 | +0,5865879.5 | +0,8085248.5 | +0,0055361.02 | +0,0064128.63 | +0,0009850.343 |
| −0,0091606.953 | −0,0113414.30 | −0,0016560.475 | −0,0006617.204 | +0,8744861.9 | −0,4517914.9 | +0,1759003.9 |
| −0,0051261.723 | −0,0075519.595 | −0,0068854.157 | −0,0047267.932 | +0,4389244.0 | +0,8919316.0 | +0,1079379.0 |
| +0,0010783.321 | +0,0008513.954 | +0,0002124.55 | +0,0001363.418 | −0,2056750.7 | −0,0171791.24 | +0,9784694.7 |

Zur Probe über die richtige Bestimmung der sieben Wurzeln $g$ hat man die beiden Bedingungen, dafs ihre Summe = der Summe der Zahlencoëfficienten der Diagonale in den Gleichungen VIII. oder XIV., und dafs die Summe ihrer Quadrate

= der Summe der Quadrate aller Coëfficienten dieser Gleichungen sein mufs. Die letztere Summe ist im Laufe der Rechnung schon einmal, nämlich zur Prüfung des transformirten Systems XIV. gebraucht worden. Die richtige Herleitung der Gröfsen $M$ aus den für die Gröfsen $R$ gefundnen Werthen kann ebenfalls auf eine doppelte Art für alle gleichzeitig geprüft werden. Wenn man nemlich in dem Schema der Werthe der Gröfsen $M$ einmal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Verticalreihen oder das andere Mal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Horizontalreihen addirt, so mufs in beiden Fällen die Zahl 7 als Summe gefunden werden. Denn aus dem auf eine dieser Arten gebildeten Ausdruck verschwinden die Producte je zweier verschiedner $M$ nach den Gleichungen (4.) und (9.) in §. 2.; die Summe der quadratischen Glieder $M_0^2+M_1^2+....+M_6^2$ mufs aber für jedes der 7 Systeme besonders $=1$ sein, weil $R_0^2+R_1^2+....+R_6^2=1$ gemacht worden ist. Diese Prüfungen, welche besonders für die Zeichen der Gröfsen $M$ eine leichte und entscheidende Controlle geben, sind an den Zahlen der obigen Tafel vorgenommen worden, und mit der erwarteten Strenge eingetroffen.

Nachdem die Gröfsen $M$ bestimmt sind, erhält man die Verhältnisse der Unbekannten $N$ des Systems V. mittelst der Gleichungen VI., deren Constanten in VII. angegeben sind. Die hieraus sich ergebenden numerischen Werthe der Verhältnisse der Gröfsen $N$ respective zu $N_3$ und zu $N_6$ in den vier ersten und in den drei letzten Systemen sind zugleich mit ihren von den Änderungen der Massen abhängigen Variationen am Schlusse dieses Aufsatzes zusammengestellt worden, um unmittelbar mit den Resultaten verglichen werden zu können, welche Herr *Leverrier* in der „Connaiss. des temps" für 1843 Seite 31 ff. gefunden hat. Ich wende mich jetzt zu der Berechnung dieser Variationen oder der für eine Änderung der angewandten Werthe der Planetenmassen anzubringenden Correctionen.

### Berechnung der Variationen, welche die sieben Systeme der Werthe der Unbekannten durch die Änderung der zum Grunde gelegten Werthe der Planetenmassen erfahren.

## 8.

Die von einer Änderung der Planetenmassen herrührenden Variationen der Werthe der Unbekannten könnten aus den §. 4. gegebnen allgemeinen Formeln entnommen werden, wenn man darin die Variationen der Coëfficienten der gegebenen Gleichungen substituirt, welche man durch Änderung der Planetenmassen erhält. Es ist aber bequemer, die auf diese besondre Form der Variationen bezüglichen Formeln unmittelbar abzuleiten.

Ich will das System der Gleichungen VIII. folgendermaafsen bezeichnen:

$$\text{XVI.}\quad \begin{cases} 0 = \{g-[0,0]\}M_0+[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots.+[0,6]M_6, \\ 0 = [1,0]M_0+\{g-[1,1]\}M_1+[1,2]M_2+\ldots.+[1,6]M_6, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

wo

$$[i,k] = \sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}.$$

Werden die Massen dadurch corrigirt, dafs man $m(1+\mu)$ statt $m$, $m'(1+\mu')$ statt $m'$, etc. setzt, so erhält der Coëfficient $[i,k]$, wenn $i$ und $k$ verschieden sind, den Factor

$$1+\tfrac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)}),$$

wie oben §. 5. bemerkt wurde; die Coëfficienten in der Diagonale aber, für welche beide Indices gleich sind, erhalten die Correctionen

$$\text{XVII.}\quad \begin{cases} \Delta[0,0] = (0,1)\mu'+(0,2)\mu''+\ldots.+(0,6)\mu^{\nu_1}, \\ \Delta[1,1] = (1,0)\mu+(1,2)\mu''+\ldots.+(1,6)\mu^{\nu_1}, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

wo die Zahlenwerthe der Coëfficienten $(0,1)$, $(0,2)$, ....; $(1,0)$, $(1,2)$, .... aus der unmittelbar vor dem System V. aufgestellten Tabelle zu entnehmen sind.

Zwischen den Correctionen der Unbekannten, welche aus diesen Variationen der Coëfficienten hervorgehen, oder zwischen den Gröfsen $\Delta g$, $\Delta M_i$ erhält man aus der ersten Gleichung in XVI. die folgende:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \{\Delta g-\Delta[0,0]\}M_0+\tfrac{1}{2}\mu\{[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots.+[0,6]M_6\} \\ & +\tfrac{1}{2}\{(0,1)\mu' M_1+[0,2]\mu'' M_2+\ldots.+[0,6]\mu^{\nu_1}M_6\} \\ & +\{g-[0,0]\}\Delta M_0+[0,1]\Delta M_1+\ldots.+[0,6]\Delta_6, \end{aligned}$$

oder, weil $[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots.+[0,6]M_6 = -\{g-[0,0]M_0\}$ ist,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \{\Delta g-\Delta[0,0]\}M_0-(g-[0,0])\mu M_0 \\ & +(g-[0,0])\{\Delta M_6+\tfrac{1}{2}\mu M_0\}+[0,1]\{\Delta M_1+\tfrac{1}{2}\mu' M_1\}\ldots.+[0,6]\{\Delta M_6+\tfrac{1}{2}\mu^{\nu_1}M_6\}. \end{aligned}$$

Bildet man die ähnlichen Gleichungen und setzt:

$$\text{XVIII.}\quad M_i\{(g-[i,i])\mu^{(i)}+\Delta[i,i]\} = p_i, \quad \Delta M_i+\tfrac{1}{2}\mu^{(i)}M_i = \delta M_i,$$

so erhält man folgendes System Gleichungen:

$$\text{XIX.}\quad \begin{cases} p_0 = M_0\Delta g+(g-[0,0])\delta M_0+[0,1]\delta M_1+\ldots.+[0,6]\delta M_6, \\ p_1 = M_1\Delta g+[1,0]\delta M_0+(g-[1,1])\delta M_1+\ldots.+[1,6]\delta M_6, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen $\Delta g$ zu erhalten, multiplicire man dieselben respective mit $M_0$, $M_1$, etc., so verschwinden nach geschehner Addition die mit den verschiednen Factoren $\delta M_i$ multiplicirten Aggregate wegen der Gleichungen XVI.; der Coëfficient von $\Delta g$ wird $\Sigma M^2 = 1$, und daher

$$\text{XX.} \qquad \Delta g = M_0 p_0 + M_1 p_1 \ldots + M_6 p_6.$$

Um die Correctionen der Gröfsen $M$ zu erhalten, bringe man die Gleichungen XIX. in die Form:

$$p_0 = M_0 \Delta g + (g - g')\delta M_0 + (g' - [0,0])\delta M_0 + [0,1]\delta M_1 + \ldots + [0,6]\delta M_6,$$
$$p_1 = M_1 \Delta g + (g - g')\delta M_1 + [1,0]\delta M_0 + (g' - [1,1])\delta M_1 + \ldots + [1,6]\delta M_6.$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den zu $g'$ gehörigen Gröfsen des zweiten Systems, $M'_0$, $M'_1$, etc., so bleiben nach geschehner Addition rechts vom Gleichheitszeichen nur die zweiten Terme, indem vermöge der Gleichungen XVII. die übrigen mit den verschiednen Gröfsen $\delta M_i$ multiplicirten Aggregate verschwinden; ebenso verschwindet das mit $\Delta g$ multiplicirte Aggregat, weil es den Factor $M_0 M'_0 + M_1 M'_1 + \ldots = 0$ erhält, und man findet:

$$M'_0 \delta M_0 + M'_1 \delta M_1 + \ldots + M'_6 \delta M_6 = \frac{1}{g - g'} \{M'_0 p_0 + M'_1 p_1 + \ldots + M'_6 p_6\}.$$

Vertauscht man die Gröfsen $g'$, $M'_0$, $M'_1$ etc. des zweiten Systems mit den Gröfsen des 3ten, $g''$, $M''_0$, $M''_1$ etc., dann mit denen des 4ten u. s. f., so erhält man noch fünf ganz ähnliche Gleichungen. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}\{\mu M_0^2 + \mu' M_1^2 + \ldots + \mu^{\text{VI}} M_6^2\} = Q,$$

so erhält man endlich als siebente Gleichung

$$M_0 \delta M_0 + M_1 \delta M_1 + \ldots + M_6 \delta M_6 = Q,$$

wie aus der Gleichung $M_0 \Delta M_0 + M_1 \Delta M_1 + \ldots + M_6 \Delta M_6 = 0$ folgt. Multiplicirt man diese siebente Gleichung mit $M_0$, die sechs vorhergefundnen der Reihe nach mit den Factoren $M'_0$, $M''_0$ etc. und addirt alle nach geschehner Multiplication, so werden die Unbekannten $\Delta M_i$ bis auf $\Delta M_0$ sämmtlich eliminirt; ebenso bleibt nur $\Delta M_1$ übrig, wenn man die Factoren $M_1$, $M'_1$, $M''_1$ etc. wählt u. s. f. Wenn man die abkürzenden Bezeichnungen einführt:

$$\text{XXI.} \quad \begin{cases} (m_0, m_0) = \dfrac{M'_0 M'_0}{g - g'} + \dfrac{M''_0 M''_0}{g - g''} + \ldots + \dfrac{M^{\text{VI}}_0 M^{\text{VI}}_0}{g - g^{\text{VI}}}, \\ (m_0, m_1) = \dfrac{M'_0 M'_1}{g - g'} + \dfrac{M''_0 M''_1}{g - g''} + \ldots + \dfrac{M^{\text{VI}}_0 M^{\text{VI}}_1}{g - g^{\text{VI}}}, \\ (m_1, m_1) = \dfrac{M'_1 M'_1}{g - g'} + \dfrac{M''_1 M''_1}{g - g''_1} + \ldots + \dfrac{M^{\text{VI}}_1 M^{\text{VI}}_1}{g - g^{\text{VI}}}, \\ \qquad\qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

wo immer $(m_k, m_{k'}) = (m_{k'}, m_k)$, so findet man auf diese Weise für die Variationen der Unbekannten $M$ des ersten Systems,

$$\text{XXII.} \quad \begin{cases} \delta M_0 = (m_0, m_0)p_0 + (m_0, m_1)p_1 + \ldots + (m_0, m_6)p_6 + M_0 Q, \\ \delta M_1 = (m_1, m_0)p_0 + (m_1, m_1)p_1 + \ldots + (m_1, m_6)p_6 + M_1 Q, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Man hat jetzt nur noch in XX. und XXII. die Werthe

$$p_i = M_i\{(g - [i,i])\mu^{(i)} + \Delta[i,i]\}$$

zu substituiren und die ganz ähnlichen Ausdrücke zu bilden, welche sich für die übrigen Systeme ergeben.

Setzt man die Correctionen des $(h+1)$ten Systems,

$$\text{XXIII.} \quad \Delta g^{(h)} = B^{(h)}\mu + B_1^{(h)}\mu' + \ldots + B_6^{(h)}\mu^{\text{VI}}$$

und

$$\text{XXIV.} \quad \Delta M_k^{(h)} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}\mu^{(k)} = \delta M_k^{(h)} = C^{(h,k)}\mu + C_1^{(h,k)}\mu' + \ldots + C_6^{(h,k)}\mu^{\text{VI}},$$

so erhält man auf die im Vorigen angegebne Art die allgemeinen Ausdrücke

$$\text{XXV.} \quad B_i^{(h)} = M_0^{(h)2}(0,i) + M_1^{(h)2}(1,i) + \ldots + M_6^{(h)2}(6,i) + (g^{(h)} - [i,i])M_i^{(h)2}$$

und

$$\text{XXVI.} \quad C_i^{(h,k)} = (m_k, m_0)_h M_0^{(h)}(0,i) + (m_k, m_1)_h M_1^{(h)}(1,i) + \ldots$$
$$\ldots + (m_k, m_6)_h M_6^{(h)}(6,i) + (m_k, m_i)_h M_i^{(h)}\{g^{(h)} - [i,i]\} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}M_i^{(h)2}.$$

Hier ist, wenn man das Glied, das durch $g^{(h)} - g^{(h)}$ dividirt sein würde, fortläfst,

$$\text{XXVII.} \quad (m_k, m_{k'})_h = \frac{M_k M_{k'}}{g^{(h)} - g} + \frac{M_k' M_{k'}'}{g^{(h)} - g'} + \ldots + \frac{M_k^{\text{VI}} M_{k'}^{\text{VI}}}{g^{(h)} - g^{\text{VI}}}.$$

Es ist ferner

$$(i,i) = 0, \qquad [i,i] = (i,0) + (i,1) + \ldots + (i,6),$$

und die Gröfsen $(i,i')$ sind die oben vor dem System V. angegebnen Zahlen.

Man sieht aus dem Obigen, dafs die 392 Gröfsen $B_i^{(h)}$ und $C_i^{(h,k)}$, welche die Aufgabe zu berechnen fordert, jede durch Addition von respective 7 oder 8 Termen erhalten werden. Diese Terme selbst sind unmittelbar durch die bereits berechneten Werthe von $g^{(h)}$, $M_k^{(h)}$ und durch die 196 Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gegeben.

Ich lasse jetzt die Tabelle für die Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ und dann die Tabelle für die Werthe der Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ selber folgen.

## Tabelle für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(m_0, m_0)_0$ | $(m_0, m_1)_0$ | $(m_0, m_2)_0$ | . . . . |
| ——— | $(m_1, m_1)_0$ | $(m_1, m_2)_0$ | . . . . |
| $(m_0, m_0)_1$ | ——— | $(m_2, m_2)_0$ | . . . . |
| $(m_1, m_0)_1$ | $(m_1, m_1)_1$ | ——— | . . . . |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | |

(Die Tabelle ist nach dem obenstehenden Schema angeordnet; abwechselnd sind von jedem System aufser den Gröfsen der Diagonale selbst entweder nur die oberhalb und rechts oder die unterhalb und links von der Diagonale befindlichen Gröfsen angesetzt.)

| | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erstes System $h = 0$, $g = 5{,}29$.. | | | | | | | |
| | −0.038381 | +0.0932013 | +0.0816323 | +0.00555445 | +0.00194345 | +0.00074331 | −0.00052757 | 0 |
| | ——— | −0.254815 | −0.158150 | −0.0095599 | +0.00926369 | +0.00509745 | −0.00116569 | 1 |
| 0 | +0.400512 | ——— | −0 227941 | −0.0118426 | +0.00996476 | +0.00551945 | −0.00122876 | 2 |
| 1 | +0.103056 | −0.0202365 | ——— | −0.0819272 | +0.00362850 | +0.00202784 | −0.00043093 | 3 |
| 2 | +0.0706072 | +0.0689293 | −0.0430341 | ——— | +0.481014 | +0.271865 | −0.057300 | 4 |
| 3 | +0.00423656 | +0.0068831 | +0.0013901 | −0.0994045 | ——— | +0.078887 | −0.0213148 | 5 |
| 4 | −0.0243357 | +0.00135226 | +0.00218915 | +0.00159071 | +0.190176 | ——— | +0.341554 | 6 |
| 5 | −0.00143356 | +0.00045518 | +0.00105073 | +0.00103262 | +0.1301316 | −0.0014702 | ——— | |
| 6 | +0.00021570 | −0.00018029 | −0.00023643 | −0.00012470 | −0.0147348 | −0.0024856 | +0.191003 | |
| | Zweites System $h = 1$, $g = 7.57$.. | | | | | | | |
| | Drittes System $h = 2$, $g = 17.15$.. | | | | | | | |
| | +0.0856298 | +0.0062117 | −0.0166964 | +0 0185156 | +0.00000408 | −0.00009422 | +0.00000232 | 0 |
| | ——— | −0.129747 | +0.287524 | −0.410526 | −0.00001628 | +0.00216940 | −0.00005544 | 1 |
| 0 | +0.0821214 | ——— | −0.254544 | +0.528834 | −0.00032370 | −0.00367375 | +0.00010136 | 2 |
| 1 | −0.0237752 | +0.494346 | ——— | −0.919560 | +0.00161224 | +0.00444043 | −0.00014924 | 3 |
| 2 | +0.0175162 | −0.413029 | +0.522900 | ——— | +0.0203050 | +0.1062406 | −0.0033007 | 4 |
| 3 | +0.0224095 | −0.459062 | +0.484098 | +0.484324 | ——— | −0.135726 | +0.00327814 | 5 |
| 4 | −0.00004716 | +0.00097891 | −0.00120111 | −0.00043625 | +0.0113278 | ——— | +0.0673720 | 6 |
| 5 | −0.00025452 | +0.00521148 | −0.00630574 | −0.00679477 | +0.1166629 | −0.159867 | ——— | |
| 6 | +0.00000755 | −0.00015492 | +0.00018770 | +0.00018543 | −0.0033845 | +0.00374211 | +0.0642776 | |
| | Viertes System $h = 3$, $g = 17.86$.. | | | | | | | |
| | Fünftes System $h = 4$, $g = 3.71$.. | | | | | | | |
| | −0.597800 | −0.089314 | −0.057336 | −0 00333806 | +0.00471325 | +0.00255334 | −0.00025482 | 0 |
| | ——— | −0.197562 | −0.087600 | −0.0062022 | +0.00356312 | +0.00210732 | +0.00061137 | 1 |
| 0 | +0.0593079 | ——— | −0.167018 | −0.0077934 | +0.00321573 | +0.00197753 | +0.00089480 | 2 |
| 1 | −0.0048745 | +0.1252838 | ——— | −0 0724343 | +0.00057942 | +0.00046129 | +0.00063378 | 3 |
| 2 | +0.0016626 | −0.0659112 | +0.1411840 | ——— | +0.0102680 | +0.0345275 | +0.117865 | 4 |
| 3 | −0.00015888 | +0.0044668 | −0.0148301 | +0.208610 | ——— | −0 0345415 | +0.0733991 | 5 |
| 4 | −0.00000062 | −0 00004461 | −0.00013197 | −0.00007428 | +0.0424132 | ——— | +0.657883 | 6 |
| 5 | −0 00000801 | +0.00017589 | −0.00037614 | −0 00149407 | +0.0214632 | +0.0108917 | ——— | |
| 6 | +0.00000021 | −3.00000388 | +0.00001077 | +0 00003799 | −0.00107892 | +0.00041120 | +0.0497284 | |
| | Sechstes System $h = 5$, $g = 22{,}42$.. | | | | | | | |
| | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | |

Siebentes System $h = 6$, $g = 2{,}258..$

| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0.316359 | −0.0349717 | −0.0205206 | −0.00120471 | −0.00143487 | −0.00065308 | +0 00057511 | 0 |
| | −0.1418967 | −0.0663951 | −0.0036527 | −0.00408443 | −0.00186829 | +0.00127766 | 1 |
| | | −0.1246750 | −0.0051820 | −0.00512882 | −0.00234842 | −0.00005060 | 2 |
| | | | −0.0654369 | −0.00295476 | −0.00135496 | +0.00076140 | 3 |
| | | | | −0.535683 | −0.243815 | +0.123215 | 4 |
| | | | | | −0.171855 | +0.0627985 | 5 |
| | | | | | | −0.0290838 | 6 |

**Tabelle der Coëfficienten der verschiednen $\mu$ in den Ausdrücken von $\delta M_0^{(h)} = \Delta M_0^{(h)} + \frac{1}{2} M_0^{(h)} \mu$, $\delta M_1^{(h)} = \Delta M_1^{(h)} + \frac{1}{2} M_1^{(h)} \mu'$, etc.**

**Angewendete Controlle: Die Summe der in Einer Zeile stehenden Coëfficienten mufs = der Hälfte des entsprechenden $M$ sein.**

| | ☿ | ♀ | ♁ | ♂ | ♃ | ♄ | ♅ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Erstes System.** | | | |
| $\delta M_0$ | $+0{,}4545\,\mu$ | $-0{,}1514\,\mu'$ | $+0{,}0266\,\mu''$ | $+0{,}0048\,\mu'''$ | $+0{,}1366\,\mu^{IV}$ | $+0{,}0062\,\mu^{V}$ | $+0{,}0001\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1$ | +0,0605 | +0,5222 | −0,1262 | −0,0107 | −0,3108 | −0,0146 | −0,0004 |
| $\delta M_2$ | +0,0421 | +0,2740 | +0,1154 | −0,0119 | −0,3172 | −0,0148 | −0,0004 |
| $\delta M_3$ | +0,0027 | +0,0196 | +0,0033 | +0,0104 | −0,0290 | −0,0014 | +0,0000 |
| $\delta M_4$ | −0,0037 | −0,0004 | +0,0036 | +0,0004 | +0,0094 | −0,0129 | −0,0011 |
| $\delta M_5$ | −0,0018 | −0,0008 | +0,0014 | +0,0001 | +0,0114 | −0,0124 | −0,0004 |
| $\delta M_6$ | +0,0004 | −0,0008 | −0,0007 | −0,0001 | −0,0023 | +0,0028 | +0,0012 |
| | | | | **Zweites System.** | | | |
| $\delta M_0'$ | $-0{,}2199\,\mu$ | $-0{,}4896\,\mu'$ | $+0{,}0861\,\mu''$ | $+0{,}0155\,\mu'''$ | $+0{,}4394\,\mu^{IV}$ | $+0{,}0203\,\mu^{V}$ | $+0{,}0005\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1'$ | −0,0339 | +0,3762 | −0,2179 | +0,0085 | +0,2094 | +0,0093 | +0,0002 |
| $\delta M_2'$ | +0.0039 | −0,2501 | +0,5976 | −0,0038 | −0,0246 | −0,0011 | −0,0000 |
| $\delta M_3'$ | +0,0016 | −0,0105 | +0,0285 | +0,0455 | −0,0409 | −0,0017 | −0,0000 |
| $\delta M_4'$ | +0,0016 | +0,0026 | −0,0027 | −0,0005 | −0,0019 | −0,0043 | −0,0007 |
| $\delta M_5'$ | +0,0008 | +0,0015 | −0,0026 | −0,0002 | +0,0076 | −0,0107 | −0,0001 |
| $\delta M_6'$ | −0,0002 | −0,0002 | +0,0001 | +0,0000 | −0,0013 | +0,0012 | +0,0009 |
| | | | | **Drittes System.** | | | |
| $\delta M_0''$ | $+0{,}0253\,\mu$ | $-0{,}0528\,\mu'$ | $-0{,}0381\,\mu''$ | $-0{,}0032\,\mu'''$ | $+0{,}0794\,\mu^{IV}$ | $+0{,}0032\,\mu^{V}$ | $+0{,}0001\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1''$ | +0,0470 | +1,0569 | +0,6681 | +0,0680 | −2,0356 | −0,0825 | −0,0019 |
| $\delta M_2''$ | −0,0866 | −1,3939 | −1,0638 | −0,0979 | +2,8167 | +0,1149 | +0,0026 |
| $\delta M_3''$ | +0,1305 | +2,6672 | +1,9900 | +0,4561 | −4,7524 | −0,1934 | −0,0044 |
| $\delta M_4''$ | +0,000003 | −0,000748 | +0,00712 | −0,000760 | −0,001084 | +0,001337 | −0,000286 |
| $\delta M_5''$ | −0,00075 | −0,1746 | −0,01376 | −0,00310 | +0,03319 | −0,00194 | +0,00037 |
| $\delta M_6''$ | +0,00002 | +0,00046 | +0,00034 | +0,00009 | −0,00108 | +0,00006 | +0,00020 |

| | ☿ | ♀ | ♁ | ♂ | ♃ | ♄ | ♅ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Viertes System.** | | | |
| $\delta M_0^{'''}$ | $-0{,}0213\,\mu$ | $-0{,}0908\,\mu'$ | $-0{,}0691\,\mu''$ | $-0{,}0040\,\mu'''$ | $+0{,}1697\,\mu^{IV}$ | $+0{,}0070\,\mu^{V}$ | $+0{,}0002\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1^{'''}$ | $+0{,}0979$ | $+1{,}9275$ | $+1{,}5329$ | $+0{,}0952$ | $-3{,}3325$ | $-0{,}1358$ | $-0{,}0031$ |
| $\delta M_2^{'''}$ | $-0{,}0883$ | $-2{,}0075$ | $-1{,}5504$ | $-0{,}1336$ | $+3{,}4071$ | $+0{,}1385$ | $+0{,}0031$ |
| $\delta M_3^{'''}$ | $-0{,}0948$ | $-1{,}9348$ | $-1{,}4454$ | $+0{,}2850$ | $+3{,}4507$ | $+0{,}1404$ | $+0{,}0032$ |
| $\delta M_4^{'''}$ | $+0{,}00022$ | $+0{,}00481$ | $+0{,}00445$ | $-0{,}00011$ | $-0{,}00986$ | $+0{,}00037$ | $-0{,}00022$ |
| $\delta M_5^{'''}$ | $+0{,}00108$ | $+0{,}02369$ | $+0{,}01678$ | $-0{,}00194$ | $-0{,}03897$ | $-0{,}00325$ | $+0{,}00024$ |
| $\delta M_6^{'''}$ | $-0{,}00003$ | $-0{,}00071$ | $-0{,}00054$ | $+0{,}00012$ | $+0{,}00103$ | $+0{,}00009$ | $+0{,}00013$ |
| | | | | **Fünftes System.** | | | |
| $\delta M_0^{IV}$ | $+0{,}00610\,\mu$ | $-0{,}00665\,\mu'$ | $-0{,}00334\,\mu''$ | $-0{,}00013\,\mu'''$ | $-0{,}00762\,\mu^{IV}$ | $+0{,}01366\,\mu^{V}$ | $+0{,}00105\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1^{IV}$ | $-0{,}00007$ | $+0{,}00847$ | $-0{,}00281$ | $-0{,}00012$ | $-0{,}01010$ | $+0{,}00914$ | $+0{,}00071$ |
| $\delta M_2^{IV}$ | $-0{.}00008$ | $-0{,}00221$ | $+0{,}01029$ | $-0{,}00011$ | $-0{,}01034$ | $+0{,}00777$ | $+0{,}00060$ |
| $\delta M_3^{IV}$ | $-0{,}00001$ | $-0{,}00020$ | $-0{,}00033$ | $+0{,}00553$ | $-0{,}00306$ | $+0{,}00077$ | $+0{,}00006$ |
| $\delta M_4^{IV}$ | $-0{,}00002$ | $+0{,}00009$ | $+0{,}00009$ | $+0{,}00002$ | $+0{,}55413$ | $-0{,}10874$ | $-0{,}00834$ |
| $\delta M_5^{IV}$ | $-0{,}00007$ | $+0{,}00013$ | $+0{,}00024$ | $+0{,}00008$ | $-0{,}23584$ | $+0{,}46921$ | $-0{,}01436$ |
| $\delta M_6^{IV}$ | $+0{,}00003$ | $+0{,}00042$ | $+0{,}00090$ | $+0{,}00028$ | $-0{,}00786$ | $+0{,}07222$ | $-0{,}16882$ |
| | | | | **Sechstes System.** | | | |
| $\delta M_0^{V}$ | $+0{,}0000586\,\mu$ | $+0{,}0000704\,\mu'$ | $+0{,}0000797\,\mu''$ | $-0{,}0000054\,\mu'''$ | $-0{,}0001570\,\mu^{IV}$ | $-0{,}0000241\,\mu^{V}$ | $-0{,}0000044\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1^{V}$ | $-0{,}000038$ | $-0{,}001284$ | $-0{,}001781$ | $+0{,}000085$ | $+0{,}002211$ | $+0{,}000572$ | $+0{,}000063$ |
| $\delta M_2^{V}$ | $+0{,}0000453$ | $+0{,}0019986$ | $+0{,}0032785$ | $-0{,}0003530$ | $-0{,}0037987$ | $+0{,}0001901$ | $-0{,}0001257$ |
| $\delta M_3^{V}$ | $+0{,}0000217$ | $+0{,}0004211$ | $+0{,}0020730$ | $+0{,}0064524$ | $-0{,}0037660$ | $-0{,}0014915$ | $-0{,}0005046$ |
| $\delta M_4^{V}$ | $-0{,}00000$ | $-0{,}00007$ | $-0{,}00015$ | $-0{,}00007$ | $+0{,}01602$ | $-0{,}24730$ | $+0{,}00569$ |
| $\delta M_5^{V}$ | $-0$ | $-0{,}00004$ | $-0{,}00010$ | $-0{,}00005$ | $+0{,}12280$ | $+0{,}32065$ | $+0{,}00219$ |
| $\delta M_6^{V}$ | $0$ | $+0{,}000002$ | $+0{,}000006$ | $+0{,}000003$ | $+0{,}011406$ | $-0{,}003022$ | $-0{,}016984$ |
| | | | | **Siebentes System.** | | | |
| $\delta M_0^{VI}$ | $+0{,}0004798\,\mu$ | $-0{,}0001761\,\mu'$ | $-0{,}0000940\,\mu''$ | $-0{,}0000021\,\mu'''$ | $-0{,}0001471\,\mu^{IV}$ | $+0{,}0000428\,\mu^{V}$ | $+0{,}0001419\,\mu^{VI}$ |
| $\delta M_1^{VI}$ | $-0{,}000044$ | $+0{.}001218$ | $-0{,}000143$ | $-0{,}000001$ | $-0{,}000428$ | $-0{,}000333$ | $+0{,}000419$ |
| $\delta M_2^{VI}$ | $-0{,}000030$ | $-0{,}000280$ | $+0{,}001662$ | $+0{,}000002$ | $-0{,}000486$ | $-0{,}000535$ | $+0{,}000529$ |
| $\delta M_3^{VI}$ | $-0{,}0000021$ | $-0{,}0000327$ | $-0{,}0000611$ | $+0{,}0009840$ | $-0{,}0002600$ | $-0{,}0004441$ | $+0{,}0003086$ |
| $\delta M_4^{VI}$ | $0$ | $-0{,}0004$ | $-0{,}0008$ | $-0{,}0002$ | $+0{,}1293$ | $-0{,}0958$ | $+0{,}0561$ |
| $\delta M_5^{VI}$ | $-0{,}00002$ | $-0{,}00015$ | $-0{,}00037$ | $-0{,}00011$ | $-0{,}05413$ | $+0{,}07293$ | $+0{,}03586$ |
| $\delta M_6^{VI}$ | $0$ | $+0{,}0001$ | $+0{,}0002$ | $+0{,}0001$ | $-0{,}0015$ | $+0{,}0151$ | $+0{,}4752$ |

## 9.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ erhält man aus XXVII. vermittelst der Gleichung $\sum_k M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} = 0$ die Formel

XXVIII. $$\sum_k M_k^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

durch welche je sieben von den Gröfsen $(m_k, m_{k'})$, welche zu demselben System gehören und in derselben Vertical- oder Horizontalreihe befindlich sind, mit einander verbunden werden. Die Gröfsen $B_i^{(h)}$, $C_i^{(h,k)}$ selbst con-

trollirt man leicht durch die Formeln

$$\text{XXIX.} \quad \begin{cases} \sum_i B_i^{(h)} = g^{(h)}, \\ \sum_i C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_k^{(h)}. \end{cases}$$

Da, um $\Delta M_k^{(h)}$ aus $\delta M_k^{(h)}$ zu erhalten, von dem Coëfficienten $C_k^{(h,k)}$, mit welchem $\mu^{(h)}$ multiplicirt ist, die Gröfse $\frac{1}{2} M_k^{(h)}$ abzuziehen ist, so zeigen diese Formeln, *dafs in der Variation von $g^{(h)}$ die Summe der in die Variationen der Planetenmassen multiplicirten Coëfficienten der Gröfse $g^{(h)}$ selber gleich wird, und dafs die Summe der in die Variationen der Massen multiplicirten Coëfficienten in der Variation der Gröfse $M_k^{(h)}$ verschwindet.* Die Formeln XXIX. ergeben sich daraus, dafs

$$\sum_i (i', i) = [i', i'], \quad \sum_i M_i^{(h)2} = 1.$$

Man hat daher aus XXV. die Gleichung

$$\sum_i B_i^{(h)} = \sum_{i'} M_{i'}^{(h)2} \cdot g^{(h)} = g^{(h)},$$

und aus XXVI. und XXVIII.,

$$\sum_i C_i^{(h,k)} = \sum_{i'} (m_k, m_{i'})_h M_{i'}^{(h)} \cdot g^{(h)} + \frac{1}{2} M_k^{(h)} \sum_i M_i^{(h)2} = \frac{1}{2} M_k^{(h)},$$

wie zu beweisen ist. Aus der letzten Gleichung sieht man, dafs durch die zweite der Gleichungen XXIX. zugleich die Controlle der für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gefundnen Werthe gegeben wird.

Zur Controlle der für die Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ berechneten Werthe kann man auch noch die Gleichungen

$$\text{XXX.} \quad \sum_k M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_i^{(h)2},$$

$$\text{XXXI.} \quad \sum_k M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = 0$$

anwenden, in deren letztrer, wenn $i = k$, für 0 rechter Hand $\frac{1}{2}$ gesetzt werden mufs. Substituirt man den für $C_i^{(h,k)}$ gegebnen Ausdruck XXVI., so ergiebt sich die erste dieser Gleichungen aus XXVIII. Die zweite folgt durch Substitution des für $C_i^{(h,k)}$ gegebenen Ausdrucks vermittelst der Gleichungen

$$\text{XXXII.} \quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

$$\text{XXXIII.} \quad \sum_h g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = -\frac{1}{2} \sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}.$$

Die erste dieser Formeln ergiebt sich daraus, dafs wenn man den Werth

$$(m_k, m_{k'})_h = \sum_{h'} \frac{M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)} - g^{(h')}}$$

substituirt, wo $h'$ nur die sechs von $h$ verschiedenen Werthe annehmen darf, sich in der Doppelsumme je zwei durch $g^{(h)} - g^{(h')}$ und $g^{(h')} - g^{(h)}$ dividirte Terme gegenseitig aufheben. Um die Formel XXXIII. zu beweisen, bemerke ich, dafs die dortige Summe gleich wird der Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} \frac{g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)} - g^{(h')}},$$

welche sich auf die Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}$$

reducirt, wenn man in letztrer die Combination $h = h'$ wieder ausschliefst und jede Combination verschiedner Werthe von $h$ und $h'$ nur einmal nimmt. Giebt man jedem der Accente $h$ und $h'$ *alle* Werthe von 0 bis 6, so dafs man $h$ und $h'$ auch dieselben Werthe annehmen läfst, so mufs man für die vorstehende Doppelsumme den folgenden Ausdruck setzen:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')} - \tfrac{1}{2}\sum_{h} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{h} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{h} M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2},$$

welcher sich, wenn $k$ und $k'$ verschieden sind, auf die in der Formel XXXIII. angegebene Gröfse

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{h} M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}$$

reducirt. Die vorstehende Gleichung zeigt aufserdem, *dafs man, wenn $k' = k$, in* XXXIII. *zu dem Ausdrucke rechts die Gröfse $\frac{1}{2}$ zu addiren hat.*

Man hat noch, wenn $h$ und $h''$, $k$ und $k''$ von einander verschieden sind, die Formeln:

$$\text{XXXIV.} \quad \sum_{k} \{M_k^{(h'')} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h'',k)}\} = M_i^{(h)} M_i^{(h'')},$$

$$\text{XXXV.} \quad \sum_{k} \{M_{k'}^{(h)} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h,k')}\} = 0.$$

Um die erste dieser Formeln zu beweisen, mufs man die Gleichung

$$\text{XXXVI.} \quad \sum_{k} M_k^{(h'')} \{m_k, m_{k'}\}_h = \frac{M_{k'}^{(h'')}}{g^{(h)} - g^{(h'')}}$$

zu Hülfe nehmen, welche man durch Substitution von XXVII. leicht erhält. Zum Beweise der Formel XXXV. dienen die Gleichungen

$$\text{XXXVII.} \begin{cases} \sum\limits_{h} \{M_{k''}^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h + M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_{k''}, m_{k'})_h\} = 0, \\ \sum\limits_{h} g^h \{M_{k''}^{(h)} M_i^{(h)} (m_k, m_i)_h + M_k^{(h)} M_i^{(h)} (m_{k''}, m_i)_h\} = -\sum\limits_{h} \cdot M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} \cdot M_{k'}^{(h)}, \end{cases}$$

welche man ähnlich wie XXXII. und XXXIII. findet.

Die Gleichungen XXIX. ergeben sich auch aus der Betrachtung, dafs wenn sich in dem System der Gleichungen VIII. sämmtliche Zahlencoëfficienten in dem gleichen Verhältnisse ändern, die Wurzeln $g$ sich in demselben Verhältnisse ändern, die Werthe der Unbekannten $M_k^{(h)}$ aber ungeändert bleiben werden. Hieraus kann man zufolge der §. 5. gemachten Bemerkung schliefsen, dafs, wenn in den Ausdrücken für $\Delta g^{(k)}$ und $\Delta M_k^{(h)}$ die Variationen $\mu = \mu' \ldots = \mu^{\nu} = 1$ gesetzt werden, sich $\Delta g^{(k)}$ in $g^{(h)}$ verwandeln und $\Delta M_k^{(h)}$ verschwinden mufs, woraus die angeführten Gleichungen von selber folgen. Ebenso ergeben sich die Gleichungen XXX., XXXI., XXXIV., XXXV. a priori daraus, dafs

$$\sum_k M_k^{(h)^2} = 1, \quad \sum_h M_k^{(h)^2} = 1,$$

$$\sum_k M_k^{(h)} M_k^{(h'')} = 0, \quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} = 0,$$

und daher die Variationen dieser Summen,

$$\sum_k . M_k^{(h)} \Delta M_k^{(h)}, \quad \sum_h . M_k^{(h)} \Delta M_k^{(h)},$$

$$\sum_k \{M_k^{(h)} . \Delta M_k^{(h'')} + M_k^{(h'')} . \Delta M_k^{(h)}\}, \quad \sum_h \{M_k^{(h)} . \Delta M_{k''}^{(h)} + M_{k''}^{(h)} . \Delta M_k^{(h)}\}$$

verschwinden müssen.

## 10.

Zur leichtern Vergleichung mit den von Herrn *Leverrier* gefundnen Resultaten sollen noch aus den gefundnen Zahlenwerthen die Coëfficienten in den Variationen der Verhältnisse der Gröfsen $N$ abgeleitet werden. Man gelangt zu denselben vermittelst der Formel

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{M_i}{M_k} \sqrt{\frac{m^{(k)} \sqrt{a_k}}{m^{(i)} \sqrt{a_i}}},$$

woraus

$$\Delta \frac{N_i}{N_k} = \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\Delta M_i}{M_i} - \frac{\Delta M_k}{M_k} - \tfrac{1}{2} (\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}$$

$$= \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k} - (\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}.$$

Führt man aus XXII. die Werthe der Gröfsen $\delta M$ ein, so hebt sich der mit $Q$ multiplicirte Term fort. Man kann daher, wenn man, wie hier, blofs $\frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k}$ braucht, in den Werthen XXVI. der Gröfsen $C$ den *achten* Term fortlassen. Auch bei den Variationen von $\frac{N_i}{N_k}$ findet der Satz Statt, *dafs die Summe der Coëfficienten der Variationen der Planetenmassen verschwindet*, welcher eine

schliefsliche Controlle über alle gemachten Rechnungen giebt. Um zu sehen, wie weit diese Controlle erfüllt wird, habe ich in der letzten Columne die Summe der in jeder Horizontalreihe enthaltnen Coëfficienten der $\mu$, $\mu'$ etc., welche in den absolut strengen Werthen verschwinden soll, in Einheiten der letzten Decimalstelle hinzugefügt.

## Zusammenstellung der sieben Systeme Auflösungen der Gleichungen V. nebst den Variationen der Werthe der Unbekannten für eine Änderung der Planetenmassen in dem Verhältnisse $1:1+\mu^{(k)}$.

| Bezeichnung der Unbekannten. | Ihr numerischer Werth für die angenommenen Massen. | Coëfficienten der verschiednen $\mu$ in dem Ausdrucke ihrer Variation. $\mu$ | $\mu'$ | $\mu''$ | $\mu'''$ | $\mu^{IV}$ | $\mu^{V}$ | $\mu^{VI}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Erstes System.** | | | | | | | |
| $g$ | 5,2988733 | −0,1635 | +2,4341 | +0,9768 | +0,0389 | +1,9184 | +0,0920 | +0,0022 | |
| $\frac{N_0}{N_3}$ | +103,29933 | −78,8504 | −200,8713 | −28,2320 | +6,3283 | +287,4875 | +13,7627 | +0,3828 | +76 |
| $\frac{N_1}{N_3}$ | +10,200668 | +0,1261 | −6,2507 | −8,4272 | +0,1210 | +13,7368 | +0,6731 | +0,0209 | 0 |
| $\frac{N_2}{N_3}$ | +6,416474 | +0,0039 | −1,3578 | −4,0906 | −0,0786 | +5,2484 | +0,2664 | +0,0092 | −9 |
| $\frac{N_4}{N_3}$ | −0,0121377.56 | −0,0019 | +0,0212 | +0,0084 | −0,0002 | −0,0075 | −0,0186 | −0,0015 | −1 |
| $\frac{N_5}{N_3}$ | −0,0106745.14 | −0,0013 | +0,0169 | +0,0066 | −0,0003 | −0,0046 | −0,0165 | −0,0009 | −1 |
| $\frac{N_6}{N_3}$ | +0,0042589.93 | +0,0007 | −0,0105 | −0,0041 | −0,0000 | +0,0018 | +0,0115 | +0,0004 | −2 |
| | | **Zweites System.** | | | | | | | |
| $g'$ | 7,5747191 | +0,4451 | +0,3000 | +1,2452 | +0,1565 | +5,1805 | +0,2416 | +0,0058 | |
| $\frac{N'_0}{N'_3}$ | −7,8168589 | +2,2665 | −14,7849 | +7,2402 | +0,5134 | +4,5186 | +0,2409 | +0,0053 | 0 |
| $\frac{N'_1}{N'_3}$ | +7,3129033 | −0,6047 | −1,6959 | −6,9033 | −0,0089 | +8,8286 | +0,3747 | +0,0093 | −2 |
| $\frac{N'_2}{N'_3}$ | +5.8086635 | −0,1654 | −0,8968 | −4,1052 | −0,1124 | +5,0638 | +0,2107 | +0,0055 | +2 |
| $\frac{N'_4}{N'_3}$ | −0,0036768.09 | +0,0006363 | −0,0000285 | +0,0014652 | −0,0000147 | −0,0002942 | −0,0015458 | −0,0003159 | +24 |
| $\frac{N'_5}{N'_3}$ | −0,0038477.59 | +0,0005197 | −0,0001260 | +0,0011321 | −0,0000661 | +0,0003481 | −0,0017259 | −0,0000821 | −8 |
| $\frac{N'_6}{N'_3}$ | +0,0008227.714 | −0,0001899 | −0,0000260 | −0,0004623 | −0,0000136 | −0,0004926 | +0,0011596 | +0,0000350 | +3 |

| Bezeichnung der Unbekannten | Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten. | Coëfficienten der verschiednen $\mu$ in dem Ausdrucke ihrer Variation. $\mu$ | $\mu'$ | $\mu''$ | $\mu'''$ | $\mu^{iv}$ | $\mu^{v}$ | $\mu^{vi}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Drittes System.** | | | | | |
| $g''$ | 17,1525573 | +0,1917 | +3,6056 | +4,2063 | −0,0189 | +8.7689 | +0,3900 | +0,0091 | |
| $\frac{N''_0}{N''_2}$ | +0,0561438 | −0,01741 | −0,36213 | −0,26764 | +0,00591 | +0,61579 | +0,02490 | +0,00057 | −1 |
| $\frac{N''_1}{N''_2}$ | −0,4454850 | +0,13647 | +3,31162 | +2,04252 | −0,04525 | −5,22801 | −0,21246 | −0,00486 | +3 |
| $\frac{N''_2}{N''_1}$ | +0,4034470 | −0,14956 | −2,79710 | −2,50683 | +0,02231 | +5,21399 | +0,21236 | +0,00486 | +3 |
| $\frac{N''_4}{N''_2}$ | −0,0000411.09 | +0,0000092 | +0,0001684 | +0,0001571 | −0,0000280 | −0,0003189 | +0,0000196 | −0,0000074 | 0 |
| $\frac{N''_5}{N''_2}$ | −0,0002686.22 | +0,0000306 | +0,0005403 | +0,0003745 | −0,0001810 | −0,0008814 | +0,0001045 | +0,0000125 | 0 |
| $\frac{N''_6}{N''_2}$ | +0,0000157.209 | | | | | | | | |
| | | | | **Viertes System.** | | | | | |
| $g'''$ | 17,8632966 | +0,0979 | +2,2138 | +3,1417 | +0,2519 | +11,6387 | +0,5075 | +0,0118 | |
| $\frac{N'''_0}{N'''_2}$ | −0,0245767 | −0,00961 | −0,19241 | −0,14548 | −0,02174 | +0,35440 | +0,01449 | +0,00034 | −1 |
| $\frac{N'''_1}{N'''_2}$ | +0,2099933 | +0,08115 | +1,40463 | +1,25978 | +0,19087 | −2,81892 | −0,11484 | −0,00264 | +3 |
| $\frac{N'''_2}{N'''_2}$ | −0,2315229 | −0,07137 | −1,55987 | −0,95916 | −0,21690 | +2,69524 | +0,10957 | +0,00249 | 0 |
| $\frac{N'''_4}{N'''_3}$ | −0,0000119.17 | +0,0000026 | +0,0000582 | +0,0000588 | −0,0000096 | −0,0001148 | +0,0000089 | −0,0000040 | +1 |
| $\frac{N'''_5}{N'''_2}$ | −0,0001337.88 | +0,0000153 | +0,0003501 | +0,0002358 | −0,0001418 | −0,0005319 | +0,0000651 | +0,0000074 | 0 |
| $\frac{N'''_6}{N'''_2}$ | +0,0000073.1946 | | | | | | | | |
| | | | | **Fünftes System.** | | | | | |
| $g^{iv}$ | 3,7136434 | +0,0001 | +0,0031 | +0,0067 | +0,0021 | +0,6602 | +2,8276 | +0,2137 | |
| $\frac{N^{iv}_0}{N^{iv}_6}$ | −0,8166526 | +0,00440 | +0,88379 | +0,44205 | +0,01628 | +1,04609 | −2,10609 | −0,28651 | +1 |
| $\frac{N^{iv}_1}{N^{iv}_6}$ | −0,5439845 | +0,00357 | +0,10098 | +0,14480 | +0,00548 | +0,54837 | −0,66862 | −0,13456 | +2 |
| $\frac{N^{iv}_2}{N^{iv}_6}$ | −0,5382496 | +0,00334 | +0,09917 | +0,06898 | +0,00413 | +0,49005 | −0,54178 | −0,12388 | +1 |
| $\frac{N^{iv}_3}{N^{iv}_6}$ | −0,6201246 | +0,00098 | +0,02120 | +0,03416 | −0,00056 | +0,36689 | −0,30473 | −0,11793 | +1 |
| $\frac{N^{iv}_4}{N^{iv}_6}$ | −1,4263523 | −0,00017 | −0,00304 | −0,00635 | −0,00196 | +0,57698 | −0,32348 | −0,24197 | +1 |
| $\frac{N^{iv}_5}{N^{iv}_6}$ | −1,1251482 | −0,00015 | −0,00263 | −0,00552 | −0,00170 | +0,64753 | −0,47272 | −0,16480 | +1 |

| Bezeichnung der Unbekannten. | Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten. | Coëfficienten der verschiednen $\mu$ in dem Ausdrucke ihrer Variation. $\mu$ | $\mu'$ | $\mu''$ | $\mu'''$ | $\mu^{IV}$ | $\mu^{V}$ | $\mu^{VI}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Sechstes System. | | | | | |
| $g^{V}$ | 22,4273091 | 0 | +0,0012 | +0,0028 | +0,0011 | +17,5264 | +4,5608 | +0,3351 | |
| $\frac{N_0^{V}}{N_6^{V}}$ | −0,0568966.3 | −0,0021 | −0,0709 | −0,0802 | +0,0054 | +0,1181 | +0,0259 | +0,0037 | −1 |
| $\frac{N_1^{V}}{N_6^{V}}$ | +0,2141503.5 | +0,0239 | +0,5891 | +1,1142 | −0,0535 | −1,2411 | −0,3954 | −0,0370 | +2 |
| $\frac{N_2^{V}}{N_6^{V}}$ | −1,3413225 | −0,0246 | +0,2553 | −1,7815 | +0,1916 | +1,1733 | +0,1326 | +0,0531 | −2 |
| $\frac{N_3^{V}}{N_6^{V}}$ | −8,6001745 | −0,0293 | −0,5661 | −2,7830 | −0,0543 | −0,6597 | +3,5131 | +0,5795 | +2 |
| $\frac{N_4^{V}}{N_6^{V}}$ | +8,8225143 | +0,0002 | +0,0025 | +0,0058 | +0,0026 | −3,2775 | +3,2773 | −0,0111 | −2 |
| $\frac{N_5^{V}}{N_6^{V}}$ | −27,373541 | +0,0004 | −0,0025 | −0,0056 | −0,0025 | −21,9435 | +22,3477 | −0,3939 | −1 |
| | | | | Siebentes System. | | | | | |
| $g^{VI}$ | 2,2584168 | 0 | +0,0001 | +0,0004 | +0,0001 | +0,9452 | +1,3695 | −0,0569 | |
| $\frac{N_0^{VI}}{N_6^{VI}}$ | +0,0137320.0 | −0,00030 | −0,00493 | −0,00263 | −0,00006 | −0,00410 | +0,00099 | +0,01104 | −1 |
| $\frac{N_1^{VI}}{N_6^{VI}}$ | +0,0151102.33 | −0,00048 | −0,00173 | −0,00157 | −0,00001 | −0,00468 | −0,00389 | +0,01237 | +1 |
| $\frac{N_2^{VI}}{N_6^{VI}}$ | +0,0164237.12 | −0,00029 | −0,00268 | −0,00057 | +0,00002 | −0,00462 | −0,00536 | +0,01350 | 0 |
| $\frac{N_3^{VI}}{N_6^{VI}}$ | +0,0231931.91 | −0,00005 | −0,00077 | −0,00145 | −0,00002 | −0,00609 | −0,01081 | +0,01920 | +1 |
| $\frac{N_4^{VI}}{N_6^{VI}}$ | +0,0603080.14 | −0,00001 | −0,00013 | −0,00029 | −0,00009 | −0,01590 | −0,03378 | +0,05021 | +1 |
| $\frac{N_5^{VI}}{N_6^{VI}}$ | +0,0581604.21 | −0,00001 | −0,00009 | −0,00021 | −0,00007 | −0,02911 | −0,01972 | +0,04923 | −2 |

Herr *Leverrier* ist auch bei Berechnung der Variationen $\Delta\frac{N_i}{N_k}$, so wie bei Berechnung der Grösen $\frac{N_i}{N_k}$ selber, so verfahren, dafs er das vollständige System von *sieben* Gleichungen in zwei Systeme von *vier* und *drei* Gleichungen zerlegt, jedes mit eben so vielen Unbekannten, und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des ersten Systems die Variationen der drei Unbekannten des zweiten und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des zweiten Systems die Variationen der vier Unbekannten des ersten Systems vernachlässigt, und keine weitern Correctionen für diese Vernachlässigungen anbringt. Er variirt nämlich die Coëfficienten der für die Wurzeln $g$ von ihm gebildeten biquadrati-

schen und cubischen Gleichung und berechnet daraus die Variationen $\Delta g$, und dann mit diesen durch die strenge Auflösung eines Systems von respective vier und drei lineären Gleichungen die Variationen $\Delta \frac{N_i}{N_k}$. Zur Controlle braucht auch Herr *Leverrier* den Satz, dafs in jeder Variation $\Delta \frac{N_i}{N_k}$ die Summe der in die sieben $\mu$ multiplicirten Gröfsen verschwinden mufs. Aber diese Controlle ist bei ihm nicht, wie bei unsern strengen Formeln, entscheidend, da sie nach dem von ihm befolgten Gange der Rechnung eintreffen mufs, wie bedeutend auch der durch den Einflufs der von ihm vernachlässigten Glieder verursachte Fehler sein möge. In der That finden zwischen den Zahlencoëfficienten der vorstehenden und der von Herrn *Leverrier* gefundenen Ausdrücke der $\Delta \frac{N_i}{N_k}$ nicht unbedeutende Unterschiede Statt, während die Werthe der $g$ und $\frac{N_i}{N_k}$ selber eine viel bessere Übereinstimmung zeigen.

Zur Vergleichung der Genauigkeit der beiderlei Resultate sind die in $\mu''$ multiplicirten Variationen von $\frac{N''_0}{N''_2}$, $\frac{N''_1}{N''_2}$ etc. in die Gleichungen substituirt worden, welche sich aus III. zur Bestimmung dieser Variationen ergeben *). Setzt man nämlich wieder

$$(i, i) = 0, \quad (i, 0) + (i, 1) + \ldots + (i, 6) = [i, i]$$

so folgt aus den Gleichungen III.

$$(g'' - [0, 0])\frac{N''_0}{N''_2} + \overline{|0, 1|}\frac{N''_1}{N''_2} + \ldots + \overline{|0, 6|}\frac{N''_6}{N''_2} = 0,$$

$$\overline{|1, 0|}\frac{N''_0}{N''_2} + (g'' - [1, 1])\frac{N''_1}{N''_2} + \ldots + \overline{|1, 6|}\frac{N''_6}{N''_2} = 0,$$

etc.

und hieraus, wenn man die Planetenmassen variirt:

$$+\overline{|0, 1|}\frac{N''_1}{N''_2}\cdot\mu' + \ldots + \overline{|0, 6|}\frac{N''_6}{N''_2}\,\mu^{VI}$$

$$+(g'' - \overline{|0, 0|})\Delta\frac{N''_0}{N''_2} + \overline{|0, 1|}\Delta\frac{N''_1}{N''_2} + \ldots + \overline{|0, 6|}\Delta\frac{N''_6}{N''_2}$$

$$+\frac{N''_0}{N''_2}\{\Delta g'' - (0, 1)\mu - \ldots - (0, 6)\mu^{VI}\} = 0,$$

*) Ich habe das dritte System gewählt, weil in den Variationen desselben die Abweichungen besonders erheblich sind; so werden in dem Ausdrucke von $\Delta \frac{N''_2}{N''_3}$ die Coëfficienten der verschiedenen $\mu$ bei *Leverrier* und nach den hier geführten Rechnungen:

—0,16284; —3,06732; —2,71193; —0,02085; 5,73826; 0,21778; 0,00690;
—0,14956; —2,79710; —2,50683; +0,02231; 5,21399; 0,21236; 0,00486.

$$\boxed{1,0}\frac{N''_0}{N''_2}\mu+\boxed{1,2}\frac{N''_2}{N''_2}\mu''+\ldots.+\boxed{1,6}\frac{N''_6}{N''_2}\mu^{\text{VI}}$$
$$+\boxed{1,0}\Delta\frac{N''_0}{N''_2}+(g''-[1,1])\Delta\frac{N''_1}{N''_2}+\ldots.+\boxed{1,6}\Delta\frac{N''_6}{N''_2}$$
$$+\frac{N''_1}{N''_2}\{\Delta g''-(1,0)\mu-(1,2)\mu''-\ldots.-(1,6)\mu^{\text{VI}}\}=0,$$

etc.

Diese Gleichungen müssen für die in jedes einzelne $\mu$ multiplicirten Terme besonders erfüllt werden. Bezeichnet man z. B. die Coëfficienten von $\mu''$ in $\Delta g''$ und $\Delta\frac{N''_k}{N''_2}$ mit $\gamma$ und $\nu_k$, wo $\nu_3=0$, so müssen die 7 Gröfsen $\gamma$ und $\nu_k$ den 7 Gleichungen

$$\boxed{0,2}\frac{N''_2}{N''_2}+(\gamma-(0,2))\frac{N''_0}{N''_2}+(g''-[0,0])\nu_0+\boxed{0,1}\nu_1+\ldots.+\boxed{0,6}\nu_6=0,$$
$$\boxed{1,2}\frac{N''_2}{N''_2}+(\gamma-(1,2))\frac{N''_1}{N''_2}+\boxed{1,0}\nu_0+(g''-[1,1])\nu_1+\ldots.+\boxed{1,6}\nu_6=0,$$

etc.

genügen, von denen die dritte für die beiden ersten Terme blofs den einen $\frac{N''_2}{N''_2}\cdot\gamma$ enthalten wird. Wenn man in diese Gleichungen für die Gröfsen $\gamma$ und $\nu_k$ die von Herrn *Leverrier* und die nach der hier geführten Rechnung gefundnen Zahlenwerthe substituirt, so werden die Gröfsen linker Hand, welche in den verschiednen Gleichungen verschwinden sollen,

bei *Leverrier:*

$-0{,}211$; $-0{,}195$; $-0{,}064$; $-0{,}237$; $+0{,}001$; $+0{,}001$; 0;

hier: $+0{,}0002$; $+0{,}0003$; $+0{,}0003$; $+0{,}0002$; $-0{,}0001$; $+0{,}0001$; 0.

Man sieht hieraus, mit wie viel gröfsrer Schärfe die durch Anwendung der strengen Formeln gefundnen Resultate den Gleichungen, durch welche die Correctionen bestimmt werden, Genüge leisten.

## 11.

Aus den Variationen der Verhältnisse der zu demselben System gehörigen $N$ berechnet Herr *Leverrier* für jedes System die Variation einer dieser Gröfsen selber, welches um die übrigen zu finden ausreicht, und aufserdem die Variationen der 7 Winkel $\beta$ (§. 5.). Man erhält aber einen mehr symmetrischen Gang der Rechnung, wenn man, ohne die Variationen der Verhältnisse der Gröfsen $N$ einzuführen, deren Berechnung hier nur der Vergleichung der beiderlei Resultate halber an-

gestellt worden ist, die Variationen der Grösen $N$ und der Winkel $\beta$ unmittelbar aus den Variationen der Grösen $M$ ableitet, was auf folgende Weise geschieht.

Die Formeln VI. und die am Ende des §. 5. gefundenen Formeln,

$$N_i = \frac{KM_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}}, \quad K\sin\beta = A, \quad K\cos\beta = B,$$

ergeben

$$\text{XXXVIII.} \quad \Delta\beta = \frac{B\Delta A - A\Delta B}{K^2}, \quad \frac{\Delta K}{K} = \frac{A\Delta A + B\Delta B}{K^2},$$

$$\text{XXXIX.} \quad \Delta N_i = N_i\left\{\frac{\Delta K}{K} + \frac{\delta M_i}{M_i} - \mu^{(i)}\right\},$$

$$= N_i\frac{\Delta K}{K} + \frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} - N_i\mu_i,$$

wo ich wieder $\delta M_i = \Delta M_i + \frac{1}{2}M_i\mu^{(i)}$ eingeführt habe, weil die Werthe dieser Grösen in der oben am Schlufs von §. 8. aufgestellten Tabelle gegeben worden sind. Aus den Formeln (§. 5.)

$$A^{(i)} = HM_0^{(i)} + H'M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$B^{(i)} = LM_0^{(i)} + L'M_1^{(i)} + \ldots.$$

folgen, da $\Delta H^{(i)} = \frac{1}{2}H^{(i)}\mu^{(i)}$, $\Delta L^{(i)} = \frac{1}{2}L^{(i)}\mu^{(i)}$, die Gleichungen

$$\Delta A^{(i)} = H\delta M_0^{(i)} + H'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$\Delta B^{(i)} = L\delta M_0^{(i)} + L'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$

Setzt man daher

$$\frac{BH^{(i)} - AL^{(i)}}{K^2} = D_i, \quad \frac{AH^{(i)} + BL^{(i)}}{K^2} = F_i,$$
$$\frac{B'H^{(h)} - A'L^{(h)}}{K^2} = D_i', \quad \frac{A'H^{(h)} + B'L^{(h)}}{K^2} = F_i',$$

etc etc.,

so wird zufolge XXXVIII.

$$\Delta\beta = D_0\delta M_0 + D_1\delta M_1 + \ldots. + D_6\delta M_6,$$
$$\Delta\beta' = D_0'\delta M_0' + D_1'\delta M_1' + \ldots. + D_6'\delta M_6',$$

etc.

$$\frac{\Delta K}{K} = F_0\delta M_0 + F_1\delta M_1 + \ldots. + F_6\delta M_6,$$
$$\frac{\Delta K'}{K'} = F'\delta M_0' + F_1'\delta M_1' + \ldots. + F_6'\delta M_6',$$

etc.

Nennt man $e_0^{(i)}$ und $\varpi_0^{(i)}$ die Anfangswerthe von $e^{(i)}$ und $\varpi^{(i)}$ und setzt

$$e_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})} = E^{(i)},$$

so hat man

$$D_i = \frac{E^{(i)}}{K}\sin(\varpi_0^{(i)} - \beta), \qquad F_i = \frac{E^{(i)}}{K}\cos(\varpi_0^{(i)} - \beta),$$

$$D_i' = \frac{E^{(i)}}{K'}\sin(\varpi_0^{(i)} - \beta'), \qquad F_i' = \frac{E^{(i)}}{K'}\cos(\varpi_0^{(i)} - \beta'),$$

etc. etc.

Nach Berechnung der Grösen $\frac{\Delta K}{K}$ findet man durch die obige Formel XXXIX. die Variationen $\Delta N_i$, wenn man noch die Grösen $\frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} = \frac{N_i}{M_i}\delta M_i$ aus den für die Grösen $\delta M_i$ gefundnen Ausdrücken bestimmt.

Da in dem Ausdrucke von $\delta M_i^{(h)}$ die Coëfficienten der einzelnen $\mu$ die Summe $\frac{1}{2}M_i^{(h)}$ haben, so erhält diese Summe in $\frac{\Delta K^{(h)}}{K^{(h)}}$ den Werth $\frac{1}{2}$ und verschwindet in den Ausdrücken von $\Delta\beta^{(h)}$ und $\Delta N_i^{(h)}$, was man auch leicht *a priori* beweiset.

Berlin, den 9ten August 1845.

# 6.

# Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine.

(Estratto dal giornale arcadico Tomo XCVIX.)

---

## I.

La ricerca degli assi principali di una superficie del second'ordine, riviene al problema di passare da tre coordinate rettangolari $x$, $y$, $z$ a tre nuove coordinate rettangolari $p$, $p'$, $p''$, in guisa che l'espressione

$$Axx+Byy+Czz+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

sia trasformata in questa più semplice

$$Gpp+G'p'p'+G''p''p''.$$

Il sig. *Kummer* è giunto a rappresentare il valore che ha il quadrato del prodotto delle differenze delle tre quantità $G$, $G'$, $G''$ per la somma di sette quadrati, i quali possono mettersi sotto la forma seguente

$$1.\quad \begin{cases} 15(EF'-FE')^2+[BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA')]^2 \\ +15(FD'-DF')^2+[CE'-EC'+AE'-EA'-2(BE'-EB')]^2 \\ +15(DE'-ED')^2+[AF'-FA'+BF'-FB'-2(CF'-FC')]^2 \\ +[BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA']^2 \\ =(G'-G'')^2(G''-G)^2(G-G')^2, \end{cases}$$

ove

$$2.\quad \begin{cases} A'=BC-DD, & D'=EF-AD, \\ B'=CA-EE, & E'=FD-BE, \\ C'=AB-FF, & F'=DE-CF. \end{cases}$$

Per meglio conoscere la natura di questo bel risultato, esprimerò la radice di ciascuno de' sette quadrati in funzione delle quantità $G$, $G'$, $G''$ e de'coëfficienti della sostituzione

$$3.\quad \begin{cases} p = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ p' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ p'' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

la quale determina le nuove coordinate $p$, $p'$, $p''$ per le coordinate $x$, $y$, $z$. Le formule algebriche alle quali sono pervenuto in questa ricerca, forniscono una nuova dimostrazione della formula del sig. ***Kummer***, e possono anche esser utili in altre occasioni.

## II.

Fra i ***nove*** coëfficienti dell'equazioni (3.), si hanno le ***ventidue*** relazioni conosciute

$$4.\quad \begin{cases} \alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha'' = 1, \quad \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 1, \\ \beta\beta+\beta'\beta'+\beta''\beta'' = 1, \quad \alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma' = 1, \\ \gamma\gamma+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma'' = 1, \quad \alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma'' = 1; \\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' = 0, \quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = 0, \\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'' = 0, \quad \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'' = 0, \quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = 0; \\ \beta'\gamma''-\beta''\gamma' = \alpha, \quad \beta''\gamma-\beta\gamma'' = \alpha', \quad \beta\gamma'-\beta'\gamma = \alpha'', \\ \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' = \beta, \quad \gamma''\alpha-\gamma\alpha'' = \beta', \quad \gamma\alpha'-\gamma'\alpha = \beta'', \\ \alpha'\beta''-\alpha''\beta' = \gamma, \quad \alpha''\beta-\alpha\beta'' = \gamma', \quad \alpha\beta'-\alpha'\beta = \gamma''; \\ \alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''-\alpha''\beta'\gamma = 1. \end{cases}$$

Ma, per l'uopo nostro, un'altra bisogna aggiungerne un po'più nascosta, la quale si può dedurre dalle formule precedenti nel modo che segue.

Si ha

$$\begin{aligned} \alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 &= \alpha'\alpha''(\beta''\beta+\gamma''\gamma)(\beta\beta'+\gamma\gamma') \\ &= \alpha'\alpha''\beta'\beta''\cdot\beta^2+\alpha'\alpha''\gamma'\gamma''\cdot\gamma^2+\alpha'\beta''\gamma\cdot\alpha''\beta\gamma'+\alpha'\beta\gamma''\cdot\alpha''\beta'\gamma. \end{aligned}$$

Da questa formula se ne ricavano due altre, alternando tra loro le lettere $\alpha$ e $\beta$, e le lettere $\alpha$ e $\gamma$. Sommiamo le tre formule cosi ottenute; poi facciamo uso della formula

$$\alpha^2\alpha'\alpha''(\beta'\beta''+\gamma'\gamma'') = -\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2,$$

e delle due simili: otterremo finalmente

$$5.\quad \begin{cases} 2[\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2] \\ =\alpha'\beta''\gamma\cdot\alpha''\beta\gamma'+\alpha''\beta\gamma'\cdot\alpha\beta'\gamma''+\alpha\beta'\gamma''\cdot\alpha'\beta''\gamma \\ +\alpha'\beta\gamma''\cdot\alpha''\beta'\gamma+\alpha''\beta'\gamma\cdot\alpha\beta''\gamma'+\alpha\beta''\gamma'\cdot\alpha'\beta\gamma''. \end{cases}$$

Designerò questa quantità ne'calcoli seguenti colla lettera $I$. La quantità $I$ non cangiando di valore, allorchè si alternano simultaneamente tra loro le quantità

$$\alpha' \text{ e } \beta, \quad \alpha'' \text{ e } \gamma, \quad \beta'' \text{ e } \gamma',$$

si deduce dalla formula (5.) quest'altra notabile

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

## III.

Sostituendo le formule (3.) nell'equazione

$$6.\quad Gpp+G'p'p'+G''p''p''=Axx+Byy+Czz+2Dyz+2Ezx+2Fxy,$$

trovasi

$$7.\quad \begin{cases} A = G\alpha\alpha+G'\alpha'\alpha'+G''\alpha''\alpha'', \\ B = G\beta\beta+G'\beta'\beta'+G''\beta''\beta'', \\ C = G\gamma\gamma+G'\gamma'\gamma'+G''\gamma''\gamma'', \\ D = G\beta\gamma+G'\beta'\gamma'+G''\beta''\gamma'', \\ E = G\gamma\alpha+G'\gamma'\alpha'+G''\gamma''\alpha'', \\ F = G\alpha\beta+G'\alpha'\beta'+G''\alpha''\beta''. \end{cases}$$

Questi valori, sostituiti nelle formule (2.), forniscono le seguenti

$$8.\quad \begin{cases} A' = G'G''\alpha\alpha+G''G\alpha'\alpha'+GG'\alpha''\alpha'', \\ B' = G'G''\beta\beta+G''G\beta'\beta'+GG'\beta''\beta'', \\ C' = G'G''\gamma\gamma+G''G\gamma'\gamma'+GG'\gamma''\gamma'', \\ D' = G'G''\beta\gamma+G''G\beta'\gamma'+GG'\beta''\gamma'', \\ E' = G'G''\gamma\alpha+G''G\gamma'\alpha'+GG'\gamma''\alpha'', \\ F' = G'G''\alpha\beta+G''G\alpha'\beta'+GG'\alpha''\beta''. \end{cases}$$

Combinando i due sistemi di formule (7.) e (8.), e ponendo, per maggior brevità,

$$9.\quad \begin{cases} G(G'^2-G''^2)=m, \quad G'(G''^2-G^2)=m', \quad G''(G^2-G'^2)=m'', \\ (G'-G'')(G''-G)(G-G')=m+m'+m''=M, \end{cases}$$

trovansi le nuove formule seguenti

$$10.\quad \begin{cases} FE'-EF' = M\alpha\alpha'\alpha''; \\ AD'-DA' = m(\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\beta\beta')+m'(\alpha''\gamma\gamma'-\alpha\beta'\beta'')+m''(\alpha\gamma'\gamma''-\alpha'\beta''\beta), \\ BD'-DB' = m\cdot\alpha\beta'\beta''+m'\cdot\alpha'\beta''\beta+m''\cdot\alpha''\beta\beta', \\ DC'-CD' = m\cdot\alpha\gamma'\gamma''+m'\cdot\alpha'\gamma''\gamma+m''\cdot\alpha''\gamma\gamma', \\ BC'-CB' = m\alpha(\beta'\gamma''+\beta''\gamma')+m'\alpha'(\beta''\gamma+\beta\gamma'')+m''\alpha''(\beta\gamma'+\beta'\gamma). \end{cases}$$

Per ottenere la seconda di queste cinque formule, bisogna operare qualche riduzione mercè della formula

$$\alpha'^2\beta''\gamma''-\alpha''^2\beta'\gamma' = \alpha'\gamma''(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')-\alpha''\beta'(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'') = \alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\beta\beta',$$

e delle sue simili.

Dalla seconda, terza e quarta delle formule (10.) può dedursi il valore della quantità

$$BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA').$$

In questo valore, i termini moltiplicati per $m$, sono

$$\alpha\beta'\beta''+2\alpha''\beta\beta'-\alpha\gamma'\gamma''-2\alpha'\gamma''\gamma,$$

i quali, aggiungendo la quantità evanescente

$$\alpha'\beta''\beta-\alpha''\beta\beta'+\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\gamma\gamma' = \beta\gamma-\gamma\beta,$$

diventano i seguenti

$$\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'-(\alpha\gamma'\gamma''+\alpha'\gamma''\gamma+\alpha''\gamma\gamma').$$

Questo coëfficiente di $m$, restando inalterato se gli accenti 0, 1, 2, si mutano rispettivamente negli accenti 1, 2, 0, *) si vede che le quantità $m'$ ed $m''$ avranno il medesimo coëfficiente. Da qui la formula rimarchevole

$$11.\quad BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA') = M[\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'-\alpha\gamma'\gamma''-\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\gamma\gamma'].$$

Se coll'ultima delle formule (10.) sommiamo le due altre che da essa si derivano per analogia, si troverà che ciascuna delle tre quantità $m$, $m'$, $m''$, è moltiplicata pel medesimo coëfficiente, e che però si ha quest'altra formula rimarchevole

$$BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA' = M[\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'+\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta'\gamma].$$

---

*) Le lettere senza accento ovvèro cogli accenti ', " si dicono avere gli accenti 0, 1, 2.

Formate le formule analoghe alla prima delle formule (10.) e le tre altre analoghe alla formula (11.), ecco i valori delle radici de'sette quadrati, riportati di sopra:

$$12.\quad \begin{cases} M_1 = FE' - EF'' = M\cdot\alpha\alpha'\alpha'', \\ M_2 = DF' - FD' = M\cdot\beta\beta'\beta'', \\ M_3 = ED' - DE' = M\cdot\gamma\gamma'\gamma', \\ M_4 = BD' - DB' + CD' - DC' - 2(AD' - DA') \\ \quad = M(\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' - \alpha\gamma'\gamma'' - \alpha'\gamma''\gamma - \alpha''\gamma\gamma'), \\ M_5 = CE' - EC' + AE' - EA' - 2(BE' - EB') \\ \quad = M(\beta\gamma'\gamma'' + \beta'\gamma''\gamma + \beta''\gamma\gamma' - \beta\alpha'\alpha'' - \beta'\alpha''\alpha - \beta''\alpha\alpha'), \\ M_6 = AF' - FA' + BF' - FB' - 2(CF' - FC') \\ \quad = M(\gamma\alpha'\alpha'' + \gamma'\alpha''\alpha + \gamma''\alpha\alpha' - \gamma\beta'\beta'' - \gamma'\beta''\beta - \gamma''\beta\beta'), \\ M_7 = BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA' \\ \quad = M(\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' + \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta'\gamma. \end{cases}$$

Si vede che il valore di ciascuna delle sette quantità è uguale al prodotto della quantità

$$M = (G' - G'')(G'' - G)(G - G')$$

e di una funzione de'nove coëfficienti della sostituzione, ossia di una funzione degli angoli onde i tre assi primitivi declinano da' tre assi principali.

## IV.

Formiamo il quadrato della quantità $M_4$. Essendo

$$\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' + \alpha\gamma'\gamma'' + \alpha'\gamma''\gamma + \alpha''\gamma\gamma' = -3\alpha\alpha'\alpha'',$$

si avrà

$$M_4^2 = 9M^2\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 - 4M^2[\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta'][\alpha\gamma'\gamma'' + \alpha'\gamma''\gamma + \alpha''\gamma\gamma'].$$

Sviluppando il prodotto, troviamo, prima le tre quantità

$$\alpha^2\beta'\beta''\gamma'\gamma'' + \alpha'^2\beta''\beta\gamma''\gamma + \alpha''^2\beta\beta'\gamma\gamma',$$

e poi la somma di sei altre designata, nel n°. II. per $\Gamma$. Dunque

$$M_4^2 = M^2(9\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 - 4\Gamma) - 4M^2(\alpha^2\beta'\beta''\gamma'\gamma'' + \alpha'^2\beta''\beta\gamma''\gamma + \alpha''^2\beta\beta'\gamma\gamma').$$

Similmente trovasi

$$M_5^2 = M^2(9\beta^2\beta'^2\beta''^2 - 4\Gamma) - 4M^2(\beta^2\gamma'\gamma''\alpha'\alpha'' + \beta'^2\gamma''\gamma\alpha''\alpha + \beta''^2\gamma\gamma'\alpha\alpha'),$$
$$M_6^2 = M^2(9\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 - 4\Gamma) - 4M^2(\gamma^2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' + \gamma'^2\alpha''\alpha\beta''\beta + \gamma''^2\alpha\alpha'\beta\beta').$$

Sommando i tre quadrati $M_4^2$, $M_5^2$, $M_6^2$, rammentiamo la formula (5.)

$$\Gamma = 2(\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2),$$

ed osserviamo che la somma de'nove termini moltiplicati per $-4M^2$, è uguale al prodotto

$$-4M^2(\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma')(\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta'\gamma),$$

e però alla quantità

$$M^2-M_7^2;$$

otteremo

$$M_4^2+M_5^2+M_6^2 = -15(M_1^2+M_2^2+M_3^2)+M^2-M_7^2;$$

e quindi finalmente la formula

$$M^2 = 15(M_1^2+M_2^2+M_3^2)+M_4^2+M_5^2+M_6^2+M_7^2,$$

la quale è la medesima che la (1.) proposta di sopra.

Roma, 7 marzo 1844.

# 7.

# Neues Theorem der analytischen Mechanik.

(Aus den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838.)

In einer Abhandlung von *Enke* im Berliner Jahrbuch für 1837 „über die speciellen Störungen" findet man die partiellen Differentialquotienten der Werthe, welche in der Theorie der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers für seine Coordinaten $x$, $y$, $z$ und die Componenten seiner Geschwindigkeit $x'$, $y'$, $z'$ erhalten werden. Die Elemente, in Bezug auf welche an dem angeführten Orte die partiellen Differentialquotienten genommen werden, sind $a$ die halbe grofse Achse, $\varepsilon$ der Werth der mittleren Anomalie für $t = 0$, $e$ die Excentricität der Ellipse, $\omega$ der Winkel zwischen dem Perihel und aufsteigenden Knoten, $\Omega$ der aufsteigende Knoten der Ebene der Bahn mit der Ebene der $xy$, $i$ die Neigung der Ebene der Bahn gegen dieselbe Coordinaten-Ebene. Da die Anzahl der partiell zu differentiirenden Ausdrücke, so wie die Anzahl der Gröfsen, nach welchen jeder differentiirt wird, *sechs* beträgt, so wird man im Ganzen 36 solcher partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ etc. haben, welche S. 305 und S. 309 der erwähnten Abhandlung übersichtlich zusammengestellt sind. Diese 36 Ausdrücke werden gebraucht, um die Coëfficienten der *Lagrange*schen Störungsformeln zu bilden, in welchen die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction $\Omega$, in Bezug auf die Elemente $a$, $\varepsilon$ etc. genommen, durch die Differentiale der gestörten Elemente $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. ausgedrückt werden. Man kann hieraus umgekehrt die Ausdrücke der Gröfsen $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. durch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$ etc. ableiten. Aber *Poisson* hat Störungsformeln gegeben, durch welche man direct diese Ausdrücke findet. Um in diesen letzteren Störungsformeln die Coëfficienten zu bestimmen, hat man die *sechs* Integralgleichungen der elliptischen Bewegung nach den Gröfsen $a$, $\varepsilon$ etc. aufzulösen, so dafs diese Gröfsen Functionen von $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ und von $t$ werden, und dann diese Functionen nach $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ partiell zu differentiiren. Man wird auf diese Weise wieder 36 Ausdrücke

$\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$ etc. erhalten, aus welchen die Coëfficienten der *Poisson*schen Formeln zusammengesetzt sind.

Statt der Gröfsen $a$, $\varepsilon$ etc. kann man beliebige, aber von einander unabhängige, sechs Combinationen derselben als Elemente einführen. Hat die Zahl $k$ dieselbe Bedeutung wie in der angeführten Abhandlung, d. h. ist $k^2$ die Gröfse der anziehenden Kraft für die Einheit der Distanz, so will ich statt $a$ die Gröfse $\frac{k^2}{2a}$, statt $\varepsilon$ die Zeit des Periheliums $= -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon$, statt $e$ die Quadratwurzel des halben Parameters, mit $k$ multiplicirt, oder die Gröfse $k\sqrt{(a(1-e^2))}$, statt $i$ die Gröfse $k\sqrt{p}.\cos i$ als Elemente einführen. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2a} &= \alpha, & k\sqrt{p} &= \beta, & k\sqrt{p}\cdot\cos i &= \gamma, \\ -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon &= \alpha', & \omega &= \beta', & \Omega &= \gamma', \end{aligned}$$

so wird man leicht aus den Ausdrücken $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ etc. die partiellen Differentialquotienten von $x$, $y$, $z$, $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$, in Bezug auf $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ genommen, oder die 36 Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ etc. ableiten können. Ebenso wird man, wenn die Ausdrücke $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ etc. bekannt sind, daraus leicht die 36 Ausdrücke $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ etc. finden. Aber wenn man diese neuen, nur wenig modificirten, Elemente wählt, und die partiellen Differentialquotienten der letztern Art mit den partiellen Differentialquotienten der erstern Art vergleicht, so wird man den merkwürdigen Satz finden, ***daſs die 36 partiellen Differentialquotienten*** $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ ***etc. den 36 partiellen Differentialquotienten*** $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ ***etc. gleich oder von ihnen nur durch das Zeichen verschieden sind. In der That hat man:***

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \alpha'}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \beta} &= -\frac{\partial \beta'}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \gamma} &= -\frac{\partial \gamma'}{\partial x'}, \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha'} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \beta'} &= \frac{\partial \beta}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \gamma'} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x'}, \\ \frac{\partial x'}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \alpha'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial \beta} &= \frac{\partial \beta'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \gamma'}{\partial x}, \\ \frac{\partial x'}{\partial \alpha'} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{d\beta'} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial \gamma'} &= -\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \end{aligned}$$

***und ganz ähnliche Formeln, wenn man y und z für x setzt.*** Da $\alpha'$ die Zeit des Periheliums ist, so kommen in den Integralgleichungen der elliptischen Bewegung die Gröfsen $t$ und $\alpha'$ nur in der Verbindung $t-\alpha'$ vor; man hat ferner zufolge des Satzes von der lebendigen Kraft:

$$\alpha = \frac{k^2}{2a} = \frac{k^2}{\sqrt{(xx+yy+zz)}} - \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z').$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{dx'}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-k^2 x}{(xx+yy+zz)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus man sieht, dafs die Gleichung $\frac{dx'}{d\alpha'} = -\frac{d\alpha}{dx}$ und die ähnlichen in Bezug auf $y$ und $x$ die ***Differentialgleichungen des Problems*** selber sind, die also nur besondere Formeln aus einem Systeme ***ganz ähnlicher*** sind, die aus den Integralgleichungen abgeleitet werden können. Es giebt eine unendliche Menge Systeme von Elementen, die man für $\alpha$, $\beta$ etc. wählen kann, für welche die obigen Formeln ebenfalls gelten; alle diese Systeme können aus einer allgemeinen Formel gefunden werden.

Ich habe das Beispiel der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers gewählt, weil in diesem das Theorem durch die bekannten Formeln ohne Schwierigkeit verificirt werden kann. Aber es ist das für dieses Beispiel aufgestellte Theorem nur ein besonderer Fall eines allgemeinen, welches für alle Probleme der Mechanik gilt, in welchen das Princip der Erhaltung der Summe der lebendigen Kräfte Statt findet, und auch aufserdem für den Fall, in welchem die Kräftefunction aufser den Coordinaten noch die Zeit $t$ ***explicite*** enthält, wenn man nämlich in den ***Lagrange***'schen Formeln der Dynamik ***Kräftefunction*** diejenige Function nennt, deren partielle Differentialquotienten, in Bezug auf die rechtwinklichten Coordinaten der Puncte des Systems genommen, die auf diese Puncte in der Richtung der Coordinatenachsen wirkenden Kräfte geben. Nach einer allgemeinen Formel, welche eine willkürliche Function involvirt, kann man immer solche Systeme von Elementen finden, für die mit den obigen ganz analoge Formeln gelten. Auch führt eine besondere Methode der Integration, welche ich an einem andern Orte mittheilen werde, schon von selber auf solches System Elemente. Wenn das System materieller Puncte ganz frei ist, so werden in allen mechanischen Problemen von der bezeichneten Gattung die dem Werthe $t=0$ entsprechenden Werthe der Coordinaten und der nach den Coordinaten-

Achsen zerlegten Geschwindigkeiten der materiellen Puncte ein derartiges System Elemente. Wenn zwischen den $n$ Puncten irgend welche Verbindungen Statt finden, welche durch $3n-m$ Bedingungsgleichungen gegeben seien, so kann man die Position der Puncte immer durch $m$ von einander unabhängige Gröfsen $q_1, q_2, \ldots q_m$ bestimmen. Setzt man $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$ und drückt die halbe Summe der lebendigen Kräfte $T$ durch $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$ aus, so werden ein System Elemente der genannten Art die dem $t=0$ entsprechenden Werthe der Gröfsen $q_1, q_2 \ldots q_m$ und der Gröfsen

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial T}{\partial q_m'}.$$

Nennt man diese Anfangswerthe $q_1^0, q_2^0, \ldots q_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_m^0$, so hat man immer:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_z^0} = -\frac{\partial p_z^0}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_z^0} = \frac{\partial q_z^0}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial q_z^0} = \frac{\partial p_z^0}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_z^0} = -\frac{\partial q_z^0}{\partial q_i},$$

in welchen Formeln jeder der beiden Indices $i$ und $z$ alle Werthe $1, 2 \ldots m$ annehmen kann. Die partiellen Differentialquotienten links vom Gleichheitszeichen setzen voraus, dafs man in die Integralgleichungen des Problems die Gröfsen $q_i^0$ und $p_i^0$ als die willkürlichen Constanten eingeführt und diese Gleichungen dann nach den Gröfsen $q_i$ und $p_i$ aufgelöst hat, so dafs jede derselben eine Function von $t$ und von den $2m$ Gröfsen $q_i^0$, $p_i^0$ wird. Umgekehrt setzen die partiellen Differentialquotienten rechts vom Gleichheitszeichen voraus, dafs man die Integralgleichungen nach den Gröfsen $q_i^0$, $p_i^0$ aufgelöst hat, so dafs jede dieser Gröfsen eine Function der Zeit $t$ und der $2m$ Gröfsen $q_i$ und $p_i$ wird. Man sieht leicht, dafs man die letztern Ausdrücke aus den erstern blofs dadurch erhalten kann, dafs man $q_i$ und $q_i^0$, $p_i$ und $p_i^0$ mit einander vertauscht und $-t$ statt $t$ setzt.

Für jedes System von Elementen, welches die im Vorigen erwähnte Eigenschaft besitzt, erhalten die Störungsformeln eine möglichst einfache Gestalt, indem das Differential jedes gestörten Elements einem einzigen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction gleich wird, dessen Coëfficient nur $+1$ oder $-1$ ist, wie dies für die Elemente $q_i^0$, $p_i^0$ bekannt ist.

Königsberg, den 21. Nov. 1838.

# 8.

# Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung.

## 1.

Es sei $R$ eine gegebne ganze Function von $x$ vom $2n$ten Grade,

$$1. \quad R = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \alpha_3 x^{2n-2} \ldots + 1;$$

$V$ eine ganze Function von $x$ vom $n$ten Grade, in welcher man den Coëfficient von $x^n$ der Einheit gleich setze; ferner $a$ eine Constante und

$$2. \quad xV^2 - a^2R = f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2n+1}) = x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} \ldots + a_{2n+1}.$$

Die in $V$ vorkommenden Coëfficienten und die Gröfse $a$ betrachte man als unabhängige Veränderliche, während dagegen die Coëfficienten der Function $R$ unverändert bleiben sollen. Zwischen den ebenfalls veränderlichen $2n+1$ Wurzeln der Gleichung (2.) folgen dann aus dem Abelschen Theorem $n$ transcendente Gleichungen, wodurch $n$ Wurzeln als Functionen der übrigen $n+1$ bestimmt werden. Wenn nämlich $m$ einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annimmt und man die Zeichen der Wurzelgröfse unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, so wird

$$3. \quad \int \frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots + \int \frac{x_{2n+1}^m dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = 0.$$

Die Anfangs- und Endgränzen der Integrale sind die beiden Systeme der Wurzeln zweier Gleichungen von der Form (2.), in denen sich $a$ und die Coëfficienten von $V$ verändert haben, während die Function $R$ ungeändert geblieben ist.

Entwickelt man den Ausdruck

$$4. \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{(xR)}} \log \frac{\sqrt{(x)}.V + a\sqrt{R}}{\sqrt{(x)}.V - a\sqrt{R}}$$

nach den absteigenden Potenzen von $x$,

$$5. \quad \Delta = \frac{\Delta_0}{x^{n+1}} + \frac{\Delta_1}{x^{n+2}} + \frac{\Delta_2}{x^{n+3}} \text{ etc.},$$

so findet *Abel* ferner für die Werthe von $m$, welche $\geqq n$ sind,

$$6.\quad \int\frac{x_1^{n+i}dx_1}{\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{x_2^{n+i}dx_2}{\sqrt{(x_2R(x_2))}}\ldots.+\int\frac{x_{2n+1}^{n+i}dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1}R(x_{2n+1}))}}=A_i.$$

Um die Entwicklungscoëfficienten $A_i$ durch die Coëfficienten von $f(x)$ oder die Gröfsen $x_1$, $x_2$ etc. und durch die gegebnen Coëfficienten von $R$ darzustellen, setze ich für $\sqrt{(x)}\cdot V$ vermöge (2.) den Ausdruck $\sqrt{(f(x)+a^2R)}$, wodurch man

$$7.\quad A=\frac{1}{\sqrt{(xR)}}\log\frac{\sqrt{(f(x)+a^2R)}+a\sqrt{R}}{\sqrt{(f(x)+a^2R)}-a\sqrt{R}}$$

erhält. Setzt man $y=\frac{a\sqrt{R}}{\sqrt{f(x)}}$, so wird

$$\sqrt{(xR)}A=\log\frac{\sqrt{(1+y^2)}+y}{\sqrt{(1+y^2)}-y}=2\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}}$$
$$=2y-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4\cdot5}y^5-\frac{3\cdot5}{4\cdot6\cdot7}y^7+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8\cdot9}y^9-\ldots.$$

und daher

$$8.\quad A=\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^a\frac{\partial a}{\sqrt{\{f(x)+a^2R\}}}=\frac{2a}{\sqrt{(xf(x))}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3R}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^3}}+\frac{3}{4\cdot5}\cdot\frac{a^5R^2}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^5}}\text{ etc.}$$

Aus dieser Formel kann man zur Bestimmung von $A_i$ folgende leichte Regel ableiten.

„*Man entwickle den Ausdruck* $(1+b_1z+b_2z^2\ldots.+b_{2n+1}z^{2n+1})^{-\frac{1}{2}}$ *nach*
„*den aufsteigenden Potenzen von* $z$, *setze in dem Coëfficienten von*
„$z^i$ *für* $b_1$, $b_2$ *etc. die Gröfsen* $a_1+\alpha_1$, $a_2+\alpha_2$ *etc., entwickle alle*
„*Producte und Potenzen dieser Binome und multiplicire jeden Term,*
„*der den Factor* $\alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\ldots.$ *enthält, noch mit* $\frac{a^{2(\mu_1+\mu_2\ldots.)+1}}{2(\mu_1+\mu_2\ldots.)+1}$, *so*
„*wird der Ausdruck, welchen man erhält, der Werth von* $\frac{1}{2}A_i$."

Auf diese Weise findet man

$$9.\quad\begin{cases}\frac{1}{2}A_0=a,\\ \frac{1}{2}A_1=-\frac{1}{2}(a_1a+\frac{1}{3}\alpha_1a^3),\\ \frac{1}{2}A_2=-\frac{1}{2}(a_2a+\frac{1}{3}\alpha_2a^3)+\frac{3}{2\cdot4}\left(a_1^2a+2a_1\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}\right),\\ \frac{1}{2}A_3=-\frac{1}{2}(a_3a+\frac{1}{3}\alpha_3a^3)+\frac{3}{4}\left(a_1a_2\cdot a+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\frac{a^3}{3}+\alpha_1\alpha_2\frac{a^5}{5}\right)\\ \qquad\qquad-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(a_1^3\cdot a+3a_1^2\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+3a_1\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}+\alpha_1^3\cdot\frac{a^7}{7}\right),\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Man hat in diesen Formeln die auf $a_{2n+1}$ und $\alpha_{2n+1}$ folgenden Gröfsen $=0$ und $\alpha_{2n+1}=1$ zu setzen. Da man aus (2.) den Werth

$$10. \quad a = \sqrt{(-a_{2n+1})} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots . x_{2n+1})}$$

findet, so giebt die erste der Formeln (9.) die einfache Gleichung

$$11. \int \frac{x_1^n dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^n dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{x_{2n+1}^n dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = 2\sqrt{(x_1 x_2 \ldots . x_{2n+1})},$$

welche für $n = 1$, wenn man die Zeichen der Quadratwurzeln unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, auf die bekannte Additionsformel der zweiten Gattung der elliptischen Functionen zurückkommt.

Man erhält dieselben Formeln (9.) für den allgemeineren Fall, wenn man noch einen Werth $x_{2n+2}$ hinzunimmt und wieder

$$12. \quad \int \frac{x_1^{n+i} dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^{n+i} dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{x_{2n+2}^{n+i} dx_{2n+2}}{\sqrt{(x_{2n+2} R(x_{2n+2}))}} = A_i$$

setzt. Die Gröfsen $a$, $a_1$, .... $a_{2n+2}$ werden dann durch die Gleichung

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_{2n+2}) = x^{2n+2} + a_1 x^{2n+1} + a_2 x^{2n+1} \ldots . + a_{2n+2}$$

bestimmt; der Ausdruck, dessen $(-\frac{1}{2})$te Potenz zu entwickeln ist, wird $1 + b_1 y + b_2 y^2 \ldots . + b_{2n+2} y^{2n+2}$. In den Formeln (9.), welche man aus der Entwicklung dieses Ausdrucks nach der oben angegebnen Regel ableitet, hat man die auf $a_{2n+2}$ und $\alpha_{2n+1}$ folgenden Gröfsen $a_{2n+3}$, $\alpha_{2n+2}$ etc. $= 0$ und wieder $\alpha_{2n+1} = 1$ zu setzen. Die Gröfse $a$ wird hier aber durch keine so einfache Formel wie (10.) bestimmt. Die Zahl dieser Gröfsen $a$, mit deren Hülfe man die Gröfsen $A_i$ rational durch die Werthe $x_1$, $x_2$ etc. darstellen kann, vermehrt sich bei demselben $R$ immer um eine, wenn die Zahl der Integrale, welche das Aggregat (6.) bilden, um zwei zunimmt.

Ich bemerke noch, dafs man für $A$ statt des Ausdrucks (4.) eigentlich die Differenz zweier solcher Ausdrücke zu setzen hätte, welche den beiden Systemen der Anfangs- und Endgränzen der Integrale entsprechen. Es reicht aber hin in (6.) eines der Integrale und in (12.) zwei der Integrale von $x = 0$ an beginnen zu lassen, und auch in dem allgemeineren Falle, wenn man ein Aggregat von $2n + m$ Integralen betrachtet, $m$ Integrale von der Gränze 0 an zu nehmen, weil dann immer die abzuziehende Function $A$ verschwindet.

## 2.

Nach *Abel* findet man für die dritte Gattung

$$13. \int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{dx_2}{(\alpha - x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = A(\alpha),$$

wenn $A(\alpha)$ den Werth der oben (4.) definirten Function $A(x)$ für $x=\alpha$ bedeutet. Dieser Werth $A(\alpha)$ kann, wie ich im Folgenden zeigen will, durch Einführung von Gröfsen, welche von neuen transcendenten Gleichungen abhängen, eine merkwürdige Form annehmen, welche für $n=1$ das bekannte Additionstheorem der dritten Gattung der elliptischen Integrale giebt.

Man kann die Function $n$ten Grades $\frac{V}{a}$ dadurch bestimmen, dafs sie vermöge (2.) für $x = x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$ dieselben Werthe wie die gegebne Function $\sqrt{\frac{R}{x}}$ annimmt. Man bestimme jetzt zwei andre ganze Functionen von $x$ vom $(n+1)$ten Grade, $Y$ und $Z$, durch die Bedingung, dafs jede von ihnen für die Werthe $x=x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$ dieselben Werthe wie $\frac{xV}{a}$ oder wie $\sqrt{(xR(x))}$ annehmen, und aufserdem noch für $x=\alpha$ die Function $Y$ den Werth $+\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$, die Function $Z$ den Werth $-\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$ erhalten soll. Da zufolge dieser Annahme $\frac{x}{a}V-Y$ und $\frac{x}{a}V-Z$ für die Werthe $x = x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$ verschwinden müssen, so erhält man diese Functionen $Y$ und $Z$ sogleich durch die Formeln

$$14. \quad \begin{cases} Y = \frac{x}{a}.V - r.\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots.(\alpha-x_{n+1})}, \\ Z = \frac{x}{a}.V - s.\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots.(\alpha-x_{n+1})}, \end{cases}$$

wenn man wegen der letzten Bedingung die Constanten $r$ und $s$ durch die Gleichungen

$$15. \quad r = \frac{\alpha}{a}V(\alpha) - \sqrt{(\alpha R(\alpha))}, \qquad s = \frac{\alpha}{a}V(\alpha) + \sqrt{(\alpha R(\alpha))}$$

bestimmt. Hier ist $V(\alpha)$ der Werth von $V$ für $x=\alpha$ und daher zufolge (4.)

$$16. \quad A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}} \log \frac{s}{r}.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen müssen die beiden Ausdrücke $(2n+2)$ter Ordnung $Y^2-xR$, $Z^2-xR$ durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})(x-\alpha)$$

theilbar sein. Man setze daher

$$17. \quad \begin{cases} Y^2 - xR = \\ r_1(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-y_1)(x-y_2)\ldots.(x-y_n), \\ Z^2 - xR = \\ s_1(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-z_1)(x-z_2)\ldots.(x-z_n). \end{cases}$$

Da die Function $xR$ weder einen constanten Term enthält noch die Potenz $x^{2n+2}$, welche die höchste Potenz von $x$ ist, welche in den Ausdrücken (17.) vorkommt, so wird man, wenn man respective in den Functionen $Y$ und $Z$ den Coëfficient von $x^{n+1}$ durch den constanten Term dividirt, die Quotienten

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n+1} . \alpha y_1 y_2 \ldots y_n)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (x_1 x_2 \ldots x_{n+1} . \alpha z_1 z_1 \ldots z_n)^{-\frac{1}{2}}$$

erhalten. Die Werthe dieser Quotienten kann man aber auch anderseits aus den Gleichungen (14.) entnehmen, wenn man bemerkt, dafs in $\frac{x}{a} V$ der Coëfficient von $x^{n+1}$ den Werth $\frac{1}{a}$ hat und der constante Term $=0$ ist. Durch Vergleichung der beiden Werthe, welche man auf diese Weise für jeden dieser Quotienten erhält, findet man, wenn man dieselben noch mit $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ multiplicirt,

$$18. \quad \begin{cases} (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots y_n}} = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots (\alpha - x_{n+1}) \frac{1}{ar} - 1, \\ (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots z_n}} = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots (\alpha - x_{n+1}) \frac{1}{as} - 1, \end{cases}$$

woraus

$$19. \quad \frac{s}{r} = \frac{\sqrt{\alpha}\, V(\alpha) + \alpha \sqrt{R(\alpha)}}{\sqrt{\alpha}\, V(\alpha) - \alpha \sqrt{R(\alpha)}} = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots y_n}}}{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots z_n}}}$$

folgt. Hieraus erhält man vermöge (13.) und (16.)

$$20. \quad \mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}} \log \frac{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha y_1 y_4 \ldots y_n}}}{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots z_n}}} =$$

$$\int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{dx_2}{(\alpha - x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}}.$$

Die in der vorstehenden Formel vorkommenden Hülfsgröfsen $y_1$, $y_2$ etc.; $z_1$, $z_2$ etc., welche aus $x_1$, $x_2$, .... $x_{n+1}$, $\alpha$ vermittelst der Gleichungen (17.) bestimmt werden, kann man aber auch nach dem *Abel*schen Theorem durch transcendente Gleichungen definiren und erhält dann, wenn man noch $w_1, w_2, \ldots w_n$ für $x_{n+2}$, $x_{n+3}$, .... $x_{2n+1}$ schreibt, und die diesen Variabeln entsprechenden Integrale mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, folgendes Theorem.

### Theorem.

*„Aus $n+2$ gegebnen Gröfsen $x_1$, $x_2$, .... $x_{n+1}$, $\alpha$ bestimme man drei Systeme von $n$ Gröfsen $w_1$, $w_2$, .... $w_n$; $y_1$, $y_2$, .... $y_n$;*

$z_2, z_2, \ldots z_n$ ***durch die drei Systemen von n transcendenten Gleichungen,***

$$\int\frac{w_1^m dw_1}{\sqrt{(w_1 R(w_1))}}+\int\frac{w_2^m dw_2}{\sqrt{(w_2 R(w_2))}}\cdots+\int\frac{w_n^m dw_n}{\sqrt{(w_n R(w_n))}}$$
$$=\int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m dx_{n+1}}{\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}},$$

$$\int\frac{y_1^m dy_1}{\sqrt{(y_1 R(y_1))}}+\int\frac{y_2^m dy_2}{\sqrt{(y_2 R(y_2))}}\cdots+\int\frac{y_n^m dy_n}{\sqrt{(y_n R(y_n))}}$$
$$=\int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m dx_{n+1}^m}{\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}}+\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

$$\int\frac{z_1^m dz_1}{\sqrt{(z_1 R(z_1))}}+\int\frac{z_2^m dz_2}{\sqrt{(z_2 R(z_2))}}\cdots+\int\frac{z_n^m dz_n}{\sqrt{(z_n R(z_n))}}$$
$$=\int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m dx_{n+1}}{\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}}-\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

***in welchen*** $R(x)$ ***eine gegebne Function von*** $x$ ***vom*** $2n^{ten}$ ***Grade bedeutet und in jeden der n Werthe*** $0, 1, 2, \ldots u-1$ ***annehmen kann. Man erhält dann zwischen den Integralen dritter Gattung folgende Gleichung:***

$$\int\frac{dw_1}{(\alpha-w_1)\sqrt{(w_1 R(w_1))}}+\int\frac{dw_2}{(\alpha-w_2)\sqrt{(w_2 R(w_2))}}\cdots+\int\frac{dw_n}{(\alpha-w_n)\sqrt{(w_n R(w_n))}}=$$
$$\int\frac{dx_1}{(\alpha-x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{dx_2}{(\alpha-x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{dx_{n+1}}{(\alpha-x_{n+1})\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}}\log\frac{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1 x_2\ldots x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2\ldots y_n}}}{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1 x_2\ldots x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2\ldots z_n}}}.$$

Man sieht aus diesem Theorem, dafs die Additionsformel für die dritte Gattung der *Abel*schen Integrale dieselbe Form wie bei den elliptischen Integralen annimmt. Auch in diesem Theorem, so wie in der Formel (13.), mufs man im Allgemeinen von dem logarithmischen Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen einen ähnlichen, den Anfangsgränzen der Integrale entsprechenden, abziehn. Aber es reicht hin, eines der Integrale von $x=0$ an zu nehmen, weil in diesem Falle der Anfangswerth von $a$ und mithin auch der Anfangswerth von $A(\alpha)$ verschwindet.

Berlin, den 25. August 1845.

# 9.

# Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function.

## 1.

Die *Lagrangesche* Interpolationsformel, welche dazu dient, eine Reihe von $n$ Werthen durch eine *ganze* Function $(n-1)$ten Grades darzustellen, ist von *Cauchy* durch eine Formel verallgemeinert worden, welche eine Reihe von $n+m$ Werthen durch eine *gebrochne* Function darstellt, deren Zähler und Nenner respective vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade sind, und welche sich für $m=0$ auf die *Lagrangesche* Function selber reducirt. Sind $u_0$, $u_1$ etc. die Werthe, welche die gebrochne Function $u$ annehmen soll, wenn $x$ die Werthe $x_0$, $x_1$ etc. erhält, so ist der von *Cauchy* für $u$ gegebne Ausdruck (*Analyse algèbr.* S. 528),

$$u = \frac{u_0 u_1 \ldots u_m \cdot \dfrac{(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\ldots(x-x_{m+n-1})}{(x_0-x_{m+1})\ldots(x_0-x_{m+n-1})\times\ldots\times(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_{m+n-1})} + \text{etc.}}{u_0 u_1 \ldots u_{m-1} \cdot \dfrac{(x_0-x)(x_1-x)\ldots(x_{m-1}-x)}{(x_0-x_m)\ldots(x_0-x_{m+n-1})\times\ldots\times(x_{m-1}-x_m)\ldots(x_{m-1}-x_{m+n-1})} + \text{etc.}}.$$

Aus dem hingeschriebnen Term des Zählers und Nenners bildet man leicht alle übrigen, indem man im Zähler statt 0, 1, .... $m$ beliebige $m+1$ und im Nenner statt 0, 1, .... $m-1$ beliebige $m$ von den Indices 0, 1, 2, .... $m+n-1$ setzt. Man kann diese Formel dadurch deduciren, dafs man die lineären Gleichungen, von welchen die Aufgabe abhängt, auflöst, und die Determinanten, welche man für den Zähler und Nenner von $u$ findet, entwickelt. Aber die unentwickelten Determinanten, durch welche man auf mannichfache Art den Zähler und Nenner von $u$ darstellen kann, werden bisweilen mit gröfserem Vortheil angewandt werden, und ich will diese verschiednen Darstellungsweisen um so eher mittheilen, als die Darstellung gegebner Werthe durch gebrochne rationale Functionen in der Theorie der *Abelschen* Transcendenten von so grofser Wichtigkeit ist.

Es sei die gesuchte Function $u = \frac{N(x)}{D(x)}$, wo $N(x)$ und $D(x)$ die ganzen Functionen vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade bedeuten, welche ihren Zähler und Nenner bilden sollen, so hat man aus den $m+n$ lineären Gleichungen

$$N(x_0) = u_0 D(x_0), \quad N(x_1) = u_1 D(x_1), \quad \text{etc.}$$

die Verhältnisse der $m+n+1$ Coëfficienten von $N(x)$ und $D(x)$ zu bestimmen, wodurch man diese Functionen selbst, abgesehn von einem gemeinschaftlichen constanten Factor, erhält. Man kann aber auch aus diesen Gleichungen zuerst die $n$ Coëfficienten von $N(x)$ eliminiren und dann die Verhältnisse der $m+1$ Coëfficienten von $D(x)$ aus den nach der Elimination erhaltnen Gleichungen bestimmen. Hiezu setze man

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m+n-1}), \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

und bilde für die ganzen positiven Werthe von $p$, welche $\leqq m-1$ sind, die Gleichungen

$$\Sigma \frac{x_i^p N(x_i)}{f'(x_i)} = \Sigma \frac{u_i x_i^p D(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Dehnt man für jeden der Werthe von $p$ diese Summen über alle $m+n$ Werthe von $x_i$ aus, so verschwinden nach der bekannten Theorie der Partialbrüche die Summen linker Hand vom Gleichheitszeichen, und man erhält die $m$ Gleichungen,

$$1. \quad \Sigma \frac{u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \quad \Sigma \frac{x_i u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \quad \ldots. \quad \Sigma \frac{x_i^{m-1} u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0.$$

Diese $m$ Gleichungen enthalten jetzt nur noch die $m+1$ Coëfficienten der Function $D(x)$ als Unbekannte, deren Verhältnisse aus ihnen zu bestimmen sind.

Setzt man

$$\frac{x_0^p \cdot u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p \cdot u_1}{f'(x_1)} \ldots. + \frac{x_{m+n-1}^p \cdot u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})} = v_p,$$

und den Nenner

$$D(x) = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots. + \alpha_m x^m,$$

so werden die $m$ Gleichungen (1.):

$$2. \quad \begin{cases} v_0 \cdot \alpha + v_1 \cdot \alpha_1 + v_2 \cdot \alpha_2 \ldots. + v_m \cdot \alpha_m = 0, \\ v_1 \cdot \alpha + v_2 \cdot \alpha_1 + v_3 \cdot \alpha_2 \ldots. + v_{m+1} \cdot \alpha_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{m-1} \cdot \alpha + v_m \cdot \alpha_1 + v_{m+1} \cdot \alpha_2 \ldots. + v_{2m-1} \cdot \alpha_m = 0, \end{cases}$$

in welchen die Coëfficienten $v$ gegebne Gröfsen sind. Substituirt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Verhältnisse der Unbekannten $\alpha, \alpha_1, \ldots. \alpha_m$ in den Ausdruck $\alpha + \alpha_1 x \ldots. + \alpha_m x^m$, *so erhält man, abgesehn von einem constanten Factor,* $D(x)$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$3. \quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \ldots. & x^m \\ v_0 & v_1 & v_2 & \ldots. & v_m \\ v_1 & v_2 & v_3 & \ldots. & v_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m-1} & v_m & v_{m+1} & \ldots. & v_{2m-1}. \end{cases}$$

Setzt man den constanten Factor $=1$, so erhält man für $m=1$,

$$D(x) = v_1 - v_0 x,$$

für $m=2$,

$$D(x) = v_1 v_3 - v_2^2 + (v_1 v_2 - v_0 v_3)x + (v_0 v_2 - v_1^2)x^2,$$

für $m=3$,

$$\begin{aligned} D(x) = \quad & v_1 v_3 v_5 + 2 v_2 v_3 v_4 - v_1 v_4^2 - v_2^2 v_5 - v_3^3 \\ & + (v_1 v_2 v_5 + v_0 v_4^2 + v_2 v_3^2 - v_0 v_3 v_5 - v_1 v_3 v_4 - v_2^2 v_4) x \\ & + (v_0 v_2 v_5 + v_1 v_2 v_4 + v_1 v_3^2 - v_0 v_3 v_4 - v_1^2 v_5 - v_2^2 v_3) x^2 \\ & + (v_0 v_3^2 + v_1^2 v_4 + v_2^3 - v_0 v_2 v_4 - 2 v_1 v_2 v_3) x^3, \end{aligned}$$

u. s. w.

Der constante Term wird aus dem Coëfficienten der höchsten Potenz $x^m$ erhalten, wenn man sämmtliche Indices um 1 erhöht und, wenn $m$ ungerade ist, alle Zeichen ändert. Allgemeiner erhält man den Coëfficient von $x^k$ aus dem Coëfficienten von $x^{m-k}$, wenn man sämmtliche Indices von $2m-1$ abzieht und, wenn $m$ ungerade ist, alle Zeichen ändert.

Man kann für die Function $D(x)$ durch folgende Betrachtungen eine einfachere Form finden. Wenn in dem Schema der Gröfsen, aus welchen eine Determinante gebildet wird, $a_k^{(i)}$ die in der $(i+1)$ten Horizontalreihe und $(k+1)$ten Verticalreihe befindliche Gröfse bedeutet, so ändert sich nach einem bekannten Satze die Determinante nicht, wenn man für jedes $a_1^{(i)}$ setzt $a_1^{(i)} - \lambda a_0^{(i)}$, für jedes $a_2^{(i)}$ setzt $a_2^{(i)} - \lambda_1 a_1^{(i)} - \mu_1 a_0^{(i)}$, u. s. w., wo $\lambda$, $\lambda_1$, $\mu_1$ etc. beliebige, von $i$ unabhängige, Constanten bedeuten; oder, wie ich der Kürze wegen sagen will, die aus einem Systeme Gröfsen gebildete Determinante ändert sich nicht, wenn man von jeder Verticalreihe die vorhergehenden, mit beliebigen Constanten multiplicirt, abzieht. Das Gleiche gilt in Bezug auf die Horizontalreihen des Schemas der Gröfsen, aus denen man die Determinante bildet. Wenn man von jeder Verticalreihe blofs die unmittelbar vorhergehende, mit derselben Gröfse $x$ multiplicirt, abzieht, so erhält man hieraus den allgemeinen Satz, *dafs die Determinanten der Gröfsen*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ a^{(0)} & a' & a'' & \ldots & a^{(p)} \\ a_1^{(0)} & a_1' & a_1'' & \ldots & a_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^{(0)} & a_{p-1}' & a_{p-1}'' & \ldots & a_{p-1}^{(p)} \end{array}$$

*und der Gröfsen*

$$\begin{array}{llll} a' - a^{(0)}x & a'' - a'x & \ldots. & a^{(p)} - a^{(p-1)}x \\ a_1' - a_1^{(0)}x & a_1'' - a_1'x & \ldots. & a_1^{(p)} - a_1^{(p-1)}x \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ a_{p-1}' - a_{p-1}^{(0)}x & a_{p-1}'' - a_{p-1}'x & \ldots. & a_{p-1}^{(p)} - a_{p-1}^{(p-1)}x \end{array}$$

***einander gleich sind.*** Transformirt man auf diese Weise die Gröfsen (3.), so erhält man, wenn

$$w_p = v_{p+1} - x v_p$$

gesetzt wird, folgenden Satz:

„***Es sei***

$$\frac{x_0^p(x_0 - x)u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p(x_1 - x)u_1}{f'(x_1)} \ldots. + \frac{x_{m+n-1}^p(x_{m+n-1} - x)u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})} = w_p,$$

***so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen***

$$4. \quad \begin{cases} w_0 & w_1 & \ldots. & w_{m-1} \\ w_1 & w_2 & \ldots. & w_m \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ w_{m-1} & w_m & \ldots. & w_{2m-2}. \end{cases}$$"

Man erhält nach diesem Satz, wenn man wieder den constanten Factor $= 1$ setzt, für $m = 1$,

$$D(x) = w_0,$$

für $m = 2$,

$$D(x) = w_0 w_2 - w_1^2,$$

für $m = 3$,

$$D(x) = w_0 w_2 w_4 + 2 w_1 w_2 w_3 - w_0 w_3^2 - w_1^2 w_4 - w_2^3,$$

u. s. w.

Die ***Cauchysche*** Formel giebt für den Nenner einen Ausdruck, welcher aus $\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots.(n+1)}{1 \cdot 2 \ldots. m}$ Gliedern besteht. Nehmen wir an, was bei dieser Untersuchung verstattet ist, dafs der Nenner nicht von höherm Grade als der Zähler ist, so wird $n \geqq m+1$, und daher die Zahl der Terme der ***Cauchyschen*** Formel gröfser oder so grofs als die Zahl $\frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots.(m+2)}{1 \cdot 2 \ldots. m}$, welche, so lange $m \geqq 7$, die Zahl der Terme der oben aus den Gröfsen $w$ gebildeten Determinante, durch welche $D(x)$ dargestellt worden ist, übertrifft.

Wenn die Symmetrie der Formeln in Bezug auf die $m+n$ Werthe von $x$ und $u$ nicht berücksichtigt wird, so kann man die Gröfsen, aus denen die

Determinante gebildet wird, durch eine neue Transformation vereinfachen. Man setze nämlich in (4.) statt der zweiten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_1 - x_0 w_0, \quad w_2 - x_0 w_1, \quad \ldots \quad w_m - x_0 w_{m-1},$$

statt der dritten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_2 - (x_0 + x_1) w_1 + x_0 x_1 w_0, \quad w_3 - (x_0 + x_1) w_2 + x_0 x_1 w_1, \quad \text{u. s. w.},$$

statt der vierten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_3 - (x_0 + x_1 + x_2) w_2 + (x_1 x_2 + x_2 x_0 + x_0 x_1) w_1 - x_0 x_1 x_2 w_0, \text{ u. s. w. u. s. w.},$$

so erhält man folgenden Satz:

„*Es sei*

$$f_i(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{m+n-1}),$$

*ferner*

$$\frac{x_i^p (x_i - x) \cdot u_i}{f_i'(x_i)} + \frac{x_{i+1}^p (x_{i+1} - x) \cdot u_{i+1}}{f_i'(x_{i+1})} \ldots + \frac{x_{m+n-1}^p (x_{m+n-1} - x) \cdot u_{m+n-1}}{f_i'(x_{m+n-1})} = U_p^{(i)},$$

*so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, die Determinante der Gröfsen*

$$5. \quad \begin{cases} U_0^{(0)} & U_0' & \ldots & U_0^{(m-1)} \\ U_1^{(0)} & U_1' & \ldots & U_1^{(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{m-1}^{(0)} & U_{m-1}' & \ldots & U_{m-1}^{(m-1)} \end{cases}$$

."

In diesem Theorem sind $U_0^{(0)}$, $U_1^{(0)}$, .... $U_{m-1}^{(0)}$ dieselben Gröfsen wie $w_0$, $w_1$, .... $w_{m-1}$.

Man erhält noch eine weitre Vereinfachung, wenn man auf ähnliche Art die Horizontalreihen der Gröfsen (5.) transformirt. Man setze nämlich statt der zweiten Horizontalreihe dieser Gröfsen die folgende:

$$U_1^{(0)} - x_{m-1} U_0^{(0)}, \quad U_1' - x_{m-1} U_0', \quad \ldots \quad U_1^{(m-1)} - x_{m-1} U_0^{(m-1)},$$

statt der dritten die folgende:

$$U_2^{(0)} - (x_{m-1} + x_m) U_1^{(0)} + x_{m-1} x_m U_0^{(0)}, \quad U_2' - (x_{m-1} + x_m) U_1' + x_{m-1} x_m U_0', \text{ etc.}$$

u. s. f.; so bleibt wieder der Werth der Determinante unverändert, und man erhält jetzt folgendes Theorem:

„*Es sei*

$$f_{i,k}(x) =$$

$$(x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{m-2})(x - x_{m-1+k})(x - x_{m+k}) \ldots (x - x_{m+n-1}),$$

*ferner*

$$\frac{(x_i-x)u_i}{f'_{i,k}(x_i)}+\frac{(x_{i+1}-x)u_{i+1}}{f'_{i,k}(x_{i+1})}\cdots+\frac{(x_{m-2}-x)u_{m-2}}{f'_{i,k}(x_{m-2})}$$
$$+\frac{(x_{m-1+k}-x)u_{m-1+k}}{f'_{i,k}(x_{m-1+k})}+\frac{(x_{m+k}-x)u_{m+k}}{f'_{i,k}(x_{m+k})}\cdots+\frac{(x_{m+n-1}-x)u_{m+n-1}}{f'_{i,k}(x_{m+n-1})}$$
$$=V_k^{(i)},$$

***so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen***

$$6.\quad \begin{cases} V_0^{(0)} & V_0' & \cdots & V_0^{(m-1)} \\ V_1^{(0)} & V_1' & \cdots & V_1^{(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{m-1}^{(0)} & V_{m-1}' & \cdots & V_{m-1}^{(m-1)}. \end{cases}$$

Hier sind $V_0^{(0)}, V_0', \ldots V_0^{(m-1)}$ dieselben Gröfsen wie $U_0^{(0)}, U_0', \ldots U_0^{(m-1)}$, und daher $V_0^{(0)}=w_0$, welche Gröfse allein unverändert geblieben ist.

Transformirt man auf ähnliche Art die letzten $m$ Horizontalreihen der Gröfsen (3.), so erhält man folgenden Satz:

*„Es sei*

$$\frac{x_i^p u_i}{f'(x_i)}+\frac{x_{i+1}^p u_{i+1}}{f'(x_{i+1})}\cdots+\frac{x_{m+n-1}^p u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})}=W_p^{(i)},$$

*wo wieder*

$$f_i(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{m+n-1}),$$

***so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, die Determinante der Gröfsen***

$$7.\quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \cdots & x^m \\ W_0^{(0)} & W_1^{(0)} & & \cdots & W_m^{(0)} \\ W_0' & W_1' & & \cdots & W_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_0^{(m-1)} & W_1^{(m-1)} & & \cdots & W_m^{(m-1)}. \end{cases}$$

Transformirt man aber auf ähnliche Art die Verticalreihen der Gröfsen (3.), so erhält man den Satz, *dafs $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich wird der Determinante der Gröfsen*

$$8.\quad \begin{cases} 1 & x-x_0 & (x-x_0)(x-x_1) & \cdots & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1}) \\ W_0^{(0)} & W_0' & W_0'' & \cdots & W_0^{(m)} \\ W_1^{(0)} & W_1' & W_1'' & \cdots & W_1^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{m-1}^{(0)} & W_{m-1}' & W_{m-1}'' & \cdots & W_{m-1}^{(m)}. \end{cases}$$

Endlich kann man wieder die $m$ letzten Horizontalreihen dieser Gröfsen transformiren, und erhält dann den folgenden Satz:

„*Setzt man*

$$X_k^{(i)} = \frac{u_i}{F'_{i,k}(x_i)} + \frac{u_{i+1}}{F'_{i,k}(x_{i+1})} \cdots + \frac{u_{m-1}}{F'_{i,k}(x_{m-1})}$$
$$+ \frac{u_{m+k}}{F'_{i,k}(x_{m+k})} + \frac{u_{m+k+1}}{F'_{i,k}(x_{m+k+1})} \cdots + \frac{u_{m+n-1}}{F'_{i,k}(x_{m+n-1})},$$

*wo wieder*

$$F_{i,k}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1}) \ldots (x-x_{m-1})$$
$$(x-x_{m+k})(x-x_{m+k+1}) \ldots (x-x_{m+n-1}),$$

*so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen*

$$9. \quad \begin{cases} 1 & x-x_0 & (x-x_0)(x-x_1) & \ldots. & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1}) \\ X_0^{(0)} & X_0' & X_0'' & \ldots. & X_0^{(m)} \\ X_1^{(0)} & X_1' & X_1'' & \ldots. & X_1^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{m-1}^{(0)} & X_{m-1}' & X_{m-1}'' & \ldots. & X_{m-1}^{(m)}. \end{cases}$$

"

Aus diesen beiden letzten Theoremen erhält man eine nach den Gröfsen $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ etc. geordnete Darstellung der Function $D(x)$.

## 2.

Man kann auch sogleich dem System der $m$ Gleichungen (1.) selber solche verschiedne Formen geben, die unmittelbar auf die verschiednen für $D(x)$ gefundnen Determinante führen. Man erhält nämlich verschiedne Formen des Systems der $m$ Gleichungen (1.) durch die Betrachtung, dafs die Gleichung

$$\Sigma \frac{x_i^p u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = \Sigma \frac{x_i^p N(x_i)}{f'(x_i)} = 0$$

nur erfordert, dafs $f(x)$ den Grad $n+p$ übersteige. Es ist daher nicht nöthig, für $f(x)$ das Product von allen $m+n$ Factoren $x-x_i$ anzunehmen, sondern man wird immer Gleichungen von der vorstehenden Form erhalten können, wofern nur die Zahl dieser Factoren die Zahl $n$ übertrifft, wobei aber jedesmal wenn $n+k+1$ die Zahl der Factoren von $f(x)$ ist, der Exponent $p$ nur einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots. k$ annehmen darf. Die Summation mufs in allen diesen Fällen nur auf solche Werthe von $x_i$ ausgedehnt werden, welche in den lineären

Factoren $x - x_i$ vorkommen, die man zur Bildung der Function $f(x)$ ausgewählt hat, oder solche, für welche $f(x_i) = 0$ wird, was man überall im Folgenden zum richtigen Verständnifs der Summenzeichen festzuhalten hat. Die verschiednen Annahmen, die man hiernach für $f(x)$ machen kann, ergeben eine sehr grofse Menge Gleichungen von der Form

$$10. \qquad \Sigma \frac{x_i^p u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0,$$

welche sämmtlich in Bezug auf die Coëfficienten von $D(x)$ lineär sind, und von denen $m$ von einander unabhängige die Verhältnisse dieser Coëfficienten und mithin die Function $D(x)$ selbst, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmen. Alle diese Gleichungen lassen sich aus den $m$ Gleichungen (1.) ableiten und es werden daher alle Systeme von $m$ von einander unabhängigen Gleichungen (10.) nur verschiedne Formen desselben Systems (1.) sein, welchen wiederum verschiedne Formen der Gröfsen, aus welchen man die der Function $D(x)$ proportionale Determinante zu bilden hat, entsprechen werden. Ich will jetzt die zwei hauptsächlichsten dieser Formen näher angeben.

1°. Man bilde $m$ Gleichungen (10.), indem man für $f(x)$ immer nur das Product aus $n+1$ Factoren und daher $p = 0$ setzt, von den $n+1$ Factoren ferner $n$ unverändert läfst, während man für die $(n+1)$ten immer einen andern aus den $m$ übrigen Factoren nimmt. Es sei

$$\Psi(x) = (x - x_m)(x - x_{m+1}) \ldots (x - x_{m+n-1}), \qquad \frac{u_k}{\Psi'(x_k)} = s_k,$$

$$\frac{s_m x_m^p}{x_m - x_i} + \frac{s_{m+1} x_{m+1}^p}{x_{m+1} - x_i} \ldots + \frac{s_{m+n-1} x_{m+n-1}^p}{x_{m+n-1} - x_i} + \frac{u_i x_i^p}{\Psi'(x_i)} = t_p^{(i)},$$

so erhält man auf diese Weise, wenn man $f(x) = \Psi(x)(x - x_i)$ und für $i$ nach und nach die Indices 0, 1, .... $m-1$ setzt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha + x \cdot \alpha_1 \ldots + x^m \cdot \alpha_m &= D(x), \\
t_0^{(i)} \cdot \alpha + t_1^{(i)} \cdot \alpha_1 \ldots + t_m^{(i)} \cdot \alpha_m &= 0, \\
t_0' \cdot \alpha + t_1' \cdot \alpha_1 \ldots + t_m' \cdot \alpha_m &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
t_0^{(m-1)} \cdot \alpha + t_1^{(m-1)} \cdot \alpha_1 \ldots + t_m^{(m-1)} \cdot \alpha_m &= 0,
\end{aligned}$$

*und daher*

$$\frac{1}{\alpha} (\Sigma \pm t_1^{(i)} t_2' \ldots t_m^{(m-1)}) . D(x)$$

*gleich der Determinante der Gröfsen*

$$11. \quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \ldots. & x^m \\ t_0^{(0)} & t_1^{(0)} & t_2^{(0)} & \ldots. & t_m^{(0)} \\ t_0' & t_1' & t_2' & \ldots. & t_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_0^{(m-1)} & t_1^{(m-1)} & t_2^{(m-1)} & \ldots. & t_m^{(m-1)}. \end{cases}$$

2°. Setzt man für $f(x)$ nach und nach

$$\Psi(x).(x-x_{m-1})$$
$$\Psi(x).(x-x_{m-1})(x-x_{m-2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi(x).(x-x_{m-1})(x-x_{m-2})\ldots.(x-x_0),$$

und immer $p=0$, so erhält man aus (10.) $m$ Gleichungen, welche für $D(x)$ die aus den Gröfsen (7.) gebildete Determinante ergeben.

Andre Formen der lineären Gleichungen, durch welche die Function $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmt wird, und daher auch andre Formen der Elemente der dieser Function proportionalen Determinante erhält man, wenn man $D(x)$ auf andre Arten als nach den Potenzen von $x$ entwickelt.

Es sei z. B.

$$12. \quad D(x) = \delta_0 + \delta_1(x-x_0) + \delta_2(x-x_0)(x-x_1) \ldots. + \delta_m(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m-1}),$$

wo $\delta_0$, $\delta_1$ etc. constante Coëfficienten bedeuten, so findet man,

3°. wenn man den Ausdruck (12.) in die $m$ Gleichungen (1.) substituirt, in welchen $f(x)$ das aus allen $m+n$ Factoren gebildete Product bedeutet, $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen (8.).

4°. Wenn man aus der Gleichung (10.) $m$ Gleichungen bildet, indem man immer $p=0$ und für $f(x)$ zuerst das vollständige Product aus allen $m+n$ Factoren setzt, dann aber nach und nach die Factoren

$$x-x_m, \quad (x-x_m)(x-x_{m-1}), \quad \ldots. \quad (x-x_m)(x-x_{m+1})\ldots.(x-x_{2m-2})$$

fortläfst, und substituirt man in diesen $m$ Gleichungen für $D(x)$ seinen Ausdruck (12.), so erhält man $D(x)$ der Determinante der Gröfsen (9.) proportional.

Wenn man $D(x)$ durch den Ausdruck (12.) darstellt, so wird man im Allgemeinen für die Coëfficienten der Unbekannten $\delta_0$, $\delta_1$ etc. in den $m$ Gleichungen vereinfachte Ausdrücke dadurch erhalten, dafs man für $f(x)$ das Product

aus den $m$ Factoren $x-x_0$, $x-x_1$, .... $x-x_{m-1}$ und aus $n-m+1$ oder einer gröfsern Zahl andern setzt, welche man beliebig aus den $n$ übrigen Factoren $x-x_m$, $x-x_{m+1}$, .... $x-x_{m+n-1}$ auswählen kann. Es werden nämlich in dem Aggregate, welches den Coëfficient von $\delta_i$ bildet, immer die in $u_0$, $u_1$, .... $u_{i-1}$ multiplicirten Terme verschwinden, und in jedem andern, in $u_k$ multiplicirten, Term wird sich der Factor

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{i-1})$$

fortheben.

Man kann aber auch statt der constanten Coëfficienten von $D(x)$ Functionen von $x$ als die Unbekannten der lineären Gleichungen, durch welche man $D(x)$ bestimmen will, einführen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

5°. Es sei

$$\begin{aligned} D &= \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3\ldots.+\quad \alpha_m x^m,\\ D_1 &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2\ldots\ldots\ldots+\quad \alpha_m x^{m-1},\\ D_2 &= \alpha_2+\alpha_3 x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m x^{m-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D_{m-1} &= \alpha_{m-1}+\alpha_m x, \qquad D_m=\alpha_m, \end{aligned}$$

woraus

$$\alpha=D-xD_1,\quad \alpha_1=D_1-xD_2,\quad \ldots.\quad \alpha_{m-1}=D_{m-1}-xD_m,\quad \alpha_m=D_m,$$

und daher

$$13.\qquad D(x_i)=D+(x_i-x)D_1+x_i(x_i-x)D_2\ldots.+x_i^{m-1}(x_i-x)D_m$$

folgt. Setzt man

$$\Sigma\frac{x_i^p(x_i-x)u_i}{f'(x_i)}=w_p,\qquad \Sigma\frac{x_i^p u_i}{f'(x_i)}=r_p,$$

so erhält man durch Substitution des Ausdrucks (13.) in (10.), wenn $f(x)$ vom $(n+1+p)$ten oder einem höhern Grade angenommen wird,

$$14.\qquad 0=r_pD+w_pD_1+w_{p+1}D_2\ldots.+w_{p+m-1}D_m.$$

Nimmt man beliebige $m$ von einander unabhängige Gleichungen (14.), so hat man $m$ lineäre Gleichungen zwischen den Unbekannten $D, D_1, \ldots. D_m$, aus denen man ihre Verhältnisse bestimmen kann. Die $m+1$ partiellen Determinanten*), welche auf diese Weise den Functionen $D, D_1, D_2, \ldots. D_m$ proportional ge-

*) Wenn man mehr Verticalreihen als Horizontalreihen oder mehr Horizontalreihen als Verticalreihen hat, so nenne ich die Determinanten, welche dadurch, dafs man eine gleiche Zahl Horizontal- und Verticalreihen mit einander combinirt, erhalten werden, *partielle Determinanten*.

funden werden, müssen mit ihnen respective von demselben Grade sein. Denn da alle Gröfsen $w$ in den Gleichungen (17.) lineäre Functionen von $x$ und nur die Gröfsen $v$ constant sind, so sind die den Unbekannten $D$ und $D_1$ proportionalen Determinanten eben so wie diese selbst Functionen von $x$ vom $m$ten und $(m-1)$ten Grade. Da ferner in unsrer Untersuchung $\alpha$ einen beliebigen Werth annehmen kann, so werden im Allgemeinen $D$ und $D_1$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Wenn aber zwei ganze Functionen $D$ und $D_1$, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, zweien anderen ganzen Functionen $E$ und $E_1$ proportional und $D$ und $E$ von demselben Grade sind, so mufs $\frac{D}{E} = \frac{D_1}{E_1}$ eine Constante sein *). Es werden daher die Functionen $D$, $D_1$, $D_2$, .... $D_m$ aus den partiellen Determinanten, denen sie vermöge der $m$ Gleichungen (14.) proportional gefunden werden, durch Multiplication mit einer Constante erhalten und daher mit ihnen von demselben Grade sein. Es folgt hieraus, dafs sich in den Determinanten, welche den Functionen $D_2$, $D_3$, .... $D_m$ proportional sind und deren einzelne Terme alle auf den $(m-1)$ten Grad steigen, respective die höchste, die beiden höchsten etc. oder endlich alle Potenzen von $x$ fortheben müssen.

Nimmt man für $f(x)$ die vollständige Function vom $(m+n)$ten Grade und giebt, wie es für diesen Fall verstattet ist, dem Exponenten $p$ die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$, so ergiebt sich aus den so erhaltnen $m$ Gleichungen das Resultat, dafs $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, der aus den Gröfsen (4.) gebildeten Determinante gleich ist. Nimmt man zu den Gröfsen (4.) noch aus (3.) die Gröfsen $v_0, v_1, \ldots v_{m-1}$ als $(m+1)$te Verticalreihe hinzu, so sieht man, dafs die übrigen partiellen Determinanten den Functionen niedreren Grades $D_1, D_2, \ldots D_m$ proportional werden.

6°. Ich will jetzt als Unbekannte die ganzen Functionen von $x$ annehmen, welche man, wenn man $D(x)$ hintereinander durch $x-x_0$, $x-x_1$, $x-x_2$, .... $x-x_{m-1}$ dividirt, successive als Quotienten erhält. Man findet die hierauf bezüglichen Formeln durch folgende Betrachtungen.

Das 5te Lemma des 3ten Buchs der *Newtonschen Principia* enthält bekanntlich folgenden Satz. *„Wenn* $y_0, y_1, y_2$ *etc. die Werthe einer Func-*

*) Wenn nämlich $DE_1 - D_1E = 0$, so mufs für alle Werthe von $x$, für welche $D$ verschwindet, auch $E$ verschwinden, weil $D$ und $D_1$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben; sind daher $D$ und $E$ von demselben Grade, so können sie nur durch einen constanten Factor verschieden sein.

*tion $y$ sind, welche den Werthen $x_0$, $x_1$, $x_2$ etc. der Variable $x$ entsprechen, und man*

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=y'_0,\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=y'_1,\quad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=y'_2 \text{ etc.},$$
$$\frac{y'_1-y'_0}{x_2-x_0}=y''_0,\quad \frac{y'_2-y'_1}{x_3-x_1}=y''_1,\quad \frac{y'_3-y'_2}{x_4-x_2}=y''_2 \text{ etc.},$$
$$\frac{y''_1-y''_0}{x_3-x_0}=y'''_0,\quad \frac{y''_2-y''_1}{x_4-x_1}=y'''_1,\quad \frac{y''_3-y''_2}{x_5-x_2}=y'''_2 \text{ etc.}$$

*setzt, so wird*

$$y=y_0+y'_0(x-x_0)+y''_0(x-x_0)(x-x_1)+y'''_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \text{ etc.}$$

Ist $y$ eine ganze rationale Function der $p$ten Ordnung, so erhält man den vollständigen Ausdruck dieser Function, wenn man ihre $p+1$ Werthe $y_0$, $y_1$, .... $y_p$ kennt und die vorstehende Reihe bis zu dem Term

$$y_0^{(p)}(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{p-1})$$

fortsetzt. Allgemein kann die Formel, wie *Newton* will, zur Interpolation benutzt werden. Die Ausdrücke von $y'_0$, $y''_0$ etc. durch die gegebnen Werthe sind

$$15.\quad \begin{cases} y'_0 = \frac{y_0}{x_0-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_0}, \\ y''_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Setzt man in diese Formeln $y=D(x)$, betrachtet ferner $D(x)$ selbst als den ersten der gegebnen Werthe, dagegen $D(x_i)$ als den gesuchten Werth, so erhält man

$$16.\ D(x_i)=D+D'(x_i-x)+D''(x_i-x)(x_i-x_0)+D'''(x_i-x)(x_i-x_0)(x_i-x_1) \ldots.+D^{(m)}(x_i-x)(x_i-x_0)\ldots.(x_i-x_{m-2}),$$

wo $D'$, $D''$, .... $D^{(m)}$ zufolge (15.) durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden,

$$D = D(x),$$
$$D' = \frac{D(x)}{x-x_0}+\frac{D(x_0)}{x_0-x},$$
$$D'' = \frac{D(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}+\frac{D(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)}+\frac{D(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)},$$
$$\text{etc.}$$

Diese Ausdrücke sind sämmtlich ganze Functionen von $x$, und man sieht aus

ihrer Zusammensetzung leicht, dafs man sie als Quotienten erhält, wenn man die erste von ihnen $D(x)$ durch die Gröfsen $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ etc. dividirt. Man kann dieselben auch successive bilden, indem $D''$ der Quotient der Division von $D'$ durch $x-x_1$, $D'''$ der Quotient der Division von $D''$ durch $x-x_2$ wird, etc. Substituirt man den Ausdruck (16.) in $m$ von einander unabhängige Gleichungen (10.), und betrachtet darin die $m+1$ Gröfsen $D$, $D'$, .... $D^{(m)}$ als Unbekannte, so kann man wieder, wie oben bei den Functionen $D$, $D_1$, $D_2$ etc., zeigen, dafs sie von den aus ihren Coëfficienten gebildeten partiellen Determinanten nur durch einen constanten Factor unterschieden sein können, und sich deshalb in den Determinanten, welche den $m-1$ Functionen $D''$, $D'''$, .... $D^{(m)}$ proportional sind, die höchste Potenz von $x$, die beiden höchsten u. s. w. oder endlich alle Potenzen von $x$ fortheben müssen.

Die Coëfficienten von $D$, $D'$ etc. in den $m$ aus (10.) erhaltnen Gleichungen vereinfachen sich, wenn $f(x)$ in (10.) den Factor $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})$ enthält. Setzt man wieder $f_i(x) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}$, so erhält man aus (10.) die Gleichung

$$17. \quad S\cdot D + S_1\cdot D' + S_2\cdot D'' \ldots + S_m\cdot D^{(m)} = 0,$$

wo

$$18. \quad S = \Sigma \frac{u_i x_i^p}{f'(x_i)}, \quad S_1 = \Sigma \frac{u_i x_i^p (x_i - x)}{f'(x_i)}, \quad S_2 = \Sigma \frac{u_i x_i^p (x_i - x)}{f_1'(x_i)}, \quad \ldots.$$

$$\ldots. \quad S_m = \Sigma \frac{u_i x_i^p (x_i - x)}{f_{m-1}'(x_i)}.$$

Nimmt man für $f(x)$ den vollständigen Ausdruck vom $(m+n)$ten Grade an und bildet die $m$ Gleichungen, indem man nach und nach in (18.) für $p$ seine Werthe 0, 1, 2, .... $m-1$ setzt, so erhält man aus denselben $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen (5.). Bildet man aber die $m$ Gleichungen, indem man in (18.) $p=0$ und für $f(x)$ nach und nach die Functionen

$$f(x), \quad \frac{f(x)}{x-x_{m-1}}, \quad \frac{f(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)}, \quad \ldots. \quad \frac{f(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)\ldots(x-x_{2m-3})}$$

setzt, deren erste wieder die vollständige Function $(m+n)$ten Grades ist, so erhält man $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, der Determinante der Gröfsen (6.) gleich. Durch ganz ähnliche Determinanten erhält man aber auch, zufolge der vorstehenden Betrachtungen, die ganzen Functionen, welche sich als die Quotienten der Division von $D(x)$ durch $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ u. s. w. ergeben.

3.

Den Zähler $N(x)$ kann man, abgesehn von einem constanten Factor, unmittelbar aus dem Nenner $D(x)$ erhalten, wenn man nur für die Gröfsen $u_0$, $u_1$ etc. ihre reciproken Werthe $\frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. setzt, und gleichzeitig $m$ und $n$ in $n-1$ und $m+1$ ändert, so dafs umgekehrt der Nenner von der Ordnung $n-1$, der Zähler von der Ordnung $m$ wird. Denn die Aufgabe, die Gröfsen $u_0$, $u_1$ etc. durch den Bruch $\frac{N(x)}{D(x)}$ darzustellen, ist dieselbe wie die Aufgabe, die Gröfsen $\frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. durch den Bruch $\frac{D(x)}{N(x)}$ darzustellen. Es bleibt dann noch übrig, den constanten Factor, mit welchem der Quotient der beiden so gefundnen Determinanten multiplicirt werden mufs, zu bestimmen, wozu einer der gegebnen Werthe des Bruchs hinreicht.

Da der Nenner als eine Determinante vom $m$ten Grade gefunden wurde, (wenn man den ***Grad der Determinante*** nach der Zahl der Horizontal- oder Verticalreihen der Gröfsen, aus denen sie gebildet ist, bestimmt,) so wird auf die angegebne Weise der Zähler als eine Determinante vom $(n-1)$ten Grade erhalten werden. Wenn daher der Grad des Zählers und Nenners sehr verschieden ist, so wird die eine Determinante von einem hohen Grade werden, während die andre von einem niedern Grade sein kann. Man wird aber aus dem Folgenden ersehen, dafs man auch immer den Zähler durch eine Determinante vom $(m+1)$ten Grade darstellen kann. Diese Darstellung wird einfacher als die obige, wenn die Grade des Zählers und Nenners um zwei oder mehr Einheiten verschieden sind und man, wie es nach der oben gemachten Bemerkung verstattet ist, die Aufgabe so stellt, dafs der Nenner vom niedrigeren Grade als der Zähler wird. Auch wird man bei dieser Darstellung der Bestimmung des hinzuzufügenden constanten Factors überhoben.

Es sei $\varphi(x)$ eine Function von $x$ vom $n$ten oder einem höhern Grade und das Product von einer entsprechenden Anzahl der lineären Factoren $x-x_0$, $x-x_1$ etc. Man hat dann durch die bekannten Formeln der Theorie der Partialbrüche,

$$-\frac{N(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{N(x_r)}{(x_r-x)\varphi'(x_r)} = \Sigma \frac{u_r D(x_r)}{(x_r-x)\varphi'(x_r)},$$

wo man unter dem Summenzeichen für $r$ alle diejenigen Indices $0, 1, 2, \ldots m+n-1$ zu setzen hat, für welche $\varphi(x_r) = 0$ wird. Setzt man für $D(x)$

wieder $\alpha+\alpha_1 x \ldots . +\alpha_m x^m$ und

$$\Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r-x)\varphi'(x_r)} = T_p,$$

so giebt die vorstehende Formel:

$$-\frac{N(x)}{\varphi(x)} = \alpha T_0+\alpha_1 T_1 \ldots . +\alpha_m T_m .$$

Wenn man daher die Gröfsen $\alpha$, $\alpha_1$ etc. den partiellen Determinanten der Gleichungen (2.) §. 1. *gleich* setzt, oder der constante Factor, mit welchem die Determinanten multiplicirt werden müssen, überall $= 1$ angenommen wird, *so wird* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$19. \quad \begin{cases} T_0 & T_1 & \ldots . & T_m \\ v_0 & v_1 & \ldots . & v_m \\ v_1 & v_2 & \ldots . & v_{m+1} \\ . & . & . & . \\ v_{m-1} & v_m & \ldots . & v_{2m-1}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen $v$ dieselben sind wie in (3.).

Transformirt man auf dieselbe Art wie zu Ende des §. 1. die $m$ letzten Horizontalreihen, so erhält man $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ gleich der Determinante der Gröfsen

$$20. \quad \begin{cases} T_0 & T_1 & \ldots . & T_m \\ W_0^{(0)} & W_1^{(0)} & \ldots . & W_m^{(0)} \\ W_0' & W_1' & \ldots . & W_m' \\ . & . & . & . \\ W_0^{(m-1)} & W_1^{(m-1)} & \ldots . & W_m^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen $W$ dieselben wie in (7.) sind.

Multiplicirt man in (19.) jede Verticalreihe mit $x$ und zieht sie von der folgenden ab, *so ergiebt sich, wenn*

$$\Sigma \frac{u_r x_r^p}{\varphi'(x_r)} = S_p$$

*gesetzt wird, die Function* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$21. \quad \begin{cases} T_0 & S_0 & S_1 & \ldots . & S_{m-1} \\ v_0 & w_0 & w_1 & \ldots . & w_{m-1} \\ v_1 & w_1 & w_2 & \ldots . & w_m \\ . & . & . & . & . \\ v_{m-1} & w_{m-1} & w_m & \ldots . & w_{2m-2}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen $w$ dieselben wie in (4.) sind. Der in dieser Determinante in $T_0$ multiplicirte Ausdruck ist der Nenner $D(x)$.

Um die Gröfsen (21.) noch weiter zu reduciren, will ich annehmen, dafs die Function $\varphi(x)$ dem Product

$$(x-x_{m-1})(x-x_m)\ldots.(x-x_{m+n-2})$$

entweder gleich sei oder dieses Product als Factor enthalte. Ferner sei

$$\varphi_k(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)\ldots.(x-x_{m+k-2})}, \qquad S_p^{(k)}=\Sigma\frac{x_r^p u_r}{\varphi_k'(x_r)},$$

wenn die Summe nur auf diejenigen Indices $r$ erstreckt wird, für welche $\varphi_k(x_r)=0$ wird. Wenn man jetzt auf die §. 1. angewandte Art sowohl die $m$ letzten Horizontalreihen als die $m$ letzten Verticalreihen der Gröfsen (21.) transformirt, *so erhält man* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$22.\quad \begin{cases} T_0 & S_0^{(0)} & S_0' & \ldots. & S_0^{(m-1)} \\ W_0^{(0)} & V_0^{(0)} & V_1^{(0)} & \ldots. & V_{m-1}^{(0)} \\ W_0' & V_0' & V_1' & \ldots. & V_{m-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_0^{(m-1)} & V_0^{(m-1)} & V_1^{(m-1)} & \ldots. & V_{m-1}^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen $V$ dieselben wie in (6.) sind.

Es sei jetzt

$$T_p^{(k)}=\Sigma\frac{x_r^p u_r}{(x_r-x)\varphi_k'(x_r)},$$

wo immer wieder die Summation nur auf diejenigen Indices $r$ sich erstreckt, für welche $\varphi_k(x_r)=0$ wird. Man hat dann die Formeln,

$$\begin{aligned}(x-x_{m-1})T_p+S_p^{(0)}&=T_p',\\ (x-x_m)T_p'+S_p'&=T_p'',\end{aligned}$$

u. s. w.

Ferner ist, wenn die Gröfsen $X_1^{(i)}$ dieselbe Bedeutung wie in (9.) haben,

$$\begin{aligned}(x-x_{m-1})W_0^{(i)}+V_0^{(i)}&=X_1^{(i)},\\ (x-x_m)X_1^{(i)}+V_1^{(i)}&=X_2^{(i)},\end{aligned}$$

u. s. w.

Wenn man die Gröfsen der ersten Verticalreihe in (22.) sämmtlich mit $x-x_{m-1}$ multiplicirt, so wird der Werth der ganzen Determinante mit derselben Gröfse multiplicirt und daher $=-\frac{N(x)}{\varphi_1(x)}$. Addirt man nach der Multiplication zu den

Gröfsen der ersten Verticalreihe respective die unveränderten Gröfsen der zweiten Verticalreihe, so wird die erste Verticalreihe

$$T_0', \quad X_1^{(v)}, \quad X_1', \quad \ldots \ldots \quad X_1^{(m-1)},$$

während sich der Werth der Determinante $-\frac{N(x)}{\varphi_1(x)}$ nicht ändert. Multiplicirt man die letztern Gröfsen mit $x - x_m$ und addirt dann respective die Gröfsen der dritten Verticalreihe, so wird die erste Verticalreihe

$$T_0'', \quad X_2^{(v)}, \quad X_2', \quad \ldots \ldots \quad X_2^{(m-1)},$$

während die Determinante $-\frac{N(x)}{\varphi_2(x)}$ wird. Fährt man so fort, so erhält man den Satz, *dafs* $-\frac{N(x)}{\varphi_m(x)}$ *gleich ist der Determinante der Gröfsen*

$$23. \quad \begin{cases} T_0^{(m)} & S_0^{(v)} & S_0' & \ldots\ldots & S_0^{(m-1)} \\ X_m^{(v)} & V_0^{(v)} & V_1^{(v)} & \ldots\ldots & V_{m-1}^{(v)} \\ X_m' & V_0' & V_1' & \ldots\ldots & V_{m-1}' \\ X_m'' & V_0'' & V_1'' & \ldots\ldots & V_{m-1}'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m^{(m-1)} & V_0^{(m-1)} & V_1^{(m-1)} & \ldots\ldots & V_{m-1}^{(m-1)}. \end{cases}$$

Transformirt man die $m$ letzten Verticalreihen in (20.) auf dieselbe Art, wie in §. 1. die Gröfsen (8.) in (9.) transformirt wurden, *so erhält man* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$24. \quad \begin{cases} T_0 & T_0' & T_0'' & \ldots\ldots & T_0^{(m)} \\ X_0^{(v)} & X_1^{(v)} & X_2^{(v)} & \ldots\ldots & X_m^{(v)} \\ X_0' & X_1' & X_2' & \ldots\ldots & X_m' \\ X_0'' & X_1'' & X_2'' & \ldots\ldots & X_m'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0^{(m-1)} & X_1^{(m-1)} & X_2^{(m-1)} & \ldots\ldots & X_m^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo nur die erste Horizontalreihe die Variable $x$ enthält.

Setzt man für $\varphi(x) = f(x)$ die vollständige Function $(n+m)$ten Grades und

$$R_p = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r - x) f'(x_r)},$$

so verwandeln sich in der ersten Horizontalreihe von (19.) die Gröfsen $T_p$ in die Gröfsen $R_p$. Man hat zwischen diesen und den Gröfsen

$$v_p = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{f'(x_r)},$$

welche die übrigen Horizontalreihen in (19.) bilden, die Gleichungen

$$xR_p + v_p = R_{p+1}.$$

Wenn man daher in (19.) für die Gröfsen $T_p$ in der ersten Horizontalreihe die Gröfsen $R_p$ setzt und dann zu der zweiten Horizontalreihe die erste, mit $x$ multiplicirt, addirt, so verwandelt sich die zweite Horizontalreihe in $R_1, R_2, \ldots R_{m+1}$; addirt man diese, mit $x$ multiplicirt, zur dritten Horizontalreihe, so verwandelt sich die dritte Horizontalreihe in $R_2, R_3, \ldots R_{m+2}$. Fährt man auf diese Weise fort, wobei der Werth der Determinante nicht geändert wird, und wählt für den Nenner $D(x)$ die Bestimmung durch die Determinante der Gröfsen (4.), so erhält man folgenden Satz.

### Theorem I.

*„Es sei*

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m+n-1}),$$

$$R_p = \frac{x_0^p u_0}{(x_0-x)f'(x_0)} + \frac{x_1^p u_1}{(x_1-x)f'(x_1)} \ldots + \frac{x_{m+n-1}^p u_{m+n-1}}{(x_{m+n-1}-x)f'(x_{m+n-1})},$$

$$w_p = \frac{x_0^p(x_0-x)u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p(x_1-x)u_1}{f'(x_1)} \ldots + \frac{x_{m+n-1}^p(x_{m+n-1}-x)u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})},$$

*so wird*

$$25. \quad -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm R_0^{(0)} R_1' \ldots R_m^{(m)}}{\Sigma \pm w_0^{(0)} w_1' \ldots w_{m-1}^{(m-1)}},$$

***wenn man nach Bildung der beiden Determinanten in jedem ihrer Terme respective $R_{\alpha+\beta}$ und $w_{\alpha+\beta}$ für $R_\alpha^{(\beta)}$ und $w_\alpha^{(\beta)}$ setzt.***"

Aus dem Ausdrucke, welchen in der ***Lagrangeschen*** Interpolationsformel der Coëfficient der höchsten Potenz der Variable erhält, bildet man nach einer einfachen Regel die gesuchte Function selbst. Sind nämlich $x_0, x_1, \ldots x_p$ die Werthe von $x$, für welche eine ganze Function $p$ten Grades die Werthe $u_0, u_1, \ldots u_p$ annehmen soll, und ist $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_p)$, so wird der Coëfficient von $x^p$ in der gesuchten Function,

$$\frac{u_0}{F'(x_0)} + \frac{u_1}{F'(x_1)} \ldots + \frac{u_p}{F'(x_p)},$$

und man erhält aus diesem Ausdrucke die gesuchte Function selbst, wenn man darin für $u_0, u_1, \ldots u_p$ respective $\frac{u_0}{x-x_0}, \frac{u_1}{x-x_1}, \ldots \frac{u_p}{x-x_p}$ setzt und mit $F(x)$ multiplicirt. Ganz dieselbe Regel gilt, wie man aus dem Theorem I. sieht, bei der Darstellung gegebner Werthe durch eine gebrochne

rationale Function für die Bildung des Zählers. Aber auch für den Nenner $D(x)$ gilt eine ähnliche noch einfachere Bildungsweise, indem man nur nöthig hat, um diese Function zu erhalten, in dem algebraischen Ausdrucke des Coëfficienten ihres höchsten, mit $x^m$ multiplicirten, Terms statt $u_0$, $u_1$ etc. respective $u_0(x-x_0)$, $u_1(x-x_1)$ etc. zu setzen. Man hat daher folgendes Theorem.

### Theorem II.

*„Wenn man eine rationale gebrochne Function von $x$, deren Nenner auf den $m^{ten}$ Grad steigt, durch die Werthe $u_0$, $u_1$, $u_2$ etc. bestimmt, welche dieselbe für die Werthe $x_0$, $x_1$, $x_2$ etc. der Variable $x$ annimmt, so werden die algebraischen Ausdrücke der Coëfficienten der höchsten Potenz von $x$ im Zähler und Nenner ganze homogene Functionen von $u_0$, $u_1$, $u_2$ etc. vom $(m+1)^{ten}$ und $m^{ten}$ Grade, und man erhält aus ihnen den Zähler und Nenner selbst, wenn man respective für $u_0$, $u_1$, $u_2$ etc. in dem einen Ausdrucke die Gröfsen*

$$\frac{u_0}{x-x_0},\quad \frac{u_1}{x-x_1},\quad \frac{u_2}{x-x_2}\quad etc.$$

*und in dem andern Ausdrucke die Gröfsen*

$$u_0(x-x_0),\quad u_1(x-x_1),\quad u_2(x-x_2)\quad etc.$$

*setzt, und hierauf den ersten Ausdruck noch mit dem Product sämmtlicher Factoren $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ etc. multiplicirt.“*

Das Theorem I. zeigt auch noch, dafs die Coëfficienten der höchsten Potenz der Variable im Zähler und im Nenner beide einem ähnlichen Bildungsgesetz unterworfen sind, in der Art, dafs dieser Coëfficient im Zähler so gebildet wird, wie der Coëfficient der höchsten Potenz von $x$ in einem Nenner, welcher auf den $(m+1)$ten Grad steigt. Man erkennt dies, so wie das Theorem II., auch mit grofser Leichtigkeit aus der von *Cauchy* gegebnen Formel.

Auf dieselbe Art wie §. 1. die Gröfsen $w$ in die Gröfsen $V$ transformirt wurden, kann man auch die Gröfsen $R$ transformiren. Setzt man wieder

$$f_{i,k}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{m-2})$$
$$\times(x-x_{m-1+k})(x-x_{m+k})\ldots(x-x_{m+n-1}),$$

ferner

$$Q_k^{(i)} = \Sigma\frac{(x_r-x)u_r}{f'_{i,k}(x_r)},$$

wo man die Summation nur auf diejenigen Indices $r$ ausdehnt, für welche

$f_{i,k}(x_r) = 0$ wird, *so erhält man*

$$26. \quad -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm Q_0^{(0)} Q_1' \ldots Q_m^{(m)}}{\Sigma \pm V_0^{(0)} V_1' \ldots V_{m-1}^{(m-1)}}.$$

Man kann in den Ausdrücken der Gröfsen $R$ und $w$ oder der Gröfsen $Q$ und $V$ überall $x - x_r$ für $x_r - x$ setzen, wenn man gleichzeitig in den Formeln (25.) und (26.) das Minuszeichen links vom Gleichheitszeichen fortläfst, da für jene Änderungen der Bruch den entgegengesetzten Werth annimmt.

## 4.

Man kann aus dem Theorem I. die von *Cauchy* angegebne Form des Bruchs $u$ auf folgende Weise ableiten. Setzt man

$$q_r = \frac{u_r(x_r - x)}{f'(x_r)} = \frac{u_r(x_r - x)}{(x_r - x_0)(x_r - x_1) \ldots (x_r - x_{m+n-1})},$$

wo im Nenner der Factor $x_r - x_r$ fortzulassen ist, so wird

$$w_p = q_0 x_0^p + q_1 x_1^p \ldots + q_{m+n-1} x_{m+n-1}^p.$$

Führt man statt $w_{\alpha+\beta}$ den allgemeineren Ausdruck

$$w_\alpha^{(\beta)} = q_0 x_0^\alpha y_0^\beta + q_1 x_1^\alpha y_1^\beta \ldots + q_{m+n-1} x_{m+n-1}^\alpha y_{m+n-1}^\beta$$

ein, so wird zufolge des Theorems I.

$$D(x) = \Sigma \pm w_0^{(0)} w_1' \ldots w_{m-1}^{(m-1)},$$

wenn man nach Bildung der Determinante überall $y_r = x_r$ setzt. Aber zufolge eines von *Cauchy* und auch von mir später bewiesenen Satzes (s. *Crelle* Journal Bd. 22. S. 308 folg.) wird die vorstehende Determinante gleich der Summe aller Gröfsen, welche sich bilden lassen, wenn man in dem Producte

$$q_0 q_1 \ldots q_{m-1} \Sigma \pm x_0^0 x_1^1 \ldots x_{m-1}^{m-1} \Sigma \pm y_0^0 y_1^1 \ldots y_{m-1}^{m-1}$$

für die untern Indices auf alle mögliche Arten je $m$ verschiedne Indices aus der Zahl der Indices $0, 1, 2, \ldots m+n-1$ setzt. Man hat aber ferner für jede solche Combination nach einer bekannten, zuerst von *Vandermonde* bemerkten Formel

$$\Sigma \pm x_0^0 x_1^1 \ldots x_{m-1}^{(m-1)} =$$
$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots (x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \ldots (x_{m-1} - x_{m-2}),$$

und es wird daher, wenn man $y_r = x_r$ setzt, in $D(x)$ jeder mit $q_0 q_1 \ldots q_{m-1}$ multiplicirte Term

$$q_0 q_1 \ldots q_{m-1} \{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots (x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \ldots (x_{m-1} - x_{m-2})\}^2$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} u_0 u_1 \ldots u_{m-1} (x_0 - x)(x_1 - x) \ldots (x_{m-1} - x)}{(x_0 - x_m)(x_0 - x_{m+1}) \ldots (x_0 - x_{m+n-1})(x_1 - x_m)(x_1 - x_{m+1}) \ldots (x_1 - x_{m+n-1}) \ldots (x_{m-1} - x_m)(x_{m-1} - x_{m+1}) \ldots (x_{m-1} - x_{m+n-1})}.$$

Der Complexus dieser Terme ist der Nenner der *Cauchyschen* Formel, mit $(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ multiplicirt. Ganz auf dieselbe Art wird aus dem im Theorem I. gegebnen Zähler der gebrochnen Function der Zähler der *Cauchyschen* Formel gefunden.

Man findet auch auf einmal den Zähler und Nenner der *Cauchyschen* Formel durch folgende Betrachtung. Es sei

$$D = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots\ldots + \alpha_m x^m, \qquad N = a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so hat man $n+m+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
D\{a + x\ a_1 \ldots\ldots + x^{n-1} a_{n-1}\} &= N\{\alpha + x\ \alpha_1 \ldots\ldots + x^m \alpha_m\}, \\
a + x_0 a_1 \ldots\ldots + x_0^{n-1} a_{n-1} &= u_0 \{\alpha + x_0 \alpha_1 \ldots\ldots + x_0^m \alpha_m\}, \\
a + x_1 a_1 \ldots\ldots + x_1^{n-1} a_{n-1} &= u_1 \{\alpha + x_1 \alpha_1 \ldots\ldots + x_1^m \alpha_m\}, \\
\ldots & \ldots \\
a + x_{m+n-1} a_1 \ldots + x_{n+m-1}^{n-1} a_{n-1} &= u_{n+m-1}\{\alpha + x_{n+m-1}\alpha_1 \ldots + x_{n+m-1}^m \alpha_m\},
\end{aligned}$$

aus welchen man die $n+m+1$ Unbekannten $a$, $a_1$ etc., $\alpha$, $\alpha_1$ etc. eliminiren kann, und dann eine Bedingungsgleichung $\nabla = 0$ erhält, in welcher $\nabla$ die aus den $n+m+1$ Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten der Unbekannten gebildete Determinante ist. Nach einer von *Laplace* gemachten Bemerkung kann jede Determinante als ein Aggregat von Producten einfacherer Determinanten dargestellt werden, wenn man die Verticalreihen in zwei Gruppen theilt und auf alle mögliche Arten immer zwei partielle Determinanten der beiden Gruppen, welche sich auf verschiedne Horizontalreihen beziehen, mit einander multiplicirt. Bei der Determinante $\nabla$ sondern sich die Verticalreihen von selbst in die beiden Gruppen der $n$ ersten und $m+1$ letzten Verticalreihen. Sondert man ferner die Terme von $\nabla$, je nachdem sie mit $D$ oder $N$ multiplicirt sind, in zwei verschiedne Aggregate, so erhält man die Bedingungsgleichung in folgender Form:

$$0 = \nabla =$$

$$\begin{aligned}
&D \cdot S(\Sigma \pm x^0 x_0^1 x_1^2 \ldots x_{n-2}^{n-1} \times u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1} \Sigma \pm x_{n-1}^0 x_n^1 \ldots x_{n+m-1}^m) \\
+\ &N \cdot S(\Sigma \pm x_0^0 x_1^1 x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1} \times u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m-1} \Sigma \pm x^0\ x_n^1 \ldots x_{n+m-1}^m).
\end{aligned}$$

Man wird hier die einzelnen Terme jeder mit $\Sigma$ bezeichneten Determinante durch Vertauschung der Exponenten erhalten, und dann die beiden Summen $S$ bilden, indem man für die Indices $0, 1, \ldots n-2$ oder $0, 1, \ldots n-1$ je $n-1$ oder $n$ aus den Indices $0, 1, 2, \ldots n+m-1$ und für die Indices $n-1, n, \ldots n+m-1$ oder $n, n+1, \ldots n+m-1$ die $m+1$ oder $m$ übrigen nimmt. Bezeichnet man mit $P(a, b, c, \ldots)$ das Product aus den Differenzen der Gröfsen $a, b, c, \ldots$, so wird die gefundne Gleichung, wenn

man nach der oben angeführten Formel die Determinanten durch die Producte der Differenzen ersetzt,

$$0 = D \cdot S(u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1} P(x, x_0, x_1, \ldots x_{n-2}) P(x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n+m-1}))$$
$$+ N \cdot S(u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m-1} P(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) P(x, x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+m-1})).$$

Die verschiednen Zeichen, mit welchen die Producte $P$ genommen werden können, müssen nach der Natur der Determinante $\nabla$ so bestimmt werden dafs, wenn man die Gröfsen $D$ und $N$ und die Gröfsen $u_0, u_1, \ldots u_{n+m-1}$ einander gleich setzt und zwei beliebige von den $m+n+1$ Gröfsen $x, x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ mit einander vertauscht, der ganze Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen den entgegengesetzten Werth annimmt. Wenn man daher diesen Ausdruck mit dem Product $P(x, x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1})$ dividirt, so mufs derselbe in Bezug auf die $m+n+1$ Gröfsen symmetrisch werden, und es werden umgekehrt, wenn dieser Quotient in Bezug auf alle Gröfsen $x, x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ symmetrisch wird, alle Zeichen so, wie es die Bedingungen der Determinantenbildung fordern, bestimmt sein. Bezeichnet man mit

$$\{(A, B, C, \ldots)(A', B', C', \ldots)\}$$

das Product aus allen Differenzen der Gröfsen $A, B, C \ldots$ von den Gröfsen $A', B', C' \ldots$, indem man immer die zweiten von den ersten abzieht,

$$\{(A, B, C, \ldots)(A', B', C', \ldots)\}$$
$$= (A-A')(A-B')(A-C')\ldots(B-A')(B-B')\ldots(C-A')\ldots,$$

so erhält man auf die angegebne Art die Gleichung

$$0 = DS \cdot \frac{u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1}}{\{(x, x_0, x_1, \ldots x_{n-2})(x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n+m-1})\}}$$
$$+ NS \cdot \frac{u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m-1}}{\{(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1})(x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+m-1}, x)\}},$$

wo der Ausdruck rechts, wie verlangt wurde, wenn $D = N$ und $u_0 = u_1 \ldots = u_{n+m-1}$, in Bezug auf alle Gröfsen $x, x_0, x_1, \ldots x_{n+m-1}$ symmetrisch ist, wenngleich sich das Summenzeichen nur auf die $m+n$ Gröfsen $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ bezieht. Entnimmt man aus dieser Gleichung den Werth von $\frac{N}{D}$ und multiplicirt Zähler und Nenner mit $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m+n-1})$, so erhält man die *Cauchysche* Formel.

## 5.

Die im Theorem I. dem Zähler und Nenner der gebrochnen Function gegebne Form kann mit besonderm Vortheil in dem Fall angewandt werden, wenn alle oder mehrere der Gröfsen $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ untereinander gleich

werden. Ist

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_r)F(x)$$

und bedeutet $\Psi(x)$ eine beliebige Function von $x$, so verwandelt sich bekanntlich, wenn

$$x_0 = x_1 \ldots. = x_r = a$$

wird, das Aggregat

$$\frac{\Psi(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{\Psi(x_1)}{f'(x_1)} \ldots. + \frac{\Psi(x_r)}{f'(x_r)}$$

in den Differentialausdruck

$$\frac{d^r.\,\Psi(a)\{F(a)\}^{-1}}{\Pi(r).da^r},$$

wo $1.2\ldots.r = \Pi(r)$. Man kann hienach sogleich die Gröfsen angeben, in welche sich in den oben aufgestellten Sätzen die verschiednen Systeme von Elementen, aus denen die Determinanten zu bilden sind, verwandeln, wenn $r+1$ von den Gröfsen $x_0$, $x_1$ etc. denselben Werth $a$ erhalten, für welchen dann die entsprechenden Werthe von $u$ und seiner $r$ ersten Differentialquotienten gegeben sein müssen.

Man nehme insbesondre an, dafs *alle* Gröfsen $x_0$, $x_1$, $x_2$, .... $x_{n+m-1}$ derselben Gröfse $a$ gleich seien, und dafs für diesen Werth von $x$ sowohl der Werth des gesuchten Bruchs als auch die Werthe seiner $n+m-1$ ersten Differentialquotienten gegeben seien. Bezeichnet man den gesuchten Bruch mit

$$\chi(x) = u,$$

so werden die verschiednen §. 1. eingeführten Gröfsen,

$$v_p = \frac{d^{m+n-1}.a^p\chi(a)}{\Pi(m+n-1)\cdot da^{m+n-1}},$$

$$w_p = \frac{d^{m+n-1}.a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-1)\cdot da^{m+n-1}},$$

$$U_p^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-1}.a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-i-1)\cdot da^{m+n-i-1}},$$

$$V_k^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-k-1}.(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-i-k-1)\cdot da^{m+n-i-k-1}},$$

$$W_p^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-1}.a^p\chi(a)}{\Pi(m+n-i-1)\cdot da^{m+n-i-1}},$$

$$X_k^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-k-1}\chi(a)}{\Pi(m+n-i-k-1)\cdot da^{m+n-i-k-1}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus §. 1. für den Fall, dafs die $m+n$ Werthe $x_0$, $x_1$ etc. einander gleich sind, *sechs* verschiedne Darstellungen des Nenners $D(x)$ durch eine Determinante.

Die §. 3. eingeführten Gröfsen werden, wenn man dort $\varphi(x)$ vom $n$ten Grade annimmt,

$$\varphi(x) = (x-a)^n, \qquad \varphi_k(x) = (x-a)^{n-k},$$

$$S_0^{(k)} = \frac{d^{n-k-1}\cdot\chi(a)}{\Pi(n-k-1)\cdot da^{n-k-1}},$$

$$T_0^{(k)} = \frac{d^{n-k-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-k-1)\cdot da^{n-k-1}},$$

$$R_p = \frac{d^{n+m}\cdot a^p(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n+m)\cdot da^{n+m}},$$

$$Q_k^{(i)} = \frac{d^{n+m-i-k-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n+m-i-k-1)\cdot da^{n+m-i-k-1}}.$$

Substituirt man diese Werthe in (19.) — (25.), so erhält man den Zähler $N(x)$ auf ***sieben*** verschiedne Arten durch eine Determinante ausgedrückt.

Es wird zweckmäfsig sein, bei Anordnung der Gröfsen, aus welchen man die Determinanten zu bilden hat, von den niedrigsten Differentialen zu beginnen, weshalb man in den betreffenden Schemas von dem entgegengesetzten Ende der Diagonale ausgehn mufs. Ich werde zugleich der Kürze halber durch $\chi_0$ und $\chi_p$ die Ausdrücke

$$\chi(a) = \chi_0, \qquad \frac{d^p\chi(a)}{\Pi(p)\cdot da^p} = \chi_p$$

bezeichnen.

Setzt man hiernach

$$D_0 = V_{m-1}^{(n-1)} = \frac{d^{n-m+1}\cdot(a-x)\chi(a)}{\Pi(n-m+1)\cdot da^{n-m+1}} = (a-x)\chi_{n-m+1} + \chi_{n-m},$$

$$D_i = \frac{d^{n-m+i+1}\cdot(a-x)\chi(a)}{\Pi(n-m+i+1)\cdot da^{n-m+i+1}} = (a-x)\chi_{n-m+i+1} + \chi_{n-m+i},$$

so ergiebt die Darstellung von $D(x)$ durch die Gröfsen (6.),

$$27. \qquad D(x) = \Sigma \pm D_0^{(\gamma)} D_1' D_2'' \ldots D_{m-1}^{(m-1)},$$

wenn man nach Bildung der Determinante überall $D_{\alpha+\beta}$ für $D_\alpha^{(\beta)}$ schreibt.

Braucht man das Schema (9.), *so erhält man $D(x)$ gleich der Determinante der Gröfsen*

$$28. \quad \begin{cases} \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \ldots & \chi_{n-1} & \chi_n \\ \chi_{n-m+1} & \chi_{n-m+2} & \ldots & \chi_n & \chi_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_{n-1} & \chi_n & \ldots & \chi_{m+n-2} & \chi_{m+n-1} \\ (x-a)^m & (x-a)^{m-1} & \ldots & x-a & 1. \end{cases}$$

Wählt man zur Bestimmung des Zählers die Gröfsen (22.), (23.) oder (24.), *so wird für den Fall der Gleichheit aller* $x_i$ *der Ausdruck* $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$29.\quad \begin{cases} D_0 & D_1 & \dots & D_{m-1} & \chi_n \\ D_1 & D_2 & \dots & D_m & \chi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{m-1} & D_m & \dots & D_{2m-2} & \chi_{n+m-1} \\ \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_{n-1} & \frac{d^{n-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}} \end{cases};$$

*oder* $-\frac{N(x)}{(x-a)^{n-m}}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$30.\quad \begin{cases} D_0 & D_1 & \dots & D_{m-1} & \chi_{n-m} \\ D_1 & D_2 & \dots & D_m & \chi_{n-m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{m-1} & D_m & \dots & D_{2m-2} & \chi_{n-1} \\ \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_{n-1} & \frac{d^{n-m-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m-1)\cdot da^{n-m-1}} \end{cases};$$

*oder wieder* $-\frac{N(a)}{(x-a)^n}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$31.\quad \begin{cases} \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_n \\ \chi_{n-m+1} & \chi_{n-m+2} & \dots & \chi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{n-1} & \chi_n & \dots & \chi_{n+m-1} \\ \frac{d^{n-m-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m-1)\cdot da^{n-m-1}} & \frac{d^{n-m}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m)\cdot da^{n-m}} & \dots & \frac{d^{n-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}} \end{cases}.$$

*Endlich erhält man aus* (26.)

$$32.\quad -\frac{1}{(x-a)^{n+m}}\cdot\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma\pm N_0^{(0)} N_1' \dots N_m^{(m)}}{\Sigma\pm D_0^{(0)} D_1' \dots D_{m-1}^{(m-1)}},$$

*wenn man nach Bildung der beiden Determinanten überall* $N_{\alpha+\beta}$ *und* $D_{\alpha+\beta}$ *für* $N_\alpha^{(\beta)}$ *und* $D_\alpha^{(\beta)}$ *schreibt und*

$$-N_i = \frac{d^{n-m+i-1}\cdot(x-a)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m+i-1)\cdot da^{n-m+i-1}}$$

$$= \frac{1}{(x-a)^{n-m+i}}\{\chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2\dots+\chi_{n-m+i-1}(x-a)^{n-m+i-1}\},$$

$$-D_i = \frac{d^{n-m+i+1}\cdot(x-a)\chi(a)}{\Pi(n-m+i+1)\cdot da^{n-m+i+1}} = (x-a)\chi_{n-m+i+1}-\chi_{n-m+i}$$

*setzt.* Man kann in diesen Formeln gleichzeitig $N$, $N_i$, $D_i$ für $-N$, $-N_i$, $-D_i$ schreiben.

In der aus den Gröfsen (30.) gebildeten Determinante ist das Aggregat der Terme, welche mit $\frac{d^{n-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}}$ multiplicirt werden, dem Nenner $D(x)$ gleich. Dieser Theil der Determinante ist der einzige, welcher entwickelt negative Potenzen von $x-a$ darbietet. Da nun aber der Bruch $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$, welchem die Determinante gleich ist, ***nur*** negative Potenzen von $x-a$ enthält, wenn man den Zähler $N(x)$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, so wird man aus diesem Theile den Werth der ganzen Determinante oder den Bruch $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ selbst erhalten, wenn man nach geschehner Entwicklung alle positiven Potenzen von $x-a$ fortwirft. Multiplicirt man mit $(x-a)^n$, so folgt hieraus, ***dafs man den Zähler $N(x)$ erhält, wenn man den Nenner $D(x)$ nach den Potenzen von $x-a$ entwickelt, ihn mit***

$$(x-a)^n\frac{d^{n-1}\cdot(x-a)^{-1}\chi(a)}{1.2....(n-1)\cdot da^{n-1}}=\chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2....+\chi_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

***multiplicirt und nur diejenigen Potenzen von $x-a$ beibehält, welche die $(n-1)$te nicht übersteigen.***

## 6.

Man findet die im Vorigen aus den allgemeinen Formeln abgeleiteten Resultate auch unmittelbar durch folgende Betrachtungen.

Entwickelt man eine Function $\chi(x)$ nach den aufsteigenden Potenzen von $x-a$, so erhält man nach dem ***Taylorschen*** Satz, wenn man die im vorigen Paragraph angewandte Bezeichnung benutzt,

$$\chi(x)=\chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2....+\chi_{n+m-1}(x-a)^{n+m-1}+\text{ etc.}$$

Ist $\chi(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, wo $N(x)$ und $D(x)$ ganze Functionen von $x$ respectiv vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade sind, und setzt man

$$D(x)=\beta+\beta_1(x-a)+\beta_2(x-a)^2....+\beta_m(x-a)^m,$$

so wird das Product dieses Ausdrucks mit der vorstehenden Entwicklung von $\chi(x)$ der Zähler $N(x)$. Es müssen daher alle die $(n-1)$te übersteigenden Potenzen von $x-a$ verschwinden, welches der zu Ende des vorigen Paragraph gefundne Satz ist. Man erhält auf diese Weise die folgenden Gleichungen =

$$33.\quad \begin{cases} 0 = \beta_m \chi_{n-m} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+1} \cdots + \beta\chi_n, \\ 0 = \beta_m \chi_{n-m+1} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+2} \cdots + \beta\chi_{n+1}, \\ 0 = \beta_m \chi_{n-m+2} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+3} \cdots + \beta\chi_{n+2} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\quad \text{etc.} \end{cases}$$

Aus $m$ von diesen Gleichungen findet man die Werthe, welche den $m+1$ Coëfficienten $\beta$, $\beta_1$, .... $\beta_m$ proportional sind, und wenn man dieselben in den für $D(x)$ angenommnen Ausdruck substituirt, so ergiebt sich für $D(x)$ die aus den Gröfsen (28.) gebildete Determinante.

Man kann noch bemerken, *dafs man, wenn man die $m+1$ Gröfsen $\beta$, $\beta_1$ etc. aus beliebigen $m+1$ von den Gleichungen* (33.) *eliminirt, Bedingungen zwischen den Differentialen der Function $\chi(x)$ erhält, die Statt finden müssen, so oft $\chi(x)$ ein rationaler Bruch ist, dessen Zähler und Nenner respective auf den $(n-1)^{ten}$ und $m^{ten}$ Grad steigen.* Nimmt man die $m+1$ ersten von den Gleichungen (33.), so wird die Bedingung

$$34.\quad \Sigma \pm \vartheta_0^{(0)} \vartheta_1' \vartheta_2'' \ldots . \vartheta_m^{(m)} = 0,$$

wenn man nach Bildung der Determinante $\vartheta_\alpha^{(\beta)} = \chi_{n-m+\alpha+\beta}$ setzt. Da $\alpha$ eine ganz allgemeine Gröfse ist, so kann man in den Functionen $\chi_i$ auch $x$ für $\alpha$ setzen.

Es werde $N(x)$, nach den Potenzen von $x-a$ entwickelt,

$$N(x) = \gamma + \gamma_1(x-a) + \gamma_2(x-a)^2 \ldots . + \gamma_{n-1}(x-a)^{n-1}.$$

Diesen Ausdruck mufs man nach dem Vorigen erhalten, wenn man die Entwicklung von $\chi(x)$ mit dem Nenner $D(x) = \beta + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 \ldots . + \beta_m(x-a)^m$ multiplicirt. Man braucht hiebei nur die $n$ ersten Terme der Entwicklung von $\chi(x)$ beizubehalten, weil aus den folgenden nur höhere Potenzen von $x-a$ als die $(n-1)$te hervorgehn, *so dafs $N(x)$ gleich wird dem Producte*

$$\{\beta + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 \ldots . + \beta_m(x-a)^m\}$$
$$\times \{\chi_0 + \chi_1 \cdot (x-a) + \chi_2 \cdot (x-a)^2 \ldots . + \chi_{n-1} \cdot (x-a)^{n-1}\},$$

*wenn man nach geschehner Multiplication die Potenzen von $x-a$, welche die $(n-1)$te übersteigen, fortwirft.* Man erhält auf diese Weise

$$\frac{N(x)}{(x-a)^n} = \beta_m \frac{d^{n-m-1} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-m-1)\, da^{n-m-1}} + \beta_{m-1} \frac{d^{n-m} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-m)\, da^{n-m}} \ldots .$$
$$+ \beta \cdot \frac{d^{n-1} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-1)\, da^{n-1}}.$$

Substituirt man in diese Formel die Gröfsen, denen zufolge (33.) die Coëffi-

cienten $\beta_m$, $\beta_{m-1}$, .... $\beta$ proportional sind, so erhält man die im vorigen Paragraph für $\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ gefundne, aus den Gröfsen (31.) gebildete Determinante.

Man kann die Functionen $D(x)$ und $N(x)$ für den hier betrachteten Fall auf ähnliche Art wie in §. 2. durch Gleichungen von verschiedner Form bestimmen. Es ist nämlich

$$35. \quad \frac{d^r \cdot x^p \chi(x) D(x)}{dx^r} = 0,$$

wenn $r \geqq n+p$, da $x^p D(x) \chi(x) = x^p N(x)$ eine ganze Function von $x$ vom $(n+p-1)$ten Grade ist. Man hat daher, wenn man mit $\Pi(r)$ dividirt und nach geschehner Differentiation den Werth $x = a$ substituirt, ferner

$$\chi_i^{(p)} = \frac{d^i \cdot a^p \chi(a)}{\Pi(i) \cdot da^i}$$

setzt, die allgemeine Gleichung,

$$36. \quad \chi_r^{(p)} \cdot D(a) + \chi_{r-1}^{(p)} \cdot \frac{d \cdot D(a)}{da} + \chi_{r-2}^{(p)} \cdot \frac{d^2 \cdot D(a)}{\Pi 2 \cdot da^2} \ldots + \chi_{r-m}^{(p)} \cdot \frac{d^m \cdot D(a)}{\Pi(m) \cdot da^m} = 0,$$

oder auch, wenn $r \geqq n+i+k$,

$$37. \quad \chi_r^{(i)} \cdot a^k D(a) + \chi_{r-1}^{(i)} \cdot \frac{d \cdot a^k D(a)}{da} + \chi_{r-2}^{(i)} \cdot \frac{d \cdot a^k D(a)}{\Pi 2 \cdot da^2} \ldots + \chi_{r-m-k}^{(i)} \cdot \frac{d^{m+k} \cdot a^k D(a)}{\Pi(m+k) \cdot da^{m+k}} = 0.$$

Substituirt man in (35.) für $D(x)$ den Ausdruck $\alpha + \alpha_1 x \ldots + \alpha_m x^m$, so erhält man:

$$38. \quad \alpha \cdot \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} + \alpha_1 \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+1} \chi(a)}{da^r} + \alpha_2 \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+2} \chi(a)}{da^r} \ldots + \alpha_m \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+m} \chi(a)}{da^r} = 0.$$

Wenn man in dieser Formel dem Exponenten $p$ die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$ giebt und immer $r \geqq n+p$ und zu gleicher Zeit $r \leqq n+m-1$ annimmt, so werden in den auf diese Art erhaltnen Gleichungen die Coëfficienten von $\alpha$, $\alpha_1$ etc. gegebne Gröfsen, da die Differentialquotienten von $\chi(a)$ bis zum $(n+m-1)$ten als gegeben angesehn werden. Wählt man daher aus der Zahl dieser Gleichungen beliebige $m$ von einander unabhängige, so kann man daraus die Verhältnisse von $\alpha$, $\alpha_1$ etc. und daher $D(x)$ selber, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmen. Man erhält dann $D(x)$ nach den Potenzen von $x$ geordnet. Eben so würde man aus $m$ von einander unabhängigen Gleichungen (36.), wenn in ihnen immer $n+p \leqq r \leqq n+m-1$ angenommen wird, die Verhältnisse von $D(a)$ und seiner $m$ ersten Differentialquotienten finden, und hierdurch die Entwicklung von $D(x)$ nach den Potenzen von $x-a$ erhalten. Solche Systeme von $m$ von einander unabhängigen Gleichungen erhält man zum Beispiel, wenn man $p = 0$ und für $r$ nach und nach $n$, $n+1$, .... $n+m-1$, oder $r = m+n-1$ und für $p$ nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$ setzt.

Führt man wie in §. 2. statt der Coëfficienten $\alpha$, $\alpha_1$ etc. die Functionen $D_0 = D(x)$, $D_1 = \frac{D-a}{x}$, $D_2 = \frac{D_1 - a_1}{x}$ etc. ein, so erhält man aus (13.), indem man $x_i = a$ setzt,

39. $$D(a) = D_0 + (a-x)D_1 + a(a-x)D_2 \ldots\ldots + a^{m-1}(a-x)D_m.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (35.), nachdem man darin $x = a$ gesetzt hat, so erhält man die Gleichung

40. $$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} \cdot D_0 + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_1 + \frac{d^r \cdot a^{p+1}(a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_2$$
$$\ldots\ldots + \frac{d^r \cdot a^{p+m-1}(a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_m = 0.$$

Führt man in die Gleichung

$$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a) D(a)}{da^r} = 0$$

für $D(a)$ den Ausdruck

$$D(x) + \frac{dD(x)}{dx}(a-x) + \frac{d^2 D(x)}{\Pi 2 \cdot dx^2}(a-x)^2 \ldots\ldots + \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m}(a-x)^m = D(a)$$

ein, so erhält man zwischen den Unbekannten $D(x)$, $\frac{dD(x)}{dx}$ etc. folgende lineäre Gleichung

41. $$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} \cdot D(x) + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot \frac{dD(x)}{dx} + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)^2 \chi(a)}{da^r} \cdot \frac{d^2 D(x)}{\Pi 2 \cdot dx^2}$$
$$\ldots\ldots + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)^m \chi(a)}{da^r} \cdot \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m} = 0.$$

Die Gröfsen $D^{(i)}$ und $S_i$ in §. 2. verwandeln sich, wenn die Function $f(x)$ vom $(r+1)$ten Grade angenommen und $x_0 = x_1 = x_2 \ldots\ldots = a$ wird, in folgende:

$$D^{(0)} = D(x); \quad D^{(i)} = \frac{D(x)}{(x-a)^p} - \frac{d^{p-1} \cdot \frac{D(a)}{x-a}}{\Pi(p-1)\,da^{p-1}}$$
$$= \frac{d^i D(a)}{\Pi i \cdot da^i} + \frac{d^{i+1} D(a)}{\Pi(i+1) \cdot da^{i+1}}(x-a) \ldots\ldots + \frac{d^m D(a)}{\Pi m \cdot da^m}(x-a)^{m-i},$$
$$S = \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{\Pi r \cdot da^r}, \quad S_i = \frac{d^{r-i+1} \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{\Pi(r-i+1) \cdot da^{r-i+1}}.$$

Substituirt man diese Werthe der Gröfsen $S_i$, so ergiebt die Formel (17.) §. 2. zwischen den Unbekannten $D^{(0)}$, $D'$, $D''$, .... $D^{(m)}$ die lineäre Gleichung:

$$42. \quad \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{\Pi r \cdot da^r} \cdot D^{(0)} + \frac{d^r \cdot a^p (a-x) \chi(a)}{\Pi r \cdot da} \cdot D' + \frac{d^{r-1} \cdot a^p (a-x) \chi(a)}{\Pi (r-1) \cdot da^{r-1}} \cdot D''$$

$$.... + \frac{d^{r-m+1} \cdot a^p (a-x) \chi(a)}{\Pi (r-m+1) \cdot da^{r-m+1}} \cdot D^{(m)} = 0.$$

Bildet man $m$ von einander unabhängige Gleichungen (40.), so werden $D_0$, $D_1$, .... $D_m$ den partiellen Determinanten ihrer Coëfficienten gleich, multiplicirt mit einem gemeinschaftlichen Factor. Eben so erhält man $D(x)$, $\frac{dD(x)}{dx}$, .... $\frac{d^m D(x)}{\Pi m . dx^m}$ aus $m$ von einander unabhängigen Gleichungen (41.) und $D^{(0)}$, $D'$, .... $D^{(m)}$ aus $m$ von einander unabhängigen Gleichungen (42.). In allen diesen Gleichungen ist immer

$$n+p \leqq r \leqq n+m-1$$

anzunehmen. Die Gröfse $D_m = D^{(m)}$ ist, wie in §. 2., der Coëfficient der höchsten Potenz von $x$ in $D(x)$ oder $= \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m}$.

Im August 1845.

# 10.

# Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie.

Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. Wiss.

(Abgedruckt aus den Monatsberichten der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom Jahre 1837.)

---

Ist $x$ eine Wurzel der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, wo $p$ eine Primzahl ist, und $g$ eine primitive Wurzel von $p$, und setzt man

$$F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

wo $\alpha$ irgend eine Wurzel der Gleichung $\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1}=0$ bedeutet, so hat man

$$F(\alpha)F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}} \cdot p.$$

Setzt man

$$F(\alpha^m)F(\alpha^n) = \psi(\alpha)F(\alpha^{m+n}),$$

so wird $\psi(\alpha)$ ein Ausdruck, der blofs die Potenzen von $\alpha$ in ganze Zahlen multiplicirt enthält; es ist ferner

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p \text{ *}).$$

Bedeutet $r$ eine primitive Wurzel der Gleichung $r^{p-1}=1$, und setzt man in der Function

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

für $r$ die Zahl $g$, so wird, wenn $m$ und $n$ positive Zahlen bedeuten die kleiner als $p-1$ sind,

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m \, \Pi n} \pmod{p},$$

wo $\Pi n = 1.2.3 \ldots n$. Wenn also $m+n > p-1$, wird $\psi(g) \equiv 0 \pmod{p}$, welches letztere sich in den Anwendungen als einen der wichtigsten Sätze der Zahlentheorie erweist. Der Fall $m+n=p-1$ wird hier ausgenommen. Diese Sätze habe ich vor mehr als 10 Jahren *Gauſs* mitgetheilt.

Ich bemerke noch, dafs wenn $2 \equiv g^m$, $3 \equiv g^{m'} \pmod{p}$, man die beiden merkwürdigen Formeln hat:

---

*) Die Fälle, wo $\alpha_m$, $\alpha_n$ oder $\alpha_{m+n}$ der Einheit gleich sind, werden hier ausgenommen.

$$F(-1)F(\alpha^2) = \alpha^{2m}F(\alpha)F(-\alpha),$$
$$F(\alpha)F(\gamma\alpha)F(\gamma^2\alpha) = \alpha^{-3m'}pF(\alpha^3),$$

in deren letzterer $\gamma$ eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit ist. Ist $\lambda$ ein ungerader Factor von $p-1$, so kann man durch die erste der beiden Formeln diejenigen Functionen $F(\alpha)$, in welchen $\alpha$ eine $2\lambda$te Wurzel der Einheit ist, rational auf die Functionen $F(\alpha)$ zurückführen, in denen $\alpha$ eine $\lambda$te Wurzel der Einheit ist. Man erhält so für $F(-\gamma)$ den Ausdruck

$$F(-\gamma) = \sqrt{p}\cdot\sqrt[3]{\left(\gamma^{-B}\frac{A-B\sqrt{-3}}{A+B\sqrt{-3}}\right)},$$

wo $A^2+3B^2=p$. Mit Hülfe derselben Formel findet man, wenn $\alpha$ eine primitive 8te Wurzel der Einheit ist, und

$$p = aa+bb = cc+2dd, \quad a\equiv c\equiv -1 \pmod 4$$

gesetzt wird,

$$F(\alpha) = \sqrt{\{(-1)^{\frac{c+1}{4}}(c+d\sqrt{-2})\sqrt{((a+b\sqrt{-1})\sqrt{p})}\}},$$

ferner

$$F(\alpha)F(\alpha^2) = (-1)^{\frac{c+1}{4}+\frac{p-1}{8}}(a+b\sqrt{-1})F(\alpha^3),$$
$$F(\alpha)F(\alpha^3) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}(c+d\sqrt{-2})F(-1).$$

Man erhält ferner mit Hülfe der beiden Formeln, wenn $\gamma$ und $\alpha$ eine imaginäre cubische und biquadratische Wurzel der Einheit sind:

$$F(\gamma\alpha) = \frac{F(\alpha)F(\gamma)}{a'+b'\alpha} = \frac{\sqrt{((a+b\alpha)\sqrt{p})}\sqrt[3]{\left(\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt{p}\right)}}{a'+b'\alpha},$$

wo

$$p = aa+bb = a'a'+b'b' = \frac{LL+3MM}{4},$$
$$a \equiv -1 \pmod 4,$$
$$a' \equiv -L \equiv -1 \pmod 3,$$
$$M \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\frac{a'}{b'} \equiv \frac{a}{b} \pmod p.$$

Die zweifelhaften Zeichen werden immer durch Congruenzen *bestimmt* oder, wo sie von der Wahl der primitiven Wurzel $g$ abhängen, wird diese Abhängigkeit auf eine einfache Weise angegeben; die Art dieser Abhängigkeit bildet die wichtigste Grundlage der Anwendung auf die Theorie der Potenzenreste. Ich bemerke noch, dafs wenn $p=cc+2dd$ von der Form $8n+1$ ist, $c$ der absolut kleinste Rest ist, den die Zahl

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{5(p-1)}{8}}{1.2.3\ldots\frac{p-1}{8}}$$

durch $p$ dividirt läfst, und dafs dieser absolut kleinste Rest immer positiv oder negativ ist, je nachdem er, abgesehen vom Zeichen, die Form $4n+3$ oder $4n+1$ hat. Die Functionen $F(\alpha)$, welche man nur bestimmt hatte, wenn $\alpha$ eine quadratische, cubische, biquadratische Wurzel der Einheit ist, sind durch die obigen Formeln nun auch bestimmt, wenn $\alpha$ eine 6te, 8te, 12te Wurzel der Einheit ist, man kann also *a priori* die Wurzeln der Gleichungen vom 6ten, 8ten, 12ten Grade, die in der Kreistheilung vorkommen, vollständig auflösen, und braucht hierzu nur die Zerfällung von $p$ in die drei Formen $xx+yy$, $xx+2yy$, $xx+3yy$. Für die Primzahlen bis 12000 habe ich diese Zerfällungen meiner Arbeit beigefügt.

Eine allgemeine Formel von grofser Wichtigkeit auch in der Anwendung der Kreistheilung auf die Theorie der quadratischen Formen ist folgende. Es sei $p$ von der Form $\lambda n+1$, $\beta$ eine primitive $\lambda$te Wurzel der Einheit, $\alpha$ ***irgend eine*** Wurzel der Gleichung $\alpha^{p-1}=1$, es sei ferner $\lambda \equiv g^m \pmod{p}$, so wird, wenn $\lambda$ ungerade ist:

$$F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots\ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = \alpha^{-\lambda m}p^{\frac{\lambda-1}{2}}F(\alpha^\lambda),$$

wenn $\lambda$ gerade ist:

$$F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots\ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = (-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}}p^{\frac{\lambda-2}{2}}F(-1)F(\alpha^\lambda)\ *),$$

wo, wie immer,

$$F(-1) = \sqrt{((-1)^{\frac{p-1}{2}}p)}$$

ist.

Wenn die Functionen $\psi$ im Zusammenhange mit den Binominalcoëfficienten oder den *Euler*schen Integralen 1ster Gattung stehen, wie die Congruenz

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m\,\Pi n} \pmod{p}$$

zeigt, so scheint die Vergleichung mit der Formel

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

---

*) Dieser Satz ist einem *Gaufs*'schen über die *Euler*schen Integrale analog, von welchem neuerdings *Dirichlet* einen merkwürdigen Beweis gegeben hat.

darauf hinzudeuten, dafs zwischen den Functionen $F$ und den *Euler*schen Integralen 2ter Gattung eine ähnliche Beziehung Statt finden mufs, in der Art, dafs $-\frac{1}{\Pi n}$ der Function $F(r^{-n})$ entspricht. Aber ich habe lange diese Beziehung vergeblich gesucht, bis ich sie in folgendem Satze fand.

In dem Ausdruck von $F(\alpha)$ setze man für den Exponenten $g^m$ den ihm in Bezug auf $p$ congruenten kleinsten positiven Rest $g_m$, wodurch

$$F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} \ldots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}$$

wird. Es seien ferner $x$ und $\alpha$ nicht Wurzeln der Einheit, sondern $x$ eine unbestimmte Variable und $\alpha$ eine Zahl $\equiv g^{p-1-m} \pmod{p}$. Setzt man $x = 1 + y$ und bezeichnet mit $Y_n$ die Entwicklung von $\{\log(1+y)\}^n$, wenn man die $y^{p-1}$ übersteigenden Potenzen von $y$ fortwirft: so wird für die verschiednen Zahlen $\alpha$, welche man für die verschiednen Werthe von $m$ erhält,

$$F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi_m} \pmod{p},$$

wo die Congruenz für ein unbestimmtes $y$ in Bezug auf die einzelnen Coëfficienten der Potenzen von $y$ Statt findet. Dies ist die gesuchte Beziehung, aus welcher durch Multiplication zweier Functionen $F$ die obige zwischen den Functionen $\psi$ und den Binominalcoëfficienten folgt. Ich bemerke noch den Satz, dafs in der Entwicklung der $(2m)$ten Potenz von $\log(1+y)$ der Coëfficient von $y^p$, wenn $p$ eine Primzahl und $> 2m+1$ ist, immer ein Vielfaches von $p$ zum Zähler erhält, wenn man ihn auf seinen kleinsten Ausdruck bringt.

Die bisher noch nirgends angegebne wahre Form der Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ ist folgende. Man kann, wie bekannt, diese Wurzeln leicht durch blofse Addition aus den Functionen $F(\alpha)$ zusammensetzen. Ist $\lambda$ ein Factor von $p-1$ und $\alpha^\lambda = 1$, so ist ferner bekannt, dafs $\{F(\alpha)\}^\lambda$ eine blofse Function von $\alpha$ ist. Man braucht aber nur diejenigen Werthe von $F(\alpha)$ zu kennen, für welche $\lambda$ Potenz einer Primzahl ist. Es sei nemlich $\lambda\lambda'\lambda'' \ldots$ ein Factor von $p-1$; ferner seien $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ .... Potenzen verschiedener Primzahlen und $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ .... primitive $\lambda$te, $\lambda'$te, $\lambda''$te .... Wurzeln der Einheit: so wird

$$F(\alpha\alpha'\alpha'' \ldots) = \frac{F(\alpha)F(\alpha')F(\alpha'') \ldots}{\psi(\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots)},$$

wo $\psi(\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots)$ eine ganze rationale Function von $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ .... bedeutet, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind. Es kommen daher, wenn man immer die $(p-1)$ten Wurzeln der Einheit als gegeben ansieht, in dem Ausdruck von $x$ nur Wurzelgröfsen, deren Exponenten Potenzen von Primzahlen

sind, und die Producte solcher Wurzelgröfsen vor. Wenn $\lambda = \mu^n$ und $\mu$ eine Primzahl ist, findet man die Function $F(\alpha)$ auf folgende Art. Man setze

$$F(\alpha)F(\alpha^i) = \psi_i(\alpha)F(\alpha^{i+1}),$$

so wird

$$F(\alpha) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(\alpha)\cdot F(\alpha^\mu)\}}$$
$$F(\alpha^\mu) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha^\mu)\psi_2(\alpha^\mu) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(\alpha^\mu)\cdot F(\alpha^{\mu^2})\}}$$

u. s. w., zuletzt

$$F(\alpha^{\mu^{n-1}}) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha^{\mu^{n-1}})\psi_2(\alpha^{\mu^{n-1}}) \ldots\ldots \psi_{\mu-2}(\alpha^{\mu^{n-1}})\cdot(-1)^{\frac{p-1}{\mu}}p\}}\ *).$$

Die $\mu-1$ Functionen $\psi$ bestimmen nicht nur sämmtliche Gröfsen unter den Wurzelzeichen, sondern auch die gegenseitige Abhängigkeit der Wurzelgröfsen selber. Setzt man nemlich für $\alpha$ die verschiednen Potenzen von $\alpha$, so kann man vermittelst der so erhaltnen Werthe dieser Functionen alle $\mu^n-1$ Functionen $F(\alpha^i)$ durch die Potenzen von $F(\alpha)$ rational ausdrücken, indem alle $\mu^n-1$ Gröfsen $\frac{[F(\alpha)]^i}{F(\alpha^i)}$ immer einem Product aus den Werthen mehrerer der $\mu-1$ Functionen $\psi(\alpha)$ gleich werden. Hierin besteht einer der gröfsten Vorzüge der hier angegebnen Methode vor der *Gaufs*'schen, indem in dieser die Auffindung der Abhängigkeit der verschiednen Wurzelgröfsen eine ganz besondere, wegen ihrer grofsen Mühseligkeit selbst für kleine Primzahlen nicht mehr ausführbare Arbeit verursacht, während die Einführung der Functionen $\psi$ *gleichzeitig* die Gröfsen unter den Wurzelzeichen und die Abhängigkeit der Wurzelgröfsen giebt. Die Bildung der Functionen $\psi$ geschieht nach einem überaus einfachen Algorithmus, der nur erfordert, dafs man sich aus der Tabelle für die Reste von $g^m$ eine andre bildet, welche $g^{m'} \equiv 1 + g^m \pmod{p}$ giebt. Nach diesen Regeln hat jetzt einer meiner Zuhörer in einer von der hiesigen Universität gekrönten Preisschrift die Gleichungen $x^p = 1$ für alle Primzahlen $p$ bis 103 vollständig aufgelöst **).

---

*) Wenn $n = 1$, lassen sich die $\mu - 1$ Functionen immer auf den 6ten Theil unmittelbar zurückführen. Ich habe sogar durch eine bis $\mu = 31$ fortgesetzte Induction gefunden, dafs sich alle Functionen $\psi$ immer durch die Werthe einer einzigen ausdrücken lassen.

**) Bei dieser Gelegenheit hat derselbe (Herr *Rosenhain*) den merkwürdigen Satz bewiesen, dafs wenn $\alpha$ die 5te, $\gamma$ die 3te Wurzel der Einheit, $p$ von der Form $30n+1$, $24 \equiv g^m \pmod{p}$ ist, immer $F(\alpha)F(-\gamma) = \alpha^m \cdot \frac{A+B\sqrt{-3}}{2} F(-\alpha\gamma)$ wird, wo $A \equiv -2$, $B \equiv 0 \pmod{5}$, $AA + 3BB = 4p$.

Einer der für die Zahlentheorie fruchtbarsten Sätze ist folgender. Es seien die Zahlen $m$, $m'$, $m''$ .... positiv und kleiner als $p-1$; es werden durch $m_i$, $m_i'$, $m_i''$ .... die kleinsten positiven Reste bezeichnet, welche $im$, $im'$, $im''$ .... durch $p-1$ dividirt ergeben; es sei

$$m_i + m_i' + m_i'' + \nu \ldots = n_i(p-1) + s_i,$$

wo $s_i$ ebenfalls positiv und kleiner als $p-1$; ist $\nu$ die kleinste unter den Zahlen $n_1$, $n_2$, .... $n_{p-1}$ und setzt man

$$F(r^{-m})F(r^{-m'})F(r^{-m''}) \ldots = \chi(r)F(r^{-s}),$$

so werden die ganzzahligen Coëfficienten in $\chi(r)$ alle durch $p^\nu$ theilbar und durch keine höhere Potenz von $p$; setzt man $\chi(r) = p^\nu \chi'(r)$ und in $\chi'(r)$ für $r$ die primitive Wurzel $g$, so wird

$$\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi s}{\Pi m \Pi m' \Pi m'' \ldots} \text{ (mod. } p).$$

Die Anwendung dieses Satzes giebt eigenthümliche Theoreme, von denen ich vor einer Reihe von Jahren ein Specimen im *Crelle*'schen Journal mitgetheilt habe, die Zahl der reducirten quadratischen Formen der Theiler von $yy + pzz$ betreffend, wenn $p$ eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist *). Wenn ich diesen Theoremen die Allgemeinheit gegeben haben werde, deren sie fähig scheinen, werde ich mir die Ehre geben, sie ebenfalls der Akademie vorzulegen. Sie bilden gewissermaafsen ein Verbindungsglied zwischen den beiden Haupttheilen der höheren Arithmetik, der Kreistheilung und der Theorie der quadratischen Formen.

Die hauptsächlichste Anwendung der Kreistheilung habe ich auf die Theorie der cubischen und biquadratischen Reste gemacht, und mit grofser Leichtigkeit und Einfachheit den schönen *Gaufs*'schen Satz in seiner 2ten Abhandlung über die biquadratischen Reste, dessen bisher noch nicht bekannt gemachten Beweis derselbe als ein *mysterium maxime reconditum* bezeichnet, wahrscheinlich auf ganz verschiednem Wege abgeleitet **). Die höchste Einfachheit hat der Reciprocitätssatz für cubische Reste, dessen Beweis sich fast mit einem Striche aus den bekannten Formeln der Kreistheilung findet. Sind nämlich $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{L'+M'\sqrt{-3}}{2}$, wo $M$ und $M'$ durch 3 aufgehen (auch 0

---

*) Für die Primzahlen von der Form $4n+1$ findet ein ganz analoger Satz Statt; die Zahl der q. R. zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ giebt hier die Zahl der Formen.

**) Dieser Satz betrifft die biquadratische Reciprocität zwischen zwei complexen Primzahlen $a+b\sqrt{-1}$ und $c+b\sqrt{-1}$; den ebenfalls zuerst von *Gaufs* aufgestellten Satz über deren quadratische Reciprocität hat *Dirichlet* bewiesen.

sein können), zwei complexe Primzahlen und bezeichnet man durch $\left(\frac{x+y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right)$ diejenige der Gröfsen 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, welche in Bezug auf den Modul $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ der Potenz $(x+y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{3}(LL+3MM)-1}{3}}$ congruent ist, so wird geradezu

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}\right).$$

Die Beweise dieser Sätze konnten in den vergangenen Wintervorlesungen ohne Schwierigkeit meinen Zuhörern mitgetheilt werden *).

Die Anwendung des *Legendre*'schen Reciprocitätssatzes auf die Untersuchung, ob eine Primzahl einer andern quadratischer Rest oder Nichtrest sei, erfordert bekanntlich die Zerfällung der successiv gefundnen Reste in Primfactoren, und die besondere Behandlung jedes derselben. *Gauſs* hat die Theorie der quadratischen Reste wesentlich vervollkommnet, indem er durch einen ihm eigenthümlichen Satz diese Untersuchung, ohne Factorenzerfällung nöthig zu haben, auf die Verwandlung eines Bruchs in einen Kettenbruch zurückgeführt hat. Ich habe die gleiche Vollkommenheit der Theorie der biquadratischen und cubischen Reste gegeben, wozu es nur einer leicht sich ergebenden Verallgemeinerung der Reciprocitätssätze bedurfte. Ist nemlich, um diese Verallgemeinerung für die quadratischen Reste anzudeuten, $p$ irgend eine ungerade Zahl $= ff'f''\ldots$, wo $f, f', f'', \ldots$ gleiche oder verschiedene Primzahlen bedeuten, so dehne ich die schöne *Legendre*'sche Bezeichnung auf zusammengesetzte Zahlen $p$ in der Art aus, dafs ich mit $\left(\frac{x}{p}\right)$, wenn $x$ zu $p$ Primzahl ist, das Product $\left(\frac{x}{f}\right)\left(\frac{x}{f'}\right)\left(\frac{x}{f''}\right)\ldots$ bezeichne. Sind $p$ und $p'$ zwei ungerade Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, beide positiv

*) Diese aus vielfach verbreiteten Nachschriften der oben erwähnten Vorlesungen auch den Herrn Professoren *Dirichlet* und *Kummer* seit mehreren Jahren bekannten Beweise sind neuerdings von Herrn Dr. *Eisenstein* im 27sten Bande des *Crelle*'schen Journals S. 289 und im 28ten Bande desselben Journals S. 53 publicirt worden. Der S. 41 des 28ten Bandes von Herrn Dr. *Eisenstein* gegebne Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes ist der nämliche, welchen ich im Jahre 1827 *Legendre* mitgetheilt und dieser in die 3te Ausgabe seiner Zahlentheorie aufgenommen hat.

Die oben erwähnten auf die quadratischen Formen bezüglichen Sätze sind jetzt Theile einer grofsen von *Dirichlet* gegründeten Theorie geworden.

October 1845. *J.*

oder auch eine positiv, die andre negativ, so hat man, ganz wie bei Primzahlen:

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}}\left(\frac{p}{p'}\right),$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

und diese Formeln geben den Werth von $\left(\frac{p'}{p}\right)$ vermittelst der gewöhnlichen Verwandlung von $\frac{p'}{p}$ in einen Kettenbruch durch eine von der *Gaufs*'schen wesentlich verschiedne und einfachere Regel. Auf diese Weise erfordert die Bestimmung von $\left(\frac{p'}{p}\right)$ nur die Untersuchung, ob $p$ und $p'$ wirklich, wie die Definition verlangt, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Genau dasselbe läfst sich bei den biquadratischen und cubischen Resten anwenden, für welche ich ähnliche Bezeichnungen eingeführt habe. Die Anwendung des so verallgemeinerten Zeichens $\left(\frac{x}{p}\right)$ gewährt bei einiger Übung die angenehmsten Erleichterungen.

Mit den Resten der 8ten und 5ten Potenzen, welche ganz neue Principien nöthig machen, bin ich ziemlich weit vorgerückt; sobald ich den betreffenden Reciprocitätsgesetzen die wünschenswerthe Vollendung gegeben habe, werde ich sie der Akademie mittheilen. Das Wichtigste hiebei dürfte die Aussicht sein, welche diese Prinzipien auf eine dereinstige Verallgemeinerung und Vereinfachung der höheren Arithmetik gewähren.

Eine meiner frühesten Anwendungen der Kreistheilung betrifft die cyclometrische Auflösung der *Pell*'schen Aufgabe. Aus einer vor mir liegenden von dem jetzt am Danziger Gymnasium angestellten Oberlehrer *Czwalina* angefertigten Nachschrift einer von mir vor mehreren Jahren gehaltenen Vorlesung entnehme ich folgende Sätze. Es sei $p$ eine Primzahl von der Form $4n+1$; bezeichnet man mit $a$ ihre quadratischen Reste zwischen $o$ und $\frac{1}{2}p$, so wird

$$\sqrt{p}\{\sqrt{p}\cdot y + x\} = 2^{\frac{p+1}{2}} \Pi \sin^2\frac{a\pi}{p},$$

wo $x^2 - py^2 = -4$ und durch das vorgesetzte $\Pi$ das Product aus sämmtlichen Factoren $\sin^2\frac{a\pi}{p}$ bezeichnet wird. Es sei $q$ eine Primzahl von der Form $8n+3$; bezeichnet man mit $a$ ihre quadratischen Reste, so wird

$$x+y\sqrt{q} = \sqrt{2}\,\Pi\sin\left(\frac{a\pi}{q}+\frac{\pi}{4}\right),$$

wo $x^2-qy^2=-2$. Es seien $q$ und $q'$ zwei Primzahlen von der Form $4n+3$, $q$ quadratischer Rest von $q'$; es seien ferner respective $a$ und $a'$ die kleinsten positiven quadratischen Reste von $q$ und von $q'$, so wird

$$2^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q'-1}{2}}\,\Pi\sin\left(\frac{a\pi}{q}+\frac{a'\pi}{q'}\right) = \sqrt{q}\cdot x+\sqrt{q'}\,y,$$

wo $qx^2-q'y^2=4$, u. s. w. Wenn $x$ und $y$ nicht gerade sind, giebt die Cubirung der Gleichungen

$$x^2-py^2 = -4, \qquad qx^2-q'y^2 = 4$$

die Lösung der Gleichungen

$$u^2-pv^2 = -1, \qquad qu^2-q'v^2 = +1.$$

# I. Zerfällung der Primzahlen $p$ von der Form $4n+1$ in die Summe zweier Quadrate *).

$$p = a^2+b^2.$$

| $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 2 | 257 | 1 | 16 | 557 | 19 | 14 | 853 | 23 | 18 | 1181 | 5 | 34 | 1549 | 35 | 18 |
| 13 | 3 | 2 | 269 | 13 | 10 | 569 | 13 | 20 | 857 | 29 | 4 | 1193 | 13 | 32 | 1553 | 23 | 32 |
| 17 | 1 | 4 | 277 | 9 | 14 | 577 | 1 | 24 | 877 | 29 | 6 | 1201 | 25 | 24 | 1597 | 21 | 34 |
| 29 | 5 | 2 | 281 | 5 | 16 | 593 | 23 | 8 | 881 | 25 | 16 | 1213 | 27 | 22 | 1601 | 1 | 40 |
| 37 | 1 | 6 | 293 | 17 | 2 | 601 | 5 | 24 | 929 | 23 | 20 | 1217 | 31 | 16 | 1609 | 3 | 40 |
| 41 | 5 | 4 | 313 | 13 | 12 | 613 | 17 | 18 | 937 | 19 | 24 | 1229 | 35 | 2 | 1613 | 13 | 38 |
| 53 | 7 | 2 | 317 | 11 | 14 | 617 | 19 | 16 | 941 | 29 | 10 | 1237 | 9 | 34 | 1621 | 39 | 10 |
| 61 | 5 | 6 | 337 | 9 | 16 | 641 | 25 | 4 | 953 | 13 | 28 | 1249 | 15 | 32 | 1637 | 31 | 26 |
| 73 | 3 | 8 | 349 | 5 | 18 | 653 | 13 | 22 | 977 | 31 | 4 | 1277 | 11 | 34 | 1657 | 19 | 36 |
| 89 | 5 | 8 | 353 | 17 | 8 | 661 | 25 | 6 | 997 | 31 | 6 | 1289 | 35 | 8 | 1669 | 15 | 38 |
| 97 | 9 | 4 | 373 | 7 | 18 | 673 | 23 | 12 | 1009 | 15 | 28 | 1297 | 1 | 36 | 1693 | 37 | 18 |
| 101 | 1 | 10 | 389 | 17 | 10 | 677 | 1 | 26 | 1013 | 23 | 22 | 1301 | 25 | 26 | 1697 | 41 | 4 |
| 109 | 3 | 10 | 397 | 19 | 6 | 701 | 5 | 26 | 1021 | 11 | 30 | 1321 | 5 | 36 | 1709 | 35 | 22 |
| 113 | 7 | 8 | 401 | 1 | 20 | 709 | 15 | 22 | 1033 | 3 | 32 | 1361 | 31 | 20 | 1721 | 11 | 40 |
| 137 | 11 | 4 | 409 | 3 | 20 | 733 | 27 | 2 | 1049 | 5 | 32 | 1373 | 37 | 2 | 1733 | 17 | 38 |
| 149 | 7 | 10 | 421 | 15 | 14 | 757 | 9 | 26 | 1061 | 31 | 10 | 1381 | 15 | 34 | 1741 | 29 | 30 |
| 157 | 11 | 6 | 433 | 17 | 12 | 761 | 19 | 20 | 1069 | 13 | 30 | 1409 | 25 | 28 | 1753 | 27 | 32 |
| 173 | 13 | 2 | 449 | 7 | 20 | 769 | 25 | 12 | 1093 | 33 | 2 | 1429 | 23 | 30 | 1777 | 39 | 16 |
| 181 | 9 | 10 | 457 | 21 | 4 | 773 | 17 | 22 | 1097 | 29 | 16 | 1433 | 37 | 8 | 1789 | 5 | 42 |
| 193 | 7 | 12 | 461 | 19 | 10 | 797 | 11 | 26 | 1109 | 25 | 22 | 1453 | 3 | 38 | 1801 | 35 | 24 |
| 229 | 15 | 2 | 509 | 5 | 22 | 809 | 5 | 28 | 1117 | 21 | 26 | 1481 | 35 | 16 | 1861 | 31 | 30 |
| 233 | 13 | 8 | 521 | 11 | 20 | 821 | 25 | 14 | 1129 | 27 | 20 | 1489 | 33 | 20 | 1873 | 33 | 28 |
| 241 | 15 | 4 | 541 | 21 | 10 | 829 | 27 | 10 | 1153 | 33 | 8 | 1493 | 7 | 38 | 1877 | 41 | 14 |

*) Ich lasse hier die Tabellen folgen, die ich in dem vorstehenden Aufsatze erwähnt habe. Die Berechnung der Tabellen I. und II. verdanke ich der Gefälligkeit des Herrn Director *Zornow*.

Oct. 1845. *J.*

| $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1889 | 17 | 40 | 2621 | 11 | 50 | 3413 | 7 | 58 | 4201 | 51 | 40 | 4993 | 63 | 32 | 5849 | 35 | 68 |
| 1901 | 35 | 26 | 2633 | 43 | 28 | 3433 | 27 | 52 | 4217 | 11 | 64 | 5009 | 65 | 28 | 5857 | 9 | 76 |
| 1913 | 43 | 8 | 2657 | 49 | 16 | 3449 | 43 | 40 | 4229 | 65 | 2 | 5021 | 11 | 70 | 5861 | 31 | 70 |
| 1933 | 13 | 42 | 2677 | 39 | 34 | 3457 | 39 | 44 | 4241 | 65 | 4 | 5077 | 71 | 6 | 5869 | 45 | 62 |
| 1949 | 43 | 10 | 2689 | 33 | 40 | 3461 | 31 | 50 | 4253 | 53 | 38 | 5081 | 59 | 40 | 5881 | 75 | 16 |
| 1973 | 23 | 38 | 2693 | 47 | 22 | 3459 | 45 | 38 | 4261 | 65 | 6 | 5101 | 51 | 50 | 5897 | 11 | 76 |
| 1993 | 43 | 12 | 2729 | 5 | 52 | 3517 | 59 | 6 | 4273 | 57 | 32 | 5113 | 53 | 48 | 5953 | 57 | 52 |
| 1997 | 29 | 34 | 2741 | 25 | 46 | 2529 | 35 | 48 | 4289 | 65 | 8 | 5153 | 23 | 68 | 5981 | 59 | 50 |
| 2017 | 9 | 44 | 2749 | 43 | 30 | 3533 | 13 | 58 | 4297 | 61 | 24 | 5189 | 17 | 70 | 6029 | 77 | 10 |
| 2029 | 45 | 2 | 2753 | 7 | 52 | 3541 | 25 | 54 | 4337 | 49 | 44 | 5197 | 29 | 66 | 6037 | 41 | 66 |
| 2053 | 17 | 42 | 2777 | 29 | 44 | 3557 | 49 | 34 | 4349 | 43 | 50 | 5209 | 5 | 72 | 6053 | 47 | 62 |
| 2069 | 25 | 38 | 2789 | 17 | 50 | 3581 | 59 | 10 | 4357 | 1 | 66 | 5233 | 7 | 72 | 6073 | 77 | 12 |
| 2081 | 41 | 20 | 2797 | 51 | 14 | 3593 | 53 | 28 | 4373 | 23 | 62 | 5237 | 71 | 14 | 6089 | 67 | 40 |
| 2089 | 45 | 8 | 2801 | 49 | 20 | 3613 | 43 | 42 | 4397 | 61 | 26 | 5261 | 70 | 19 | 6101 | 25 | 74 |
| 2113 | 33 | 32 | 2833 | 23 | 48 | 3617 | 41 | 44 | 4409 | 53 | 40 | 5273 | 67 | 28 | 6113 | 73 | 28 |
| 2129 | 23 | 40 | 2837 | 41 | 34 | 3637 | 39 | 46 | 4421 | 65 | 14 | 5281 | 41 | 60 | 6121 | 45 | 64 |
| 2137 | 29 | 36 | 2857 | 51 | 16 | 3673 | 37 | 48 | 4441 | 29 | 60 | 5297 | 71 | 16 | 6133 | 7 | 78 |
| 2141 | 5 | 46 | 2861 | 19 | 50 | 3677 | 59 | 14 | 4457 | 19 | 64 | 5309 | 53 | 50 | 6173 | 53 | 58 |
| 2153 | 37 | 28 | 2897 | 31 | 44 | 3697 | 49 | 36 | 4481 | 65 | 16 | 5333 | 73 | 2 | 6197 | 71 | 34 |
| 2161 | 15 | 44 | 2909 | 53 | 10 | 3701 | 55 | 26 | 4493 | 67 | 2 | 5381 | 65 | 34 | 6217 | 21 | 76 |
| 2213 | 47 | 2 | 2917 | 1 | 54 | 3709 | 53 | 30 | 4513 | 47 | 48 | 5393 | 73 | 8 | 6221 | 61 | 50 |
| 2221 | 45 | 14 | 2953 | 53 | 12 | 3733 | 57 | 22 | 4517 | 49 | 46 | 5413 | 63 | 38 | 6229 | 73 | 30 |
| 2237 | 11 | 46 | 2957 | 29 | 46 | 3761 | 25 | 56 | 4549 | 65 | 18 | 5417 | 59 | 44 | 6257 | 79 | 4 |
| 2269 | 37 | 30 | 2969 | 37 | 40 | 3769 | 13 | 60 | 4561 | 31 | 60 | 5437 | 69 | 26 | 6269 | 37 | 70 |
| 2273 | 47 | 8 | 3001 | 51 | 20 | 3793 | 33 | 52 | 4597 | 41 | 54 | 5441 | 71 | 20 | 6277 | 79 | 6 |
| 2281 | 45 | 16 | 3037 | 11 | 54 | 3797 | 41 | 46 | 4621 | 61 | 30 | 5449 | 43 | 60 | 6301 | 75 | 26 |
| 2293 | 23 | 42 | 3041 | 55 | 4 | 3821 | 61 | 10 | 4637 | 59 | 34 | 5477 | 1 | 74 | 6317 | 29 | 74 |
| 2297 | 19 | 44 | 3049 | 45 | 32 | 3833 | 53 | 32 | 4649 | 5 | 68 | 5501 | 5 | 74 | 6329 | 77 | 20 |
| 2309 | 47 | 10 | 3061 | 55 | 6 | 3853 | 3 | 62 | 4657 | 39 | 56 | 5521 | 65 | 36 | 6337 | 71 | 36 |
| 2333 | 43 | 22 | 3089 | 55 | 8 | 3877 | 31 | 54 | 4673 | 7 | 68 | 5557 | 9 | 74 | 6353 | 73 | 32 |
| 2341 | 15 | 46 | 3109 | 47 | 30 | 3881 | 59 | 20 | 4721 | 25 | 64 | 5569 | 63 | 40 | 6361 | 69 | 40 |
| 2457 | 41 | 26 | 3121 | 39 | 40 | 3889 | 17 | 60 | 4729 | 45 | 52 | 5573 | 47 | 58 | 6373 | 17 | 78 |
| 2377 | 21 | 44 | 3137 | 1 | 56 | 3917 | 61 | 14 | 4733 | 37 | 58 | 5581 | 35 | 66 | 6389 | 55 | 58 |
| 2381 | 35 | 34 | 3169 | 55 | 12 | 3929 | 35 | 52 | 4789 | 55 | 42 | 5641 | 75 | 4 | 6397 | 59 | 54 |
| 2389 | 25 | 42 | 3181 | 45 | 34 | 3989 | 25 | 58 | 4793 | 13 | 68 | 5653 | 73 | 18 | 6421 | 39 | 70 |
| 2393 | 37 | 32 | 3209 | 53 | 20 | 4001 | 49 | 40 | 4801 | 65 | 24 | 5657 | 61 | 44 | 6449 | 7 | 80 |
| 2417 | 49 | 4 | 3217 | 9 | 56 | 4013 | 13 | 62 | 4813 | 67 | 18 | 5669 | 65 | 38 | 6469 | 63 | 50 |
| 2437 | 49 | 6 | 3221 | 55 | 14 | 4021 | 39 | 50 | 4817 | 41 | 56 | 5689 | 75 | 8 | 6473 | 43 | 68 |
| 2441 | 29 | 40 | 3229 | 27 | 50 | 4049 | 55 | 32 | 4861 | 69 | 10 | 5093 | 43 | 62 | 6481 | 9 | 80 |
| 2473 | 13 | 48 | 2253 | 57 | 2 | 4057 | 59 | 24 | 4877 | 61 | 34 | 5701 | 15 | 74 | 6521 | 11 | 80 |
| 2477 | 19 | 46 | 3257 | 11 | 56 | 4073 | 37 | 52 | 4889 | 67 | 20 | 5717 | 71 | 26 | 6529 | 65 | 48 |
| 2521 | 35 | 36 | 3301 | 49 | 30 | 4093 | 27 | 58 | 4909 | 3 | 70 | 5737 | 51 | 56 | 6553 | 37 | 72 |
| 2549 | 7 | 50 | 3313 | 57 | 8 | 4129 | 23 | 60 | 4933 | 33 | 62 | 5741 | 29 | 70 | 6569 | 13 | 80 |
| 2557 | 21 | 46 | 3329 | 25 | 52 | 4133 | 17 | 62 | 4937 | 29 | 64 | 5749 | 57 | 50 | 6577 | 81 | 4 |
| 2593 | 17 | 48 | 3361 | 15 | 56 | 4153 | 43 | 48 | 4957 | 69 | 14 | 5801 | 5 | 76 | 6581 | 41 | 70 |
| 2609 | 47 | 20 | 3373 | 3 | 58 | 4157 | 59 | 26 | 4969 | 37 | 60 | 5813 | 73 | 22 | 6637 | 61 | 54 |
| 2617 | 51 | 4 | 3389 | 5 | 58 | 4177 | 9 | 64 | 4973 | 67 | 22 | 5821 | 75 | 14 | 6653 | 53 | 62 |

| $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6661 | 81 | 10 | 7541 | 71 | 50 | 8329 | 75 | 52 | 9181 | 91 | 30 | 10069 | 87 | 50 | 11057 | 89 | 56 |
| 6673 | 63 | 52 | 7549 | 85 | 18 | 8353 | 87 | 28 | 9209 | 53 | 80 | 10093 | 93 | 38 | 11069 | 85 | 62 |
| 6689 | 17 | 80 | 7561 | 75 | 44 | 8369 | 25 | 88 | 9221 | 95 | 14 | 10133 | 23 | 98 | 11093 | 103 | 22 |
| 6701 | 35 | 74 | 7573 | 87 | 2 | 8377 | 51 | 76 | 9241 | 5 | 96 | 10141 | 85 | 54 | 11113 | 77 | 72 |
| 6709 | 25 | 78 | 7577 | 59 | 64 | 8389 | 17 | 90 | 9257 | 59 | 76 | 10169 | 13 | 100 | 11117 | 61 | 86 |
| 6733 | 3 | 82 | 7589 | 65 | 58 | 8429 | 77 | 50 | 9277 | 21 | 94 | 10177 | 31 | 96 | 11149 | 93 | 50 |
| 6737 | 31 | 76 | 7621 | 15 | 86 | 8461 | 19 | 90 | 9281 | 95 | 16 | 10181 | 95 | 34 | 11161 | 69 | 80 |
| 6761 | 19 | 80 | 7649 | 55 | 68 | 8501 | 55 | 74 | 9293 | 77 | 58 | 10193 | 97 | 28 | 11177 | 19 | 104 |
| 6781 | 75 | 34 | 7669 | 87 | 10 | 8513 | 7 | 92 | 9337 | 11 | 96 | 10253 | 83 | 58 | 11197 | 91 | 54 |
| 6793 | 67 | 48 | 7673 | 83 | 28 | 8521 | 85 | 36 | 9341 | 85 | 46 | 10273 | 87 | 52 | 11213 | 67 | 82 |
| 6829 | 77 | 30 | 7681 | 25 | 84 | 8537 | 91 | 16 | 9349 | 95 | 18 | 10289 | 17 | 100 | 11257 | 21 | 104 |
| 6833 | 47 | 68 | 7717 | 81 | 34 | 8573 | 43 | 82 | 9377 | 79 | 56 | 10301 | 101 | 10 | 11261 | 5 | 106 |
| 6841 | 21 | 80 | 7741 | 75 | 46 | 8581 | 65 | 66 | 9397 | 71 | 66 | 10313 | 43 | 92 | 11273 | 53 | 92 |
| 6857 | 61 | 56 | 7753 | 3 | 88 | 8597 | 89 | 26 | 9413 | 97 | 2 | 10321 | 95 | 36 | 11317 | 9 | 106 |
| 6869 | 55 | 62 | 7757 | 19 | 86 | 8609 | 53 | 80 | 9421 | 45 | 86 | 10333 | 27 | 98 | 11321 | 85 | 64 |
| 6917 | 79 | 26 | 7789 | 83 | 30 | 8629 | 23 | 90 | 9433 | 93 | 28 | 10337 | 79 | 64 | 11329 | 95 | 48 |
| 6949 | 15 | 82 | 7793 | 7 | 88 | 8641 | 71 | 60 | 9437 | 91 | 34 | 10357 | 39 | 94 | 11353 | 93 | 52 |
| 6961 | 81 | 20 | 7817 | 61 | 64 | 8669 | 85 | 38 | 9461 | 25 | 94 | 10369 | 63 | 80 | 11369 | 37 | 100 |
| 6977 | 71 | 44 | 7829 | 73 | 50 | 8677 | 81 | 46 | 9473 | 97 | 8 | 10429 | 5 | 102 | 11393 | 103 | 28 |
| 7001 | 35 | 76 | 7841 | 79 | 40 | 8681 | 91 | 20 | 9497 | 61 | 76 | 10433 | 97 | 32 | 11437 | 51 | 94 |
| 7013 | 17 | 82 | 7853 | 67 | 58 | 8689 | 15 | 92 | 9521 | 89 | 40 | 10453 | 7 | 102 | 11489 | 55 | 92 |
| 7057 | 1 | 84 | 7873 | 57 | 68 | 8693 | 73 | 58 | 9533 | 53 | 82 | 10457 | 101 | 16 | 11497 | 101 | 36 |
| 7069 | 75 | 38 | 7877 | 49 | 74 | 8713 | 93 | 8 | 9601 | 95 | 24 | 10477 | 99 | 26 | 11549 | 107 | 10 |
| 7109 | 47 | 70 | 7901 | 85 | 26 | 8737 | 41 | 84 | 9613 | 3 | 98 | 10501 | 49 | 90 | 11593 | 107 | 12 |
| 7121 | 55 | 64 | 7933 | 43 | 78 | 8741 | 79 | 50 | 9629 | 5 | 98 | 10513 | 73 | 72 | 11597 | 19 | 106 |
| 7129 | 27 | 80 | 7937 | 89 | 4 | 8753 | 17 | 92 | 9649 | 57 | 80 | 10529 | 23 | 100 | 11617 | 49 | 96 |
| 7177 | 11 | 84 | 7949 | 35 | 82 | 8761 | 75 | 56 | 9661 | 69 | 70 | 10589 | 85 | 58 | 11621 | 65 | 86 |
| 7193 | 67 | 52 | 7993 | 53 | 72 | 8821 | 89 | 30 | 9677 | 29 | 94 | 10597 | 79 | 66 | 11633 | 103 | 32 |
| 7213 | 83 | 18 | 8009 | 85 | 28 | 8837 | 1 | 94 | 9689 | 35 | 92 | 10601 | 101 | 20 | 11657 | 29 | 104 |
| 7229 | 85 | 2 | 8017 | 31 | 84 | 8849 | 65 | 68 | 9697 | 81 | 56 | 10613 | 103 | 2 | 11677 | 21 | 106 |
| 7237 | 81 | 26 | 8053 | 87 | 22 | 8861 | 5 | 94 | 9721 | 75 | 64 | 10657 | 81 | 64 | 11681 | 41 | 100 |
| 7253 | 23 | 82 | 8069 | 65 | 62 | 8893 | 53 | 78 | 9733 | 97 | 18 | 10709 | 103 | 10 | 11689 | 5 | 108 |
| 7297 | 39 | 76 | 8081 | 41 | 80 | 8929 | 73 | 60 | 9749 | 55 | 82 | 10729 | 27 | 100 | 11701 | 105 | 26 |
| 7309 | 35 | 78 | 8089 | 67 | 60 | 8933 | 47 | 82 | 9769 | 45 | 88 | 10733 | 83 | 62 | 11717 | 79 | 74 |
| 7321 | 61 | 60 | 8093 | 37 | 82 | 8941 | 29 | 90 | 9781 | 41 | 90 | 10753 | 103 | 12 | 11777 | 31 | 104 |
| 7333 | 63 | 58 | 8101 | 1 | 90 | 8969 | 35 | 88 | 9817 | 99 | 4 | 10781 | 91 | 50 | 11789 | 83 | 70 |
| 7349 | 25 | 82 | 8117 | 89 | 14 | 9001 | 51 | 80 | 9829 | 15 | 98 | 10789 | 95 | 42 | 11801 | 101 | 40 |
| 7369 | 85 | 12 | 8161 | 81 | 40 | 9013 | 87 | 38 | 9833 | 37 | 92 | 10837 | 89 | 54 | 11813 | 47 | 98 |
| 7393 | 47 | 72 | 8209 | 55 | 72 | 9029 | 95 | 2 | 9857 | 89 | 44 | 10853 | 97 | 38 | 11821 | 61 | 90 |
| 7417 | 19 | 84 | 8221 | 11 | 90 | 9041 | 95 | 4 | 9901 | 99 | 10 | 10861 | 45 | 94 | 11833 | 13 | 108 |
| 7433 | 53 | 68 | 8233 | 77 | 48 | 9049 | 93 | 20 | 9929 | 85 | 52 | 10889 | 67 | 80 | 11897 | 109 | 4 |
| 7457 | 41 | 76 | 8237 | 29 | 86 | 9109 | 55 | 78 | 9941 | 71 | 70 | 10909 | 53 | 90 | 11909 | 97 | 50 |
| 7477 | 9 | 86 | 8269 | 13 | 90 | 9133 | 93 | 22 | 9949 | 43 | 90 | 10937 | 11 | 104 | 11933 | 107 | 22 |
| 7481 | 85 | 16 | 8273 | 23 | 88 | 9137 | 71 | 64 | 9973 | 57 | 82 | 10949 | 65 | 82 | 11941 | 95 | 54 |
| 7489 | 33 | 80 | 8293 | 47 | 78 | 9157 | 79 | 54 | 10009 | 3 | 100 | 10957 | 99 | 34 | 11953 | 17 | 108 |
| 7517 | 11 | 86 | 8297 | 91 | 4 | 9161 | 85 | 44 | 10037 | 89 | 46 | 10973 | 37 | 98 | 11969 | 65 | 88 |
| 7529 | 77 | 40 | 8317 | 91 | 6 | 9173 | 73 | 62 | 10061 | 35 | 94 | 10993 | 57 | 88 | 11981 | 109 | 10 |
| 7537 | 79 | 36 | | | | | | | | | | | | | | | |

## II. Zerfällung der Primzahlen $p$ von der Form $6n+1$ in ein Quadrat und das Dreifache eines andern Quadrats.

$$p = A^2 + 3B^2.$$

| $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 1 | 433 | 1 | 12 | 997 | 5 | 18 | 1567 | 22 | 19 | 2143 | 46 | 3 | 2767 | 38 | 21 |
| 13 | 1 | 2 | 439 | 14 | 9 | 1009 | 31 | 4 | 1579 | 16 | 21 | 2161 | 31 | 20 | 2791 | 46 | 15 |
| 19 | 4 | 1 | 457 | 5 | 12 | 1021 | 7 | 18 | 1597 | 25 | 18 | 2179 | 44 | 9 | 2797 | 47 | 14 |
| 31 | 2 | 3 | 463 | 10 | 11 | 1033 | 29 | 8 | 1609 | 29 | 16 | 2203 | 4 | 27 | 2803 | 44 | 17 |
| 37 | 5 | 2 | 487 | 22 | 1 | 1039 | 26 | 11 | 1621 | 13 | 22 | 2221 | 47 | 2 | 2833 | 49 | 12 |
| 43 | 4 | 3 | 499 | 16 | 9 | 1051 | 32 | 3 | 1627 | 40 | 3 | 2239 | 34 | 19 | 2851 | 52 | 7 |
| 61 | 7 | 2 | 523 | 4 | 13 | 1063 | 14 | 17 | 1657 | 35 | 12 | 2251 | 8 | 27 | 2857 | 53 | 4 |
| 67 | 8 | 1 | 541 | 23 | 2 | 1069 | 31 | 6 | 1663 | 34 | 13 | 2269 | 41 | 14 | 2887 | 2 | 31 |
| 73 | 5 | 4 | 547 | 20 | 7 | 1087 | 2 | 19 | 1669 | 37 | 10 | 2281 | 43 | 12 | 2917 | 53 | 6 |
| 79 | 2 | 5 | 571 | 8 | 13 | 1093 | 11 | 18 | 1693 | 41 | 2 | 2287 | 10 | 27 | 2953 | 35 | 24 |
| 97 | 7 | 4 | 577 | 23 | 4 | 1117 | 23 | 14 | 1699 | 32 | 15 | 2293 | 29 | 22 | 2971 | 28 | 27 |
| 103 | 10 | 1 | 601 | 13 | 12 | 1123 | 16 | 17 | 1723 | 20 | 21 | 2311 | 38 | 17 | 3001 | 53 | 8 |
| 109 | 1 | 6 | 607 | 10 | 13 | 1129 | 19 | 16 | 1741 | 17 | 22 | 2341 | 37 | 18 | 3019 | 44 | 19 |
| 127 | 10 | 3 | 613 | 5 | 14 | 1153 | 31 | 8 | 1747 | 40 | 7 | 2347 | 32 | 21 | 3037 | 55 | 2 |
| 139 | 8 | 5 | 619 | 16 | 11 | 1171 | 32 | 7 | 1753 | 5 | 24 | 2371 | 28 | 23 | 3049 | 43 | 20 |
| 151 | 2 | 7 | 631 | 22 | 7 | 1201 | 1 | 20 | 1759 | 26 | 19 | 2377 | 5 | 28 | 3061 | 19 | 30 |
| 157 | 7 | 6 | 643 | 20 | 9 | 1213 | 25 | 14 | 1777 | 7 | 24 | 2383 | 14 | 27 | 3067 | 52 | 11 |
| 163 | 4 | 7 | 661 | 19 | 10 | 1231 | 34 | 5 | 1783 | 14 | 23 | 2389 | 19 | 26 | 3079 | 14 | 31 |
| 181 | 13 | 2 | 673 | 25 | 4 | 1237 | 35 | 2 | 1789 | 41 | 6 | 2437 | 43 | 14 | 3109 | 53 | 10 |
| 193 | 1 | 8 | 691 | 4 | 15 | 1249 | 7 | 20 | 1801 | 37 | 12 | 2467 | 40 | 17 | 3121 | 7 | 32 |
| 199 | 14 | 1 | 709 | 11 | 14 | 1279 | 14 | 19 | 1831 | 34 | 15 | 2473 | 11 | 28 | 3163 | 56 | 3 |
| 211 | 8 | 7 | 727 | 22 | 9 | 1291 | 28 | 13 | 1861 | 43 | 2 | 2503 | 50 | 1 | 3169 | 49 | 16 |
| 223 | 14 | 3 | 733 | 25 | 6 | 1297 | 23 | 16 | 1867 | 28 | 19 | 2521 | 13 | 28 | 3181 | 47 | 18 |
| 229 | 11 | 6 | 739 | 8 | 15 | 1303 | 34 | 7 | 1873 | 41 | 8 | 2539 | 4 | 29 | 3187 | 40 | 23 |
| 241 | 7 | 8 | 751 | 26 | 5 | 1321 | 11 | 20 | 1879 | 2 | 25 | 2551 | 26 | 25 | 3217 | 55 | 8 |
| 271 | 14 | 5 | 757 | 13 | 14 | 1327 | 2 | 21 | 1933 | 31 | 18 | 2557 | 23 | 26 | 3229 | 23 | 30 |
| 277 | 13 | 6 | 769 | 1 | 16 | 1381 | 37 | 2 | 1951 | 38 | 13 | 2593 | 49 | 8 | 3253 | 35 | 26 |
| 283 | 16 | 3 | 787 | 28 | 1 | 1399 | 34 | 9 | 1987 | 20 | 23 | 2617 | 43 | 16 | 3259 | 44 | 21 |
| 307 | 8 | 9 | 811 | 28 | 3 | 1423 | 10 | 21 | 1993 | 35 | 16 | 2647 | 50 | 7 | 3271 | 2 | 33 |
| 313 | 11 | 8 | 823 | 26 | 7 | 1429 | 29 | 14 | 1999 | 26 | 21 | 2659 | 28 | 25 | 3301 | 43 | 22 |
| 331 | 16 | 5 | 829 | 23 | 10 | 1447 | 38 | 1 | 2011 | 44 | 5 | 2671 | 22 | 27 | 3307 | 28 | 29 |
| 337 | 17 | 4 | 853 | 29 | 2 | 1453 | 1 | 22 | 2017 | 17 | 24 | 2677 | 35 | 22 | 3313 | 31 | 28 |
| 349 | 7 | 10 | 859 | 28 | 5 | 1459 | 28 | 15 | 2029 | 1 | 26 | 2683 | 40 | 19 | 3319 | 38 | 25 |
| 367 | 2 | 11 | 877 | 17 | 14 | 1471 | 38 | 3 | 2053 | 5 | 26 | 2689 | 31 | 24 | 3331 | 8 | 33 |
| 373 | 19 | 2 | 907 | 20 | 13 | 1483 | 20 | 19 | 2083 | 44 | 7 | 2707 | 52 | 1 | 3343 | 34 | 27 |
| 379 | 4 | 11 | 919 | 26 | 9 | 1489 | 17 | 20 | 2089 | 19 | 24 | 2713 | 19 | 28 | 3361 | 17 | 32 |
| 397 | 17 | 6 | 937 | 13 | 16 | 1531 | 32 | 13 | 2113 | 41 | 12 | 2719 | 14 | 29 | 3373 | 49 | 18 |
| 409 | 19 | 4 | 967 | 10 | 17 | 1543 | 26 | 17 | 2131 | 16 | 25 | 2731 | 52 | 3 | 3391 | 58 | 3 |
| 421 | 11 | 10 | 991 | 22 | 13 | 1549 | 31 | 14 | 2137 | 37 | 16 | 2749 | 7 | 30 | 3433 | 19 | 32 |

| p | A | B | p | A | B | p | A | B | p | A | B | p | A | B | p | A | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3457 | 55 | 12 | 4177 | 17 | 36 | 4999 | 46 | 31 | 5827 | 28 | 41 | 6661 | 37 | 42 | 7549 | 7 | 50 |
| 3463 | 14 | 33 | 4201 | 43 | 28 | 5011 | 56 | 25 | 5839 | 74 | 11 | 6673 | 79 | 12 | 7561 | 67 | 32 |
| 3469 | 1 | 34 | 4219 | 56 | 19 | 5023 | 50 | 29 | 5851 | 76 | 5 | 6679 | 46 | 39 | 7573 | 35 | 46 |
| 3499 | 56 | 11 | 4231 | 58 | 17 | 5059 | 4 | 41 | 5857 | 7 | 44 | 6691 | 8 | 47 | 7591 | 82 | 17 |
| 3511 | 58 | 7 | 4243 | 64 | 7 | 5077 | 67 | 14 | 5869 | 49 | 34 | 6703 | 34 | 43 | 7603 | 20 | 49 |
| 3517 | 7 | 34 | 4261 | 53 | 22 | 5101 | 49 | 30 | 5881 | 53 | 32 | 6709 | 19 | 46 | 7621 | 11 | 50 |
| 3529 | 59 | 4 | 4273 | 65 | 4 | 5107 | 8 | 41 | 5923 | 76 | 7 | 6733 | 49 | 38 | 7639 | 86 | 9 |
| 3541 | 29 | 30 | 4297 | 35 | 32 | 5113 | 35 | 36 | 5953 | 65 | 24 | 6763 | 80 | 11 | 7669 | 13 | 50 |
| 3547 | 32 | 29 | 4327 | 38 | 31 | 5119 | 38 | 35 | 6007 | 38 | 39 | 6781 | 73 | 22 | 7681 | 73 | 28 |
| 3559 | 26 | 31 | 4339 | 64 | 9 | 5167 | 62 | 21 | 6037 | 77 | 6 | 6793 | 61 | 32 | 7687 | 22 | 49 |
| 3571 | 52 | 17 | 4357 | 5 | 38 | 5179 | 64 | 19 | 6043 | 44 | 37 | 6823 | 14 | 47 | 7699 | 56 | 39 |
| 3583 | 50 | 19 | 4363 | 16 | 37 | 5197 | 65 | 18 | 6067 | 32 | 41 | 6829 | 79 | 14 | 7717 | 37 | 46 |
| 3607 | 58 | 9 | 4423 | 34 | 33 | 5209 | 59 | 24 | 6073 | 61 | 28 | 6841 | 67 | 28 | 7723 | 80 | 21 |
| 3613 | 55 | 14 | 4441 | 37 | 32 | 5227 | 52 | 29 | 6079 | 2 | 45 | 6871 | 82 | 7 | 7741 | 71 | 30 |
| 3631 | 38 | 27 | 4447 | 58 | 19 | 5233 | 71 | 8 | 6091 | 4 | 45 | 6883 | 16 | 47 | 7753 | 29 | 48 |
| 3637 | 13 | 34 | 4483 | 40 | 31 | 5281 | 47 | 32 | 6121 | 77 | 8 | 6907 | 80 | 13 | 7759 | 86 | 11 |
| 3643 | 56 | 13 | 4507 | 20 | 37 | 5323 | 56 | 27 | 6133 | 29 | 42 | 6949 | 59 | 34 | 7789 | 17 | 50 |
| 3673 | 59 | 8 | 4513 | 25 | 36 | 5347 | 28 | 39 | 6151 | 74 | 15 | 6961 | 7 | 48 | 7867 | 8 | 51 |
| 3691 | 4 | 35 | 4519 | 62 | 15 | 5407 | 70 | 13 | 6163 | 40 | 39 | 6967 | 82 | 9 | 7873 | 31 | 48 |
| 3697 | 25 | 32 | 4549 | 43 | 30 | 5413 | 11 | 42 | 6199 | 34 | 41 | 6991 | 38 | 43 | 7879 | 26 | 49 |
| 3709 | 41 | 26 | 4561 | 47 | 28 | 5419 | 64 | 21 | 6211 | 68 | 23 | 6997 | 83 | 6 | 7927 | 58 | 39 |
| 3727 | 58 | 11 | 4567 | 2 | 39 | 5431 | 62 | 23 | 6217 | 67 | 24 | 7027 | 20 | 47 | 7933 | 89 | 2 |
| 3733 | 61 | 2 | 4591 | 22 | 37 | 5437 | 73 | 6 | 6229 | 77 | 10 | 7039 | 58 | 35 | 7951 | 62 | 37 |
| 3739 | 8 | 35 | 4597 | 67 | 6 | 5443 | 20 | 41 | 6247 | 58 | 31 | 7057 | 73 | 24 | 7963 | 76 | 27 |
| 3769 | 61 | 4 | 4603 | 64 | 13 | 5449 | 61 | 24 | 6271 | 14 | 45 | 7069 | 71 | 26 | 7993 | 85 | 16 |
| 3793 | 55 | 16 | 4621 | 17 | 38 | 5479 | 74 | 1 | 6277 | 53 | 34 | 7129 | 77 | 20 | 8011 | 44 | 45 |
| 3823 | 50 | 21 | 4639 | 46 | 29 | 5503 | 74 | 3 | 6301 | 73 | 18 | 7159 | 46 | 41 | 8017 | 47 | 44 |
| 3847 | 62 | 1 | 4651 | 68 | 3 | 5521 | 73 | 8 | 6337 | 23 | 44 | 7177 | 37 | 44 | 8053 | 61 | 38 |
| 3853 | 49 | 22 | 4657 | 65 | 12 | 5527 | 22 | 41 | 6343 | 74 | 17 | 7207 | 2 | 49 | 8059 | 16 | 51 |
| 3877 | 43 | 26 | 4663 | 10 | 39 | 5557 | 35 | 38 | 6361 | 77 | 12 | 7213 | 79 | 18 | 8089 | 83 | 20 |
| 3889 | 1 | 36 | 4723 | 56 | 23 | 5563 | 4 | 43 | 6367 | 62 | 29 | 7219 | 4 | 49 | 8101 | 53 | 48 |
| 3907 | 32 | 31 | 4729 | 29 | 36 | 5569 | 41 | 36 | 6373 | 5 | 46 | 7237 | 85 | 2 | 8161 | 7 | 52 |
| 3919 | 62 | 5 | 4759 | 14 | 39 | 5581 | 17 | 42 | 6379 | 52 | 35 | 7243 | 56 | 37 | 8167 | 70 | 33 |
| 3931 | 16 | 35 | 4783 | 26 | 37 | 5623 | 74 | 7 | 6397 | 7 | 46 | 7297 | 65 | 32 | 8179 | 56 | 41 |
| 3943 | 26 | 33 | 4789 | 67 | 10 | 5641 | 29 | 40 | 6421 | 61 | 30 | 7309 | 31 | 46 | 8191 | 46 | 45 |
| 3967 | 38 | 29 | 4801 | 1 | 40 | 5647 | 10 | 43 | 6433 | 79 | 8 | 7321 | 83 | 12 | 8209 | 49 | 44 |
| 4003 | 56 | 17 | 4813 | 65 | 14 | 5653 | 19 | 42 | 6451 | 76 | 15 | 7333 | 85 | 6 | 8221 | 89 | 10 |
| 4021 | 61 | 10 | 4831 | 34 | 35 | 5659 | 56 | 29 | 6469 | 11 | 46 | 7351 | 74 | 25 | 8233 | 11 | 52 |
| 4027 | 52 | 21 | 4861 | 23 | 38 | 5683 | 64 | 23 | 6481 | 41 | 44 | 7369 | 59 | 36 | 8263 | 86 | 17 |
| 4051 | 28 | 33 | 4903 | 70 | 1 | 5689 | 67 | 20 | 6529 | 73 | 20 | 7393 | 71 | 28 | 8269 | 79 | 26 |
| 4057 | 13 | 36 | 4909 | 47 | 30 | 5701 | 37 | 38 | 6547 | 80 | 7 | 7411 | 28 | 47 | 8287 | 22 | 51 |
| 4093 | 25 | 34 | 4933 | 59 | 22 | 5737 | 43 | 36 | 6553 | 59 | 32 | 7417 | 85 | 8 | 8293 | 91 | 2 |
| 4099 | 64 | 1 | 4951 | 58 | 23 | 5743 | 14 | 43 | 6571 | 32 | 43 | 7459 | 16 | 49 | 8311 | 82 | 23 |
| 4111 | 2 | 37 | 4957 | 25 | 38 | 5749 | 61 | 26 | 6577 | 65 | 28 | 7477 | 83 | 14 | 8317 | 55 | 42 |
| 4129 | 49 | 24 | 4969 | 13 | 40 | 5779 | 76 | 1 | 6607 | 50 | 37 | 7489 | 41 | 44 | 8329 | 91 | 4 |
| 4153 | 61 | 12 | 4987 | 68 | 11 | 5791 | 46 | 35 | 6619 | 64 | 29 | 7507 | 68 | 31 | 8353 | 89 | 12 |
| 4159 | 22 | 35 | 4993 | 65 | 16 | 5821 | 23 | 42 | 6637 | 17 | 46 | 7537 | 25 | 48 | 8377 | 67 | 36 |

| $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ | $p$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8389 | 91 | 6 | 8941 | 79 | 30 | 9547 | 92 | 19 | 10099 | 32 | 55 | 10753 | 95 | 24 | 11353 | 91 | 32 |
| 8419 | 88 | 15 | 8971 | 92 | 13 | 9601 | 97 | 8 | 10111 | 98 | 13 | 10771 | 32 | 57 | 11383 | 106 | 7 |
| 8431 | 2 | 53 | 9001 | 77 | 32 | 9613 | 95 | 14 | 10141 | 7 | 58 | 10789 | 101 | 14 | 11437 | 97 | 26 |
| 8443 | 4 | 53 | 9007 | 70 | 37 | 9619 | 88 | 25 | 10159 | 94 | 21 | 10831 | 82 | 37 | 11443 | 80 | 41 |
| 8461 | 31 | 50 | 9013 | 61 | 42 | 9631 | 98 | 3 | 10177 | 97 | 16 | 10837 | 67 | 46 | 11467 | 32 | 59 |
| 8467 | 92 | 1 | 9043 | 76 | 33 | 9643 | 64 | 43 | 10243 | 100 | 9 | 10861 | 97 | 22 | 11491 | 104 | 15 |
| 8521 | 61 | 40 | 9049 | 91 | 16 | 9649 | 89 | 24 | 10267 | 88 | 29 | 10867 | 100 | 17 | 11497 | 107 | 4 |
| 8527 | 10 | 53 | 9067 | 88 | 21 | 9661 | 73 | 38 | 10273 | 89 | 28 | 10891 | 104 | 5 | 11503 | 86 | 37 |
| 8539 | 92 | 5 | 9091 | 4 | 55 | 9679 | 98 | 5 | 10303 | 50 | 51 | 10903 | 34 | 57 | 11527 | 70 | 47 |
| 8563 | 44 | 47 | 9103 | 26 | 53 | 9697 | 17 | 56 | 10321 | 47 | 52 | 10909 | 103 | 10 | 11551 | 74 | 45 |
| 8581 | 91 | 10 | 9109 | 19 | 54 | 9721 | 53 | 48 | 10333 | 71 | 42 | 10939 | 56 | 51 | 11587 | 100 | 23 |
| 8599 | 82 | 25 | 9127 | 50 | 47 | 9733 | 91 | 22 | 10357 | 83 | 34 | 10957 | 47 | 54 | 11593 | 59 | 52 |
| 8623 | 14 | 53 | 9133 | 95 | 6 | 9739 | 44 | 51 | 10369 | 31 | 56 | 10987 | 92 | 29 | 11617 | 47 | 56 |
| 8629 | 77 | 30 | 9151 | 74 | 35 | 9769 | 19 | 56 | 10399 | 82 | 35 | 10993 | 89 | 32 | 11677 | 73 | 46 |
| 8641 | 23 | 52 | 9157 | 53 | 46 | 9781 | 67 | 42 | 10429 | 41 | 54 | 11047 | 62 | 49 | 11689 | 83 | 40 |
| 8647 | 38 | 49 | 9181 | 41 | 50 | 9787 | 92 | 21 | 10453 | 19 | 58 | 11059 | 104 | 9 | 11701 | 13 | 62 |
| 8677 | 85 | 22 | 9187 | 68 | 39 | 9811 | 8 | 57 | 10459 | 4 | 59 | 11071 | 86 | 35 | 11719 | 94 | 31 |
| 8689 | 89 | 16 | 9199 | 94 | 11 | 9817 | 77 | 36 | 10477 | 95 | 22 | 11083 | 100 | 19 | 11731 | 92 | 33 |
| 8707 | 92 | 9 | 9241 | 83 | 28 | 9829 | 59 | 46 | 10501 | 101 | 10 | 11113 | 85 | 36 | 11743 | 106 | 13 |
| 8713 | 91 | 12 | 9277 | 23 | 54 | 9859 | 28 | 55 | 10513 | 49 | 52 | 11119 | 26 | 59 | 11779 | 52 | 55 |
| 8719 | 86 | 21 | 9283 | 80 | 31 | 9871 | 38 | 53 | 10531 | 28 | 57 | 11131 | 52 | 53 | 11821 | 17 | 62 |
| 8731 | 68 | 37 | 9319 | 46 | 49 | 9883 | 76 | 37 | 10567 | 58 | 49 | 11149 | 49 | 54 | 11827 | 68 | 49 |
| 8737 | 25 | 52 | 9337 | 35 | 52 | 9901 | 49 | 50 | 10597 | 43 | 54 | 11161 | 19 | 60 | 11833 | 61 | 52 |
| 8761 | 43 | 48 | 9343 | 94 | 13 | 9907 | 52 | 49 | 10627 | 88 | 31 | 11173 | 101 | 18 | 11839 | 26 | 61 |
| 8779 | 52 | 45 | 9349 | 43 | 50 | 9931 | 88 | 27 | 10639 | 14 | 59 | 11197 | 103 | 14 | 11863 | 46 | 57 |
| 8803 | 40 | 49 | 9391 | 62 | 43 | 9949 | 89 | 26 | 10651 | 92 | 27 | 11239 | 106 | 1 | 11887 | 38 | 59 |
| 8821 | 67 | 38 | 9397 | 77 | 34 | 9967 | 98 | 11 | 10657 | 103 | 4 | 11251 | 68 | 47 | 11923 | 4 | 63 |
| 8839 | 94 | 1 | 9403 | 40 | 51 | 9973 | 35 | 54 | 10663 | 86 | 33 | 11257 | 43 | 56 | 11941 | 43 | 58 |
| 8863 | 94 | 3 | 9421 | 97 | 2 | 10009 | 91 | 24 | 10687 | 98 | 19 | 11287 | 82 | 39 | 11953 | 71 | 48 |
| 8887 | 62 | 41 | 9433 | 5 | 56 | 10039 | 74 | 39 | 10711 | 94 | 25 | 11299 | 64 | 49 | 11959 | 86 | 39 |
| 8893 | 89 | 18 | 9439 | 58 | 45 | 10069 | 61 | 46 | 10723 | 64 | 47 | 11317 | 35 | 58 | 11971 | 8 | 63 |
| 8923 | 80 | 29 | 9463 | 70 | 39 | 10093 | 1 | 58 | 10729 | 77 | 40 | 11329 | 23 | 60 | 12007 | 10 | 63 |
| 8929 | 71 | 36 | 9511 | 94 | 15 | | | | | | | | | | | | |

## III. Tabelle für die Zerfällung der Primzahlen von der Form $8n+1$ in ein Quadrat und das Doppelte eines andern Quadrats *).

$$p = cc+2dd.$$

| $p$ | $c$ | $d$ | $p$ | $c$ | $d$ | $p$ | $c$ | $d$ | $p$ | $c$ | $d$ | $p$ | $c$ | $d$ | $p$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 3 | 2 | 857 | 27 | 8 | 1777 | 25 | 24 | 2753 | 21 | 34 | 3793 | 61 | 6 | 4801 | 47 | 36 |
| 41 | 3 | 4 | 881 | 9 | 20 | 1801 | 1 | 30 | 2777 | 27 | 32 | 3833 | 39 | 34 | 4817 | 57 | 28 |
| 73 | 1 | 6 | 929 | 27 | 10 | 1873 | 35 | 18 | 2801 | 51 | 10 | 3881 | 3 | 44 | 4889 | 69 | 8 |
| 89 | 9 | 2 | 937 | 17 | 18 | 1889 | 33 | 20 | 2833 | 41 | 24 | 3889 | 19 | 42 | 4937 | 63 | 22 |
| 97 | 5 | 6 | 953 | 21 | 16 | 1913 | 39 | 14 | 2857 | 47 | 18 | 3929 | 27 | 40 | 4969 | 19 | 48 |
| 113 | 9 | 4 | 977 | 3 | 22 | 1993 | 29 | 24 | 2897 | 3 | 38 | 4001 | 63 | 4 | 4993 | 49 | 36 |
| 137 | 3 | 8 | 1009 | 19 | 18 | 2017 | 37 | 18 | 2953 | 19 | 36 | 4049 | 57 | 20 | 5009 | 3 | 50 |
| 193 | 11 | 6 | 1033 | 31 | 6 | 2081 | 27 | 26 | 2969 | 9 | 38 | 4057 | 23 | 42 | 5081 | 9 | 50 |
| 233 | 15 | 2 | 1049 | 9 | 22 | 2089 | 17 | 30 | 3001 | 43 | 24 | 4073 | 45 | 32 | 5113 | 71 | 6 |
| 241 | 13 | 6 | 1097 | 33 | 2 | 2113 | 31 | 24 | 3041 | 27 | 34 | 4129 | 59 | 18 | 5153 | 69 | 14 |
| 257 | 15 | 4 | 1129 | 29 | 12 | 2129 | 9 | 32 | 3049 | 49 | 18 | 4153 | 25 | 42 | 5209 | 41 | 42 |
| 281 | 9 | 10 | 1153 | 1 | 24 | 2137 | 43 | 12 | 3089 | 39 | 28 | 4177 | 55 | 24 | 5233 | 25 | 48 |
| 313 | 5 | 12 | 1193 | 15 | 22 | 2153 | 45 | 8 | 3121 | 23 | 36 | 4201 | 49 | 30 | 5273 | 69 | 16 |
| 337 | 7 | 12 | 1201 | 7 | 24 | 2161 | 19 | 30 | 3137 | 33 | 32 | 4217 | 57 | 22 | 5281 | 59 | 30 |
| 353 | 15 | 8 | 1217 | 33 | 8 | 2273 | 15 | 32 | 3169 | 37 | 30 | 4241 | 3 | 46 | 5297 | 57 | 32 |
| 401 | 3 | 14 | 1249 | 31 | 12 | 2281 | 47 | 6 | 3209 | 3 | 40 | 4273 | 41 | 36 | 5393 | 39 | 44 |
| 409 | 11 | 12 | 1289 | 33 | 10 | 2297 | 27 | 28 | 3217 | 25 | 36 | 4289 | 33 | 40 | 5417 | 3 | 52 |
| 433 | 19 | 6 | 1297 | 35 | 6 | 2377 | 35 | 24 | 3257 | 57 | 2 | 4297 | 65 | 6 | 5441 | 21 | 50 |
| 449 | 21 | 2 | 1321 | 13 | 24 | 2393 | 9 | 34 | 3313 | 55 | 12 | 4337 | 45 | 34 | 5449 | 29 | 48 |
| 457 | 13 | 12 | 1361 | 3 | 26 | 2417 | 45 | 14 | 3329 | 21 | 38 | 4409 | 39 | 38 | 5521 | 61 | 30 |
| 521 | 3 | 16 | 1409 | 21 | 22 | 2441 | 33 | 26 | 3361 | 47 | 24 | 4441 | 43 | 36 | 5569 | 31 | 48 |
| 569 | 21 | 8 | 1433 | 9 | 26 | 2473 | 49 | 6 | 3433 | 29 | 36 | 4457 | 15 | 46 | 5641 | 67 | 24 |
| 577 | 17 | 12 | 1481 | 33 | 14 | 2521 | 37 | 24 | 3449 | 57 | 10 | 4481 | 63 | 16 | 5657 | 75 | 4 |
| 593 | 9 | 16 | 1489 | 29 | 18 | 2593 | 1 | 36 | 3457 | 53 | 18 | 4513 | 65 | 12 | 5689 | 71 | 18 |
| 601 | 23 | 6 | 1553 | 39 | 4 | 2609 | 51 | 2 | 3529 | 1 | 42 | 4561 | 67 | 6 | 5737 | 47 | 42 |
| 617 | 15 | 14 | 1601 | 33 | 16 | 2617 | 5 | 36 | 3593 | 45 | 28 | 4649 | 51 | 32 | 5801 | 51 | 40 |
| 641 | 21 | 10 | 1609 | 31 | 18 | 2633 | 51 | 4 | 3617 | 27 | 38 | 4657 | 7 | 48 | 5849 | 21 | 52 |
| 673 | 5 | 18 | 1657 | 37 | 12 | 2657 | 33 | 28 | 3673 | 55 | 18 | 4673 | 21 | 46 | 5857 | 5 | 54 |
| 761 | 27 | 4 | 1697 | 27 | 22 | 2689 | 49 | 12 | 3697 | 13 | 42 | 4721 | 39 | 40 | 5881 | 7 | 54 |
| 769 | 11 | 18 | 1721 | 39 | 10 | 2713 | 11 | 36 | 3761 | 57 | 16 | 4729 | 11 | 48 | 5897 | 45 | 44 |
| 809 | 3 | 20 | 1753 | 41 | 6 | 2729 | 51 | 8 | 3769 | 59 | 12 | 4793 | 69 | 4 | 5953 | 11 | 54 |

*) Der verstorbne Director des altstädtischen Gymnasiums in Königsberg i. Pr., Dr. *Struve*, einer der geistreichsten Philologen, machte mir sehr umfangreiche Papiere zum Geschenk, welche die Zerfällungen aller geraden Zahlen bis 12000 in drei Quadrate enthalten. Aus diesen ist die vorstehende Tabelle entnommen. Leider sind in diesen Berechnungen, welche von ihm zur Zerstreuung in einer schweren Krankheit unternommen wurden, bisweilen einige der oft sehr zahlreichen Zerfällungen einer Zahl ausgelassen, wodurch der Werth dieser mühevollen und interessanten Arbeit verringert wird.

# IV. Tabelle der Zahlen $m'$ für das Argument $m$ *).

$$1+g^m \equiv g^{m'} \pmod{p}.$$

| $p$ | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 3 | 2 | 6 | 10 | 10 | 10 | 10 | 17 | 5 | 6 | 28 | 10 | 26 | 10 | 10 | 12 | 62 | 5 | 29 | 50 | 30 | 10 | 2 | 35 |
| $m$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 1 | 5 | 10 | 17 | 8 | 11 | 12 | 11 | 26 | 39 | 30 | 25 | 25 | 47 | 29 | 58 | 8 | 50 | 3 | 72 | 86 | 1 | 70 |
| 1 | 4 | 8 | 7 | 13 | 6 | 3 | 23 | 8 | 9 | 39 | 25 | 27 | 27 | 45 | 45 | 23 | 69 | 14 | 77 | 56 | 57 | 82 | 69 | 74 |
| 2 | 1 | 4 | 11 | 8 | 4 | 18 | 3 | 29 | 24 | 32 | 6 | 38 | 33 | 43 | 35 | 61 | 43 | 67 | 18 | 72 | 4 | 76 | 24 | 60 |
| 3 | * | 6 | 4 | 2 | 13 | 14 | 17 | 18 | 35 | 27 | 20 | 22 | 15 | 54 | 28 | 56 | 59 | 53 | 51 | 52 | 66 | 26 | 38 | 100 |
| 4 | 5 | 9 | 2 | 7 | 12 | 5 | 8 | 6 | 16 | 17 | 22 | 24 | 46 | 33 | 12 | 37 | 20 | 47 | 73 | 25 | 55 | 1 | 30 | 16 |
| 5 | 3 | * | 8 | 9 | 16 | 9 | 26 | 9 | 7 | 11 | 14 | 12 | 24 | 21 | 32 | 6 | 52 | 23 | 66 | 76 | 80 | 40 | 82 | 96 |
| 6 | . | 5 | * | 1 | 3 | 21 | 24 | 26 | 20 | 20 | 11 | 43 | 13 | 1 | 57 | 25 | 33 | 16 | 70 | 81 | 76 | 33 | 90 | 36 |
| 7 | . | 3 | 3 | 5 | 14 | 13 | 9 | 23 | 25 | 23 | 33 | 23 | 28 | 9 | 6 | 21 | 24 | 32 | 29 | 23 | 40 | 39 | 11 | 49 |
| 8 | . | 2 | 10 | * | 9 | 20 | 13 | 22 | 5 | 3 | 10 | 6 | 5 | 42 | 49 | 47 | 37 | 6 | 23 | 38 | 3 | 61 | 37 | 76 |
| 9 | . | 7 | 1 | 14 | * | 19 | 15 | 28 | 28 | 34 | 1 | 4 | 50 | 19 | 2 | 58 | 4 | 55 | 36 | 22 | 26 | 64 | 3 | 53 |
| 10 | . | . | 9 | 11 | 1 | 17 | 20 | 5 | 27 | 18 | 37 | 11 | 1 | 48 | 56 | 44 | 61 | 27 | 56 | 68 | 69 | 12 | 93 | 99 |
| 11 | . | . | 6 | 4 | 7 | * | 27 | 21 | 34 | 7 | 40 | 39 | 40 | 8 | 22 | 43 | 53 | 40 | 39 | 44 | 48 | 88 | 91 | 88 |
| 12 | . | . | . | 3 | 15 | 7 | 19 | 13 | 6 | 22 | 28 | 45 | 8 | 27 | 17 | 52 | 30 | 9 | 42 | 4 | 43 | 21 | 65 | 35 |
| 13 | . | . | . | 15 | 11 | 10 | 25 | 24 | 3 | 4 | 12 | 21 | 45 | 37 | 55 | 4 | 10 | 54 | 3 | 77 | 45 | 56 | 71 | 31 |
| 14 | . | . | . | 6 | 8 | 12 | * | 17 | 15 | 29 | 7 | 17 | 37 | 31 | 29 | 41 | 6 | 33 | 20 | 40 | 20 | 92 | 86 | 4 |
| 15 | . | . | . | 12 | 10 | 6 | 12 | * | 10 | 12 | 38 | 25 | 17 | 28 | 31 | 3 | 54 | 11 | 74 | 42 | 34 | 69 | 62 | 72 |
| 16 | . | . | . | . | . | 2 | 15 | 7 | 3 | 29 | 9 | 31 | 34 | 22 | 30 | 20 | 24 | 25 | 1 | 63 | 61 | 15 | 57 | 21 | 79 |
| 17 | . | . | . | . | . | 5 | 4 | 16 | 11 | 21 | 5 | 36 | 2 | 16 | 6 | 30 | 15 | 40 | 39 | 49 | 31 | 24 | 85 | 98 | 43 |
| 18 | . | . | . | . | . | . | 1 | 10 | 1 | * | 19 | 21 | 14 | 4 | 12 | 52 | 2 | 46 | 49 | 7 | 66 | 71 | 5 | 49 | 19 |
| 19 | . | . | . | . | . | . | 11 | 6 | 10 | 4 | 21 | 32 | 5 | 39 | 39 | 38 | 45 | 50 | 45 | 72 | 69 | 41 | 90 | 51 | 51 |
| 20 | . | . | . | . | . | . | 16 | 5 | 25 | 13 | * | 8 | 29 | 30 | 56 | 10 | 30 | 13 | 62 | 24 | 57 | 81 | 31 | 74 | 84 |
| 21 | . | . | . | . | . | . | 2 | 2 | 19 | 31 | 2 | * | 15 | 3 | 3 | 24 | 18 | 32 | 20 | 62 | 19 | 11 | 63 | 63 | 66 |
| 22 | . | . | . | . | . | . | . | 18 | 14 | 1 | 1 | 30 | 35 | 14 | 26 | 48 | 11 | 7 | 59 | 34 | 2 | 47 | 73 | 36 | 50 |
| 23 | . | . | . | . | . | . | . | 21 | 16 | 26 | 28 | 13 | * | 18 | 11 | 21 | 36 | 35 | 58 | 60 | 28 | 14 | 29 | 8 | 52 |
| 24 | . | . | . | . | . | . | . | 4 | 20 | 30 | 33 | 3 | 13 | 35 | 23 | 1 | 20 | 38 | 12 | 55 | 9 | 82 | 7 | 70 | 15 |
| 25 | . | . | . | . | . | . | . | 14 | 4 | 23 | 37 | 19 | 40 | 9 | 32 | 43 | 42 | 3 | 4 | 33 | 59 | 54 | 70 | 13 | 59 |
| 26 | . | . | . | . | . | . | . | 1 | 2 | 17 | 15 | 15 | 9 | * | 18 | 40 | 31 | 45 | 56 | 13 | 17 | 38 | 46 | 78 | 40 |
| 27 | . | . | . | . | . | . | . | 22 | 15 | 19 | 31 | 23 | 32 | 36 | 49 | 36 | 65 | 21 | 3 | 44 | 51 | 62 | 87 | 45 | 7 |
| 28 | . | . | . | . | . | . | . | . | 27 | 33 | 10 | 35 | 42 | 11 | 5 | 7 | 35 | 15 | 64 | 21 | 60 | 44 | 50 | 76 | 67 |
| 29 | . | . | . | . | . | . | . | . | 7 | 18 | 36 | 41 | 31 | 47 | * | 23 | 9 | 8 | 34 | 26 | 39 | 1 | 37 | 95 | 21 |
| 30 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 14 | 8 | 16 | 18 | 44 | 35 | * | 12 | 26 | 2 | 35 | 36 | 9 | 34 | 39 | 8 |
| 31 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 2 | 25 | 29 | 10 | 34 | 22 | 54 | 16 | 5 | 38 | 45 | 43 | 39 | 24 | 33 | 24 |
| 32 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 12 | 35 | 27 | 3 | 10 | 50 | 39 | 60 | 22 | 21 | 11 | 15 | 50 | 16 | 55 | 101 |
| 33 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 32 | 16 | 34 | 8 | 20 | 7 | 9 | * | 34 | 24 | 58 | 29 | 10 | 47 | 40 | 71 |
| 34 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 22 | 14 | 2 | 33 | 38 | 57 | 14 | 28 | 36 | 28 | 43 | 35 | 23 | 49 | 44 | 17 |
| 35 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 6 | 26 | 28 | 51 | 46 | 18 | 51 | * | 15 | 54 | 46 | 21 | 30 | 27 | 90 |
| 36 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 13 | 5 | 1 | 6 | 4 | 37 | 48 | 2 | * | 10 | 54 | 49 | 94 | 64 | 9 |
| 37 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 24 | 9 | 41 | 2 | 40 | 58 | 46 | 1 | 52 | 38 | 8 | 64 | 65 | 12 | 62 |
| 38 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 30 | 18 | 44 | 23 | 36 | 26 | 7 | 60 | 66 | 40 | 79 | 68 | 48 | 25 | 41 |
| 39 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 38 | 17 | 16 | 32 | 20 | 3 | 38 | 44 | 63 | * | 20 | 36 | 75 | 96 | 86 |
| 40 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 4 | 37 | 48 | 52 | 50 | 5 | 66 | 61 | 2 | 47 | 86 | 59 | 56 | 46 |
| 41 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 24 | 7 | 29 | 47 | 19 | 17 | 49 | 7 | 1 | * | 5 | 17 | 61 | 37 |

*) Diese Tabelle ist während der Wintervorlesungen 1836—37 von meinen Zuhörern berechnet worden. Vermittelst des seitdem von mir herausgegebnen *Canon Arithmeticus* (Berlin 1839 bei Dümmler) kann dieselbe leicht auf alle Primzahlen unter 1000 ausgedehnt werden. Setzt man nämlich für eine Primzahl $p$ unter 1000 eine Zahl der dort mit *Indices* überschriebnen Tabelle $= m$, so wird die unmittelbar folgende der Tabelle der entsprechende Werth von $m'$.

| $p$ | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 10 | 26 | 10 | 10 | 12 | 62 | 5 | 29 | 50 | 30 | 10 | 2 | 35 |
| $m$ | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | 20 | 43 | 14 | 34 | 62 | 57 | 44 | 52 | 7 | 84 | 67 | 15 | 27 |
| 43 | 19 | 41 | 13 | 13 | 13 | 64 | 5 | 19 | 63 | 28 | 13 | 60 | 22 |
| 44 | 36 | 49 | 17 | 4 | 55 | 19 | 36 | 9 | 41 | * | 62 | 41 | 20 |
| 45 | 26 | 21 | 24 | 16 | 63 | 48 | 48 | 25 | 53 | 73 | 44 | 79 | 56 |
| 46 | . | 7 | 15 | 15 | 10 | 14 | 30 | 57 | 18 | 42 | 84 | 89 | 48 |
| 47 | . | 19 | 55 | 42 | 26 | 12 | 51 | 14 | 11 | 52 | 3 | 6 | 10 |
| 48 | . | 42 | 38 | 5 | 50 | 55 | 60 | 5 | 1 | 46 | * | 67 | 61 |
| 49 | . | 12 | 10 | 11 | 64 | 11 | 35 | 75 | 78 | 85 | 52 | 99 | 54 |
| 50 | . | 31 | 34 | 46 | 8 | 63 | 37 | 71 | 65 | 30 | 38 | * | 83 |
| 51 | . | 26 | 2 | 53 | 54 | 31 | 71 | 17 | 12 | 27 | 95 | 50 | * |
| 52 | . | . | 53 | 41 | 27 | 28 | 42 | 65 | 6 | 13 | 18 | 19 | 33 |
| 53 | . | . | 16 | 59 | 57 | 23 | 26 | 8 | 10 | 74 | 66 | 59 | 5 |
| 54 | . | . | 29 | 51 | 40 | 9 | 31 | 31 | 32 | 77 | 25 | 43 | 13 |
| 55 | . | . | 51 | 27 | 32 | 39 | 22 | 37 | 24 | 65 | 72 | 34 | 65 |
| 56 | . | . | 41 | 8 | 34 | 62 | 57 | 12 | 73 | 18 | 19 | 97 | 2 |
| 57 | . | . | 44 | 25 | 49 | 67 | 68 | 41 | 34 | 8 | 36 | 17 | 11 |
| 58 | . | . | . | 33 | 39 | 18 | 19 | 4 | 67 | 67 | 10 | 73 | 78 |
| 59 | . | . | . | 44 | 14 | 42 | 41 | 53 | 5 | 60 | 28 | 20 | 81 |
| 60 | . | . | . | . | 19 | 51 | 69 | 67 | 62 | 16 | 58 | 16 | 87 |
| 61 | . | . | . | . | 1 | 65 | 29 | 32 | 80 | 35 | 91 | 57 | 98 |
| 62 | . | . | . | . | 33 | 29 | 17 | 47 | 37 | 12 | 15 | 87 | 6 |
| 63 | . | . | . | . | 53 | 17 | 46 | 59 | 50 | 29 | 14 | 75 | 47 |
| 64 | . | . | . | . | 59 | 27 | 70 | 6 | 48 | 58 | 80 | 28 | 3 |
| 65 | . | . | . | . | 22 | 47 | 25 | 68 | 14 | 79 | 89 | 92 | 25 |
| 66 | . | . | . | . | . | 16 | 10 | 30 | 45 | 25 | 4 | 10 | 75 |
| 67 | . | . | . | . | . | 56 | 18 | 28 | 27 | 78 | 8 | 7 | 55 |
| 68 | . | . | . | . | . | 41 | 43 | 46 | 26 | 61 | 22 | 23 | 85 |
| 69 | . | . | . | . | . | 68 | 50 | 27 | 64 | 22 | 60 | 2 | 38 |
| 70 | . | . | . | . | . | . | . | 65 | 15 | 74 | 53 | 20 | 9 | 69 |
| 71 | . | . | . | . | . | . | . | 13 | 22 | 33 | 7 | 45 | 66 | 95 |
| 72 | . | . | . | . | . | . | . | . | 64 | 58 | 87 | 79 | 48 | 80 |
| 73 | . | . | . | . | . | . | . | . | 61 | 13 | 19 | 6 | 18 | 94 |
| 74 | . | . | . | . | . | . | . | . | 69 | 30 | 6 | 51 | 52 | 39 |
| 75 | . | . | . | . | . | . | . | . | 48 | 16 | 32 | 42 | 88 | 82 |
| 76 | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | 75 | 31 | 11 | 46 | 14 |
| 77 | . | . | . | . | . | . | . | . | 76 | 71 | 37 | 71 | 85 | 34 |
| 78 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 21 | 59 | 83 | 14 | 93 |
| 79 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 49 | 17 | 68 | 42 | 29 |
| 80 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 70 | 83 | 41 | 54 | 28 |
| 81 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 55 | 33 | 54 | 32 | 45 |
| 82 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 70 | 78 | 31 | 64 |
| 83 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 75 | 43 | 81 | 32 |
| 84 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 51 | 9 | 5 | 1 |
| 85 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 63 | 77 | 47 | 26 |
| 86 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 2 | 2 | 72 | 63 |
| 87 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 56 | 55 | 58 | 57 |
| 88 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 53 | 53 | 92 |
| 89 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 32 | 80 | 18 |
| 90 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 27 | 83 | 23 |
| 91 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 35 | 94 | 77 |
| 92 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 93 | 29 | 89 |
| 94 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 23 | 4 | 44 |
| 93 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 74 | 84 | 68 |
| 95 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 81 | 77 | 42 |

| $p$ | 101 | 103 |
|---|---|---|
| $g$ | 2 | 35 |
| $m$ | | |
| 96 | 26 | 30 |
| 97 | 35 | 91 |
| 98 | 22 | 12 |
| 99 | 68 | 97 |
| 100 | | 58 |
| 101 | | 73 |
| 102 | | |

# 11.

# Note sur les fonctions Abéliennes,

lue le 29 mai 1843.

(Tiré du *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg Tome II. No. 7.*)

---

Soit $X$ une fonction rationnelle et entière de $x$ du sixième degré, et nommons $Y$ la même fonction de $y$; soit de plus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x), \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x).$$

Déterminons deux quantités $x$ et $y$ en fonctions de $u$ et $v$ par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

j'ai fait voir que ce sont ces fonctions de deux variables,

$$x = \lambda(u, v), \qquad y = \lambda_1(u, v),$$

qu'il convient d'introduire dans l'analyse des transcendantes ***Abéliennes,*** et qui sont analogues aux fonctions trigonométriques et elliptiques. Or je viens de trouver, ***que ces fonctions de deux variables se composent algébriquement de fonctions d'une seule variable.*** En effet, nommons $x'$ et $y'$ les valeurs de $x$ et de $y$, que l'on tire des deux équations transcendantes simultanées, en mettant $v=0$, et soient $x''$ et $y''$ celles qui répondent à $u=0$: on aura

$$\Pi(x')+\Pi(y') = u, \qquad \Pi_1(x')+\Pi_1(y') = 0,$$
$$\Pi(x'')+\Pi(y'') = 0, \qquad \Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = v,$$

d'où il suit,

$$\Pi(x')+\Pi(y')+\Pi(x'')+\Pi(y'') = u,$$
$$\Pi_1(x')+\Pi_1(y')+\Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = v.$$

Mais, d'après le théorème d'***Abel,*** on sait exprimer deux quantités $x$ et $y$ en fonctions ***algébriques*** des quatre variables $x'$, $x''$, $y'$, $y''$, de manière que l'on a les deux équations

$$u = \Pi(x')+\Pi(y')+\Pi(x'')+\Pi(y'') = \Pi(x)+\Pi(y),$$
$$v = \Pi_1(x')+\Pi_1(y')+\Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = \Pi_1(x)+\Pi_1(y).$$

Donc les deux fonctions $x$ et $y$ déterminées par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

sont des fonctions algébriques des quatre quantités $x'$, $x''$, $y'$, $y''$, qui ne sont

elles-mêmes que des fonctions d'une seule variable, ou en d'autres termes, *les deux fonctions de deux variables* $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ *s'expriment algébriquement par les quatre fonctions d'une seule variable*

$$\lambda(u, o), \quad \lambda_1(u, o),$$
$$\lambda(o, v), \quad \lambda_1(o, v).$$

La même remarque s'applique aux transcendantes *Abéliennes*, dans lesquelles la fonction $X$ est d'un degré quelconque *).

---

*) Dans un mémoire publié dans le vol. 27 du Journal de M. *Crelle* page 185, M. *Eisenstein* s'est mépris sur la nature des fonctions $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, faute d'avoir bien saisi le principe fondamental de la coëxistence des périodes relatives aux deux argumens $u$ et $v$. Le mémoire „Sur les fonctions à deux variables et à quatre périodes" tome XIII page 55 a posé les vrais principes dans cette branche nouvelle de l'analyse.

On sait que la fonction $x = \sin am(u)$ est donnée en $u$ au moyen d'une équation *linéaire*, $A + Bx = 0$, $A$ et $B$ étant des fonctions de $u$ qui ont une valeur unique et finie pour chaque valeur finie, réelle ou imaginaire, de l'argument $u$. D'une manière analogue, étant données les deux équations établies ci-dessus,

$$\Pi(x) + \Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x) + \Pi_1(y) = v,$$

les quantités $x$ et $y$ se trouvent être les deux racines d'une équation *quadratique*

$$A + Bt + Ct^2 = 0,$$

où $A$, $B$, $C$ sont des fonctions de $u$ et $v$ qui ont une valeur unique et finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires des deux argumens $u$ et $v$. C'est là la véritable nature des fonctions $x$ et $y$. Le caractère de la fonction $\sin am(u)$ étant d'être un *quotient* $-\frac{B}{A}$, M. *Eisenstein* dit (pg. 180), que, par analogie, dans la théorie des intégrales Abéliennes il faudrait considérer *des quotients de quotients*. Mais qu'est ce que c'est que *des quotients de quotients?* C'est tout simplement *des quotients*.

Dans le même mémoire M. *Eisenstein* a considéré certains produits doublement infinis, que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, et qu'il n'a pas reconnus être du nombre de ceux qui prennent des valeurs différentes suivant l'ordre dans lequel on range les facteurs. Ces erreurs, ayant été reproduites dans un autre mémoire (page 285 du même volume), ont été la cause, que M. *Eisenstein* y a établi des formules fautives relatives aux fonctions $\Theta(x)$. Les formules exactes ont été données depuis longtemps dans le mémoire tome IV pg. 382.

Oct. 1845. *J.*

# 12.

# Über einige, die elliptischen Functionen betreffenden Formeln.

Es sei

$$x = \sin\operatorname{am}(u, k), \quad \int_0^u (1-k^2x^2)\,du = E(u), \quad \int_0^u E(u) = \log\Omega.$$

Bedeutet $F(x)$ den rationellen Nenner der Substitution, welche eine Transformation der $n$ten Ordnung ergiebt, und $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ die transformirte Function, so wird

$$1. \qquad F(x) = e^{-\tau uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{(\Omega u)^n},$$

wo $\tau$ eine Constante ist. (S. *Crelle's* Journal Bd. IV. S. 374.) Es sei

$$x^2 = u^2(1 + S_1^{(2)}u^2 + S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}),$$

so wird

$$E(u) = u - k^2u^3\left\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}S_1^{(2)}u^2 + \tfrac{1}{7}S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}\right\},$$

$$2. \qquad \log\Omega(u) = \tfrac{1}{2}u^2 - k^2u^4\left\{\frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6}S_1^{(2)}u^2 + \frac{1}{7\cdot8}S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}\right\}.$$

Ist $T_m^{(2)}$ dieselbe Function von $\lambda$ wie $S_m^{(2)}$ von $k$, so folgt aus (1.) und (2.):

$$\log F(x) = -k^2\varrho u^2 - \frac{\lambda^2u^4}{M^4}\left(\frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6}T_1^{(2)}\frac{u^2}{M^2} + \frac{1}{7\cdot8}T_2^{(2)}\frac{u^4}{M^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ nk^2u^4\left(\frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6}S_1^{(2)}u^2 + \frac{1}{7\cdot8}S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}\right),$$

wo, wie am a. O. S. 372 (6.), $k\varrho = \frac{n}{2} + \tau - \frac{1}{2M^2}$. Setzt man jetzt

$$u^n = x^n\{1 + R_1^{(n)}x^2 + R_2^{(n)}x^4 + \text{etc.}\},$$
$$\log F(x) = C_1x^2 + C_2x^4 + C_3x^6 + \text{etc.},$$

so wird

$$3. \quad C_m = -k^2\varrho R_{m-1}^{(2)} - \lambda^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3\cdot4\cdot M^4} + \frac{R_{m-3}^{(6)}T_1^{(2)}}{5\cdot6\cdot M^6} + \frac{R_{m-4}^{(8)}T_2^{(2)}}{7\cdot8\cdot M^8} + \text{etc.}\right)$$
$$+ nk^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3\cdot4} + \frac{R_{m-3}^{(6)}S_1^{(2)}}{5\cdot6} + \frac{R_{m-4}^{(8)}S_2^{(2)}}{7\cdot8} + \text{etc.}\right).$$

Diese Formel umfafst auch die Multiplication. Soll nämlich $F(x)$ den Nenner in dem Ausdrucke von $\sin\operatorname{am}(nu)$ bedeuten, so hat man in (1.) und dem vor-

stehenden Werthe von $C_m$ nur $\tau = \varrho = 0$, $\lambda = k$, $M = n$ zu setzen; ferner $n^2$ für $n$ und $S$ für $T$. Hiedurch erhält man

$$C_m = -k^2\left\{\frac{n^4-n^2}{3\cdot4}R^{(4)}_{m-2} + \frac{n^6-n^2}{5\cdot6}R^{(6)}_{m-3}S^{(2)}_1 + \frac{n^8-n^2}{7\cdot8}R^{(8)}_{m-4}S^{(2)}_2 + \text{etc.}\right\}.$$

Auf diesem und ähnlichem Wege erhält man die von Herrn Dr. *Eisenstein* gegebnen, auf die Multiplication und Transformation bezüglichen Formeln, und zwar als eine unmittelbare Folge der Theoreme, durch welche man vermittelst der Transcendente $\Omega(u)$ den Zähler und Nenner der Multiplications- und Transformationsformeln abgesondert definiren kann.

Setzt man $\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}^{-\frac{1}{4}} = 1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \cdots$ und

4. $$\tfrac{1}{2}u^2 - \log\Omega(u) = k^2x^4(D_0 + D_1x^2 + D_2x^4 + \cdots)$$
$$= k^2\int(1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \cdots)(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}c_1x^5 + \tfrac{1}{7}c_2x^7 + \cdots)\,dx,$$

so wird

$$D_n = \frac{1}{2n+4}\left(\frac{1}{2n+3}c_n + \frac{1}{2n+1}c_1c_{n-1} + \frac{1}{2n-1}c_2c_{n-2} + \cdots \tfrac{1}{3}c_n\right).$$

Die Gröfse $D_{n-2}$ ist die in (3.) und *Fund.* S. 126 etc. vorkommende,

$$\frac{1}{3\cdot4}R^{(4)}_{n-2} + \frac{1}{5\cdot6}S^{(2)}_1R^{(6)}_{n-3} + \frac{1}{7\cdot8}S^{(2)}_2R^{(8)}_{n-4} + \cdots \frac{1}{(2n-1)2n}S^{(2)}_{n-2}\ ^*).$$

Für $k^2 = -1$ oder für die Lemniscate wird $\frac{d^2\cdot x^m}{du^2} = m(m-1)x^{m-2} - m(m+1)x^{m+2}$. Man erhält daher aus (4.), durch zweimalige Differentiation nach $u$,

$$x^2 = 3\cdot4D_0x^2 + 5\cdot6D_1x^4 + 7\cdot8D_2x^6 + 9\cdot10D_3x^8 + 11\cdot12D_4x^{10} + \cdots$$
$$- \{4\cdot5D_0x^6 + 6\cdot7D_1x^8 + 8\cdot9D_2x^{10} + \cdots\},$$

und hieraus $D_1 = D_3 = \cdots = 0$, $D_0 = \frac{1}{3\cdot4}$, $D_2 = \frac{1\cdot5}{3\cdot7\cdot8}$, etc., also

$$\log\Omega(u) - \tfrac{1}{2}uu = \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{5\cdot x^8}{3\cdot7\cdot8} + \frac{5\cdot9\cdot x^{12}}{3\cdot7\cdot11\cdot12} + \frac{5\cdot9\cdot13\cdot x^{16}}{3\cdot7\cdot11\cdot15\cdot16} + \cdots$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\tfrac{1}{2}uu = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{3\cdot x^6}{5\cdot6} + \frac{3\cdot7\cdot x^{10}}{5\cdot9\cdot10} + \frac{3\cdot7\cdot11\cdot x^{14}}{5\cdot9\cdot13\cdot14} + \cdots,$$

$$(n+1)\int_0^u du\int_0^u x^n\,du = \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(n+3)x^{n+6}}{(n+5)(n+6)} + \frac{(n+3)(n+7)x^{n+10}}{(n+5)(n+9)(n+10)} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}u^2\log x - \int_0^u du\int_0^u \log x\,du = \frac{b_0x^2}{2} + \frac{3b_1x^6}{5\cdot6} + \frac{3\cdot7\cdot b_2x^{10}}{5\cdot9\cdot10} + \cdots,$$

wo $b_i = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4i+1} + \frac{1}{4i+2}$.

Berlin, im Dec. 1845.

---

*) Am a. O. fehlen die Factoren $R^{(4)}_{n-2}$, $R^{(6)}_{n-3}$, etc.; auch ist *Fund.* S. 130 Z. 10 für $m+n$ zu lesen $2m+n$.

# 13.

# Über den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$ für beliebige imaginäre Werthe von $A$ und $B$ annimmt.

---

Ich will im Folgenden den Werth untersuchen, welchen das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$$

annimmt, wenn die Constanten $A$ und $B$ beliebige imaginäre Werthe haben, welche jedoch nicht so beschaffen sein dürfen, dafs die Function unter dem Integralzeichen für einen reellen Werth von $\varphi$ unendlich werden kann. Wenn die Constanten $A$ und $B$ reell sind, ist bekanntlich die Bedingung $AA+BB<1$ erforderlich, damit der Ausdruck unter dem Integralzeichen für keinen reellen Werth des Winkels $\varphi$ unendlich werden kann. Wenn man aber den Fall der Realität von $A$ und $B$ ausschliefst und

$$A=a+a'\sqrt{-1}, \qquad B=b+b'\sqrt{-1}$$

setzt, wo $a$, $a'$, $b$, $b'$ reell sind und $a'$ und $b'$ nicht beide gleichzeitig verschwinden, so kann für einen reellen Werth von $\varphi$ der Ausdruck unter dem Integralzeichen nur unendlich werden oder der Nenner

$$1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi$$

verschwinden, wenn zu gleicher Zeit

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=1, \qquad a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=0$$

wird. Setzt man also

$$\cos\varphi=\frac{b'}{\sqrt{(a'a'+b'b')}}, \qquad \sin\varphi=\frac{-a'}{\sqrt{(a'a'+b'b')}},$$

so mufs

$$ab'-a'b=\sqrt{(a'a'+b'b')}$$

werden. Dies ist also die Bedingung, welche Statt finden mufs, damit für einen reellen Werth des Winkels $\varphi$ der Nenner $1-A\cos\varphi-B\sin\varphi$ verschwinden

kann. Man kann dieselbe auch so darstellen:

$$aa' + bb' = \sqrt{(a'a' + b'b')} \cdot \sqrt{(aa + bb - 1)}.$$

Schliefst man also den Fall aus, wo diese Gleichung zwischen den Constanten $a$, $b$ etc. Statt findet, wie es nöthig ist, damit das zu betrachtende Integral nicht unendlich oder unbestimmt werde, so wird der absolute Werth der Gröfse $ab' - a'b$ entweder gröfser oder kleiner als $\sqrt{(a'a' + b'b')}$ sein. Ich will im Folgenden diese Gröfse mit

$$\Delta = ab' - a'b$$

bezeichnen und, was erlaubt ist, *positiv* annehmen. Wenn nämlich $\Delta$ nicht positiv ist, so kann man es leicht dazu machen, indem man blofs $2\pi - \varphi$ für $\varphi$ setzt, wodurch die Gränzen der Integration und $a$ und $a'$ ungeändert bleiben, während gleichzeitig $b$ und $b'$ und also auch $\Delta$ das Zeichen ändern.

Ich bemerke zunächst folgende identische Gleichung:

$$\frac{1}{1 - (a + a'\sqrt{-1})\cos\varphi - (b + b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{n - n'\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{1 - Ce^{\varphi\sqrt{-1}}} + \frac{1}{1 - C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}} - 1 \right\},$$

wo

$$n - n'\sqrt{-1} = \sqrt{(1 - AA - BB)}$$
$$= \sqrt{(1 - (a + a'\sqrt{-1})^2 - (b + b'\sqrt{-1})^2)},$$

ferner

$$C = \frac{a + b' + (a' - b)\sqrt{-1}}{1 + n - n'\sqrt{-1}} = \frac{A - B\sqrt{-1}}{1 + \sqrt{(1 - AA - BB)}},$$

$$C' = \frac{a - b' + (a' + b)\sqrt{-1}}{1 + n - n'\sqrt{-1}} = \frac{A + B\sqrt{-1}}{1 + \sqrt{(1 - AA - BB)}}.$$

Das Zeichen der Wurzelgröfse, deren Werth durch $n - n'\sqrt{-1}$ ausgedrückt wird, ist willkürlich; ich werde annehmen, dafs es so bestimmt ist, ***dafs ihr reeller Theil n einen positiven Werth erhält.***

Es ist jetzt zu untersuchen, ob die ***Moduln*** von $C$ und $C'$ gröfser oder kleiner als 1 sind, dieses Wort in dem Sinne von ***Cauchy*** genommen. Hiezu bemerke ich, dafs

$$CC' = \frac{1 - n + n'\sqrt{-1}}{1 + n - n'\sqrt{-1}};$$

es ist also das Product der Moduln von $C$ und $C'$,

$$\sqrt{\frac{(1-n)^2 + n'n'}{(1+n)^2 + n'n'}},$$

da $n$ positiv angenommen worden, kleiner als 1. Mithin können nicht beide Moduln gleichzeitig gröfser als 1 sein, sondern der kleinere von beiden wird nothwendig $< 1$. Es sind aber die Moduln von $C$ und $C'$ respective die Gröfsen

$$\sqrt{\frac{aa+a'a'+bb+b'b'+2\Delta}{(1+n)^2+n'n'}}, \qquad \sqrt{\frac{aa+a'a'+bb+b'b'-2\Delta}{(1+n)^2+n'n'}},$$

von denen, da $\Delta$ positiv angenommen worden, die letztere die kleinere ist, und es ist daher *der Modul von $C'$ immer* $< 1$. Es handelt sich also nur noch darum, ob der Modul von $C$ oder die erste der beiden vorstehenden Gröfsen gröfser oder kleiner als 1 ist. Man findet hierfür ein einfaches Criterium durch folgende Betrachtungen.

Das Product aus den Quadraten der Moduln von $C$ und $C'$ ist

$$\frac{(aa+a'a'+bb+b'b')^2-4\Delta\Delta}{(1+nn+n'n'+2n)^2} = \frac{1+nn+n'n'-2n}{1+nn+n'n'+2n}.$$

Es wird daher

$$(aa+a'a'+bb+b'b')^2-4\Delta\Delta = (1+nn+n'n')^2-4nn.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs je nachdem $\Delta$ kleiner oder gröfser als $n$ ist, auch $aa+a'a'+bb+b'b'$ kleiner oder gröfser als $1+nn+n'n'$ und daher *a fortiori* auch $aa+a'a'+bb+b'b'+2\Delta$ kleiner oder gröfser als $1+nn+n'n'+2n$ ist. ***Es wird daher der Modul von $C$ kleiner oder gröfser als 1, je nachdem $\Delta$ kleiner oder gröfser als $n$ ist.***

Da $(n-n'\sqrt{-1})^2 = 1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2$, so werden die Gröfsen $n$ und $n'$ durch die beiden folgenden Gleichungen bestimmt:

$$nn-n'n' = 1-aa+a'a'-bb+b'b', \qquad nn' = aa'+bb'.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned}(\Delta\Delta+n'n')(\Delta\Delta-nn) &= \Delta^4+\Delta^2(aa+bb-a'a'-b'b')-(aa+bb)(a'a'+b'b')\\ &= (\Delta\Delta+aa+bb)(\Delta\Delta-a'a'-b'b').\end{aligned}$$

Man ersieht hieraus den Satz, dafs $\Delta$ kleiner oder gröfser als $n$ oder $= n$ ist, je nachdem $\Delta$ kleiner oder gröfser als $\sqrt{(a'a'+b'b')}$ oder $= \sqrt{(a'a'+b'b')}$ ist. Das gefundne Criterium kann man daher so ausdrücken: ***je nachdem $(ab'-a'b)^2$ kleiner oder gröfser als $a'a'+b'b'$, wird der Modul von $C$ kleiner oder gröfser als 1.*** Den Fall $\Delta = \sqrt{(a'a'+b'b')}$ haben wir oben ausgeschlossen.

Da der Modul von $C'$ immer $< 1$, so wird

$$\frac{1}{1-C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}} = 1+C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C'^3e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

Es wird ferner, je nachdem der Modul von $C$ gröfser oder kleiner als 1,

$$\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}-1 = Ce^{\varphi\sqrt{-1}}+C^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+C^3e^{3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}-1 = -\{1+C^{-1}e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C^{-2}e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C^{-3}e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}\}.$$

*Je nachdem daher* $(ab'-a'b)^2$ *kleiner oder gröfser als* $a'a'+b'b'$, *mufs man, um eine convergirende Reihe zu haben, entweder*

$$\frac{n-n'\sqrt{-1}}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= 1+Ce^{\varphi\sqrt{-1}}+C^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+C^3e^{3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$
$$+C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C'^3e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

*oder*

$$\frac{n-n'\sqrt{-1}}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= (C'-C^{-1})e^{-\varphi\sqrt{-1}}+(C'^2-C^{-2})e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+(C'^3-C^{-3})e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

*setzen.* Man erhält hieraus folgende Sätze:

I. *Wenn* $a, a', b, b'$ *beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit*

$$(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$$

*erfüllen, so wird*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = 0,$$

*und allgemein, wenn* $ab'-a'b$ *positiv ist, für jedes ganze positive* $i$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos i\varphi\cdot d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}.$$

II. *Wenn* $a, a', b, b'$ *beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit*

$$(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$$

*erfüllen, so wird*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\{1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2\}}},$$

*wenn man die Wurzelgröfse so bestimmt, dafs ihr reeller Theil positiv wird.*

Die Gröfse $C^{-1}$ wird vermittelst des oben für $CC'$ gegebnen Werthes,

$$C^{-1} = \frac{1+n-n'\sqrt{-1}}{1-n+n'\sqrt{-1}} \cdot C' = \frac{a-b'+(a'+b)\sqrt{-1}}{1-n+n'\sqrt{-1}}.$$

Es wird daher

$$\frac{C'-C^{-1}}{n-n'\sqrt{-1}} = \frac{-2(a-b'+(a'+b)\sqrt{-1})}{(a+a'\sqrt{-1})^2+(b+b'\sqrt{-1})^2} = \frac{-2}{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}.$$

Man hat daher den Satz:

*Wenn $a$, $a'$, $b$, $b'$ beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$ erfüllen und $ab'-a'b$ positiv ist, so wird*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \frac{-2\pi}{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}.$$

Setzt man

$$a+b'+(a'-b)\sqrt{-1} = D,$$
$$a-b'+(a'+b)\sqrt{-1} = D',$$

so wird

$$n-n'\sqrt{-1} = \sqrt{(1-DD')}$$

und daher

$$C = \frac{D}{1+\sqrt{(1-DD')}} = \frac{1-\sqrt{(1-DD')}}{D'},$$
$$C' = \frac{D'}{1-\sqrt{(1-DD')}} = \frac{1-\sqrt{(1-DD')}}{D}.$$

Wendet man diese Ausdrücke an, so erhält man aus den oben gegebnen Reihenentwicklungen die folgenden allgemeinen Sätze.

IV. *Es seien $a$, $a'$, $b$, $b'$ beliebige reelle Gröfsen, welche jedoch nicht die Gleichung $(ab'-a'b)^2 = a'a'+b'b'$ erfüllen; es sei ferner $ab'-a'b$ positiv und*

$$a+b'+(a'-b)\sqrt{-1} = D, \qquad a-b'+(a'+b)\sqrt{-1} = D';$$

*ist $(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$, so wird für ein ganzes positives $i$:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-DD')}} \cdot \frac{D^i+D'^i}{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i},$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-DD')}} \cdot \frac{D^i-D'^i}{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i};$$

*wenn dagegen* $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$ *ist, so wird für ein ganzes positives* $i$*:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= -\pi\frac{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i-\{1-\sqrt{(1-DD')}\}^i}{\sqrt{(1-DD')}\cdot D^i},$$

*wo die Wurzelgröfse* $\sqrt{(1-DD')}$ *immer so zu bestimmen ist, dafs ihr reeller Theil positiv wird.*

Man ersieht aus dem vorstehenden Theorem, dafs für den Fall, wo $(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$, genau dieselben Formeln als für reelle Werthe von $A$ und $B$ gelten; dafs dagegen für den andern Fall, wo $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$, ganz verschiedene Resultate Statt finden. Um diese Resultate unmittelbar durch die Gröfsen $A$ und $B$ darzustellen, braucht man in den vorstehenden Formeln nur die Werthe $D=A+B\sqrt{-1}$, $D'=A-B\sqrt{-1}$ zu substituiren. Giebt man dem Nenner durch Multiplication mit einer imaginären Constante die Form

$$\alpha+\alpha'\sqrt{-1}-(\beta+\beta'\sqrt{-1})\cos\varphi-(\gamma+\gamma'\sqrt{-1})\sin\varphi,$$

wo $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$ etc. reell sind, so werden die beiden zu unterscheidenden Fälle die, wo $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2$ kleiner und wo es gröfser als $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2$ ist. Man wird also z. B. den Satz haben, dafs *wenn für reelle Gröfsen* $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$ *etc. die Ungleichheit*

$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 > (\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2$$

*Statt findet, das bestimmte Integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha+\alpha'\sqrt{-1}-(\beta+\beta'\sqrt{-1})\cos\varphi-(\gamma+\gamma'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$

*verschwindet.*

Berl. d. 14. Febr. 1846.

# 14.

# Beweis des Satzes, dafs jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann.

---

Wenn man eine ganze positive Zahl $P$ auf alle mögliche Arten aus andren, von einander verschiednen, ganzen positiven Zahlen durch Addition zusammensetzt, so wird die Anzahl dieser Zusammensetzungen der Coëfficient von $q^P$ in der Entwicklung des unendlichen Products

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.$$

Darf bei den Zusammensetzungen dieselbe Zahl wiederholt angewandt werden, so wird ihre Anzahl der Coëfficient von $q^P$ in der Entwicklung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots.},$$

wie man sogleich sieht, wenn man jeden Factor $\frac{1}{1-q}$, $\frac{1}{1-q^2}$ etc. besonders entwickelt, und die erhaltnen Reihen mit einander multiplicirt. Die letztere Betrachtung veranlafste ***Euler,*** den Nenner dieses Bruchs durch wirkliche Ausführung der Multiplication zu bilden, und er entdeckte, dafs in dem erhaltnen Producte nur solche Potenzen von $q$ übrig bleiben, deren Exponenten die in der Formel $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ enthaltnen, sogenannten fünfeckigen Zahlen sind; dafs sich ferner die Coëfficienten dieser Potenzen immer auf die Einheit reduciren, und zwar auf die positive, wenn $i$ gerade, auf die negative, wenn $i$ ungerade ist. Man findet diese merkwürdige Induction in dem 16ten Capitel des 4ten Theiles seiner ***Introductio in Analysin Infinitorum,*** welches von der Theilung der Zahlen handelt, und mit wenigen Abänderungen und Auslassungen aus einer Abhandlung gleichen Inhaltes entnommen ist, welche ***Euler*** im 3ten Bande der Neuen Petersb. Comm. für die Jahre 1750 und 51 (S. 155 ff.) publicirt hat. Er hatte aber diese glückliche Bemerkung bereits im J. 1740 gemacht, wie aus einem von Hrn. Staatsrath von ***Fufs*** publicirten Briefe ***Daniel Bernoullis*** vom 28. Jan. 1741 erhellt *). ***Euler*** erlangte hiedurch für die Entwicklungs-

*) *Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres Géomètres du 17ième siècle t. II pg. 467.* „Das *problema de combinandis numeris datam sum-*

coëfficienten des obigen Bruchs eine einfache Recursionsscale, und indem er das unendliche Product und die ihr gleiche Reihe logarithmisch differentiirte, später auch eine ähnliche Recursionsscale für die Factorensumme der auf einander folgenden natürlichen Zahlen. S. die Abhandlung *„Observatio de Summis Divisorum" im 5ten Bande der Neuen Comm. für die Jahre 1754 und 55 S. 59—74.* Aber diese Anwendungen mufsten gegen den Umstand ganz unbedeutend erscheinen, dafs hier zum ersten Male in der Analysis eine Entwicklung auftrat, in welcher die Exponenten eine *arithmetische Reihe zweiter Ordnung* bilden. Einen einfachen Beweis des von ihm durch Induction gefundnen Resultats gab *Euler* bereits in dem zuletzt genannten Bande der *Neuen Comm.*, in einer Abhandlung *Demonstratio Theorematis Circa Ordinem in Summis Divisorum Observatum (S. 75—83).* Derselbe Beweis wurde von ihm 25 Jahre später, wenige Jahre vor seinem Tode, in dem *1ten Theile des 4ten Bandes der Acta der Petersb. Ak. für das Jahr 1780* in der Abhandlung *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ *in seriem simplicem* etwas modificirt, so wie er auch in demselben Bande in der Abhandlung *De mirabilibus proprietatibus Numerorum Pentagonalium* die Anwendung auf die rücklaufende Bildung der Factorensummen wiederholt hat. In den *Philosophical Transactions vom Jahr 1788 (S. 388—394)* hat *Eduard Waring* in der Abh. *„Some Properties of the Sum of the Divisors of Numbres"* diese letztre Arbeit *Eulers* wiedergegeben, ohne etwas hinzuzufügen und ohne den *Eulerschen* Beweis des Entwicklungsgesetzes des unendlichen Productes mitzutheilen. Von diesem Beweise findet man nur in dem Wörterbuche des gelehrten *Klügel* unter dem Artikel *Pentagonalzahlen* Erwähnung gethan, bis ich im J. 1829 in meinen *Fundamentis Novis Theoriae Functionum Ellipticarum* wieder auf denselben aufmerksam gemacht habe. Die dort bewiesnen Theoreme geben Entwicklungen unendlicher Producte in Reihen, in denen die Exponenten eine *beliebige* Reihe zweiter Ordnung bilden.

---

*mam efficientibus* ist *in casibus particularibus* gar leicht: einige Circumstanzen machen, dafs man die *regulam generalem* nicht siehet, doch aber kann man die *methodum generalem* anzeigen. Den *calculum* von Ihrem Exempel *de numero 50 in 7 partes dividendo* habe ich nicht gemacht, solches aber meinem Vetter *Nicolas Bernoulli* gegeben, welcher eben die Zahl gefunden, die Ew. herausgebracht. Das andre *problema, transformare expressionem* $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\cdots$ *in seriem* $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^{12}}-\frac{1}{n^{15}}+$ etc. kommt auch leicht *per inductionem* heraus, wenn man viele *factores* von der *propositu expressione actu* multipliciret."

Setzt man nämlich in den in den *Fundamentis* gegebnen Formeln $q^n$ statt $q$ und $z = \pm q^m$, so erhält man die Gleichungen,

$$(1-q^{n-m})(1-q^{n+m})(1-q^{2n})(1-q^{3n-m})(1-q^{3n+m})(1-q^{4n})\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{nii+mi},$$

$$(1+q^{n-m})(1+q^{n+m})(1-q^{2n})(1+q^{3n-m})(1+q^{3n+m})(1-q^{4n})\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{nii+mi},$$

deren erste für $n = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ die *Eulersche* Formel giebt. *Gauſs* hat im *1ten Bande der Göttinger Commentarien für die Jahre 1808 — 11* in seiner Abhandlung *Summatio Serierum quarundam singularium* zuerst wieder nach *Euler* das Beispiel einer ähnlichen Entwicklung eines unendlichen Productes gegeben, welches der zweiten der beiden vorstehenden allgemeinen Formeln für die Werthe $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ entspricht. Ob er das *Eulersche* Resultat gekannt hat, läfst sich aus seiner Arbeit nicht ersehen. *Legendre* hat in der *dritten* Ausgabe seiner *Théorie des Nombres* Th. II. S. 128 einen Beweis der *Eulerschen* Formel gegeben, der von dem *Eulerschen* Beweise verschieden ist. Da er bei dieser Gelegenheit nur der ersten Arbeiten *Eulers* über diesen Gegenstand in der *Introductio* und dem Bande III. der *Novi Commentarii* Erwähnung thut, wo das Resultat durch Induction gefunden wird, so scheint *Legendre* den *Beweis,* den später *Euler* selbst gegeben hat, nicht gekannt zu haben.

Obgleich ich in den *Fundamentis Novis* zwei einfache Beweise der allgemeinen Formeln mitgetheilt habe, und insbesondere der zweite dieser Beweise einen ganz elementaren Character hat, so scheint es mir doch nicht ohne Interesse, auf jenen schönen *Eulerschen,* den Mathematikern fast unbekannt gebliebnen Beweis der speciellen Formel zurückzukommen. Ich werde daher im Folgenden den *Eulerschen* Beweis seinem wesentlichen Gedankengange nach reproduciren, den Resultaten aber dadurch eine gröfsere Allgemeinheit geben, dafs ich die von *Euler* gebrauchte Methode auf begränzte Producte anwende. Ich werde ferner hiebei der *Eulerschen* Formel den correspondirenden Satz über die Theilung der Zahlen substituiren, und diesen Satz selbst ohne Vermittlung von unendlichen Producten oder Reihen beweisen.

Aus der *Eulerschen* Formel folgt nämlich der nachstehende Satz, aus welchem sie selbst wieder eine unmittelbare Folge ist:

> Jede Zahl, welche nicht die Form $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ hat, kann eben so oft in eine gerade als in eine ungerade Menge andrer von einander verschiedner Zahlen zerlegt werden; Zahlen von der Form $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ aber können in

eine gerade Menge *einmal* mehr oder weniger als in eine ungerade zerlegt werden, und zwar das eine oder das andre, je nachdem $i$ gerade oder ungerade ist.

Diesen aus der *Eulerschen* Formel sich ergebenden Satz bemerkt auch *Legendre* am angeführten Orte. Es wird dadurch eine elementare Operation, das Abzählen, wie oft eine Zahl aus einer geraden oder ungeraden Menge andrer von einander verschiedner durch Addition zusammengesetzt werden kann, in eine Beziehung zu der *Dreitheilung der elliptischen Integrale* gesetzt, welcher die *Eulersche* Formel in der Theorie der elliptischen Functionen entspricht. Ich wende mich jetzt zu dem Beweise selbst.

Wenn man eine Gröfse $P$ auf alle mögliche Arten aus andern, welche unter sich und von Null verschieden sind, und aus der Zahl gegebner Elemente $\alpha, \beta, \gamma$ etc. genommen werden sollen, durch Addition zusammensetzt, ohne dabei ein Element wiederholt anzuwenden, so will ich den Überschufs der Anzahl derjenigen Zusammensetzungen, in welchen die Zahl der angewandten Elemente gerade ist, über die Anzahl derjenigen, in welchen diese Zahl ungerade ist, durch

$$(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$$

bezeichnen, wobei ich unter Überschufs sowohl eine positive als eine negative Gröfse verstehen werde. Wenn die gegebnen Elemente $\alpha, \beta, \gamma$ etc. alle positiv sind, so kann der Werth von $P$ nicht kleiner als das kleinste derselben und nicht gröfser als die Summe aller sein, widrigenfalls die Gröfse $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ verschwindet. Die Ordnung, in welcher die Elemente $\alpha, \beta$ etc. geschrieben werden, ist, wie man sieht, gleichgültig.

Um den nachfolgenden Sätzen eine allgemeine Gültigkeit zu geben, will ich ferner festsetzen, dafs für $P = 0$ das Zeichen $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ den angegebnen Überschufs *noch um 1 vermehrt* bedeute, und dafs die Gröfse $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ verschwinde, so wie eines der Elemente $\alpha, \beta$ etc. $= 0$ wird.

Wenn man den im Vorigen bezeichneten Überschufs nur in Bezug auf diejenigen Zusammensetzungen von $P$ betrachtet, in welchen das Element $\alpha$ nicht vorkommt, so wird dieser Theil desselben $(P, \beta, \gamma, \ldots.)$. Jeder Zusammensetzung ferner, in welcher $\alpha$ unter den Elementen vorkommt, entspricht eine andre von $P - \alpha$ aus den übrigen gegebnen Elementen. Aber da die Anzahl der Elemente, die bei der Zusammensetzung verwendet werden, um *eines* geringer geworden ist, ist zugleich aus einer geraden immer eine ungerade, aus einer ungeraden eine gerade Anzahl geworden. Es wird daher der andre

Theil des Überschusses, welcher sich auf die Zusammensetzungen von $P$ bezieht, bei welchen das Element $\alpha$ concurrirt, durch $-(P-\alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ ausgedrückt. Hieraus folgt die Formel

$$\text{I.} \quad (P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.) = (P, \beta, \gamma, \ldots.) - (P-\alpha, \beta, \gamma, \ldots.),$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, unter den festgesetzten Bestimmungen auch auf diejenigen Fälle ausgedehnt werden kann, in welchen $P$ oder $P-\alpha$ oder eines der Elemente $\alpha$, $\beta$ etc. verschwindet.

Für *ein* Element $\alpha$ wird in Folge der gegebnen Definitionen $(P, \alpha) = 0, 1$ oder $-1$, je nachdem $P$ von $\alpha$ und 0 verschieden, $= 0$ oder $= \alpha$ ist; es wird ferner $(P, \alpha) = 0$, wenn $P = \alpha = 0$. *Wenn man daher mit*

$$[N]$$

*eine Gröfse bezeichnet, welche* $= 1$ *ist, wenn* $N$ *verschwindet, und* $= 0$ *ist, wenn* $N$ *von* 0 *verschieden ist,* so wird in allen Fällen

$$\text{II.} \quad (P, \alpha) = [P] - [P-\alpha].$$

Auf den Formeln I. und II. beruht die ganze nachstehende Untersuchung.

Ich betrachte das Aggregat

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots. + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots. a_{m-1}),$$

*in welchem die Elemente* $a, a_1, \ldots. a_{m-1}$ *eine beliebige arithmetische Reihe und die Zahlen* $b_0, b_1, \ldots. b_{m-1}$ *eine arithmetische Reihe mit der Differenz* $-a$ *bilden.* Dieses Aggregat verwandelt sich mittelst I. in folgendes:

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad & (b_0, a) + (b_1, a_1) + (b_2, a_1, a_2) + (b_3, a_1, a_2, a_3) \ldots. + (b_{m-1}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}) \\ & - (b_2, a_1) \quad - (b_3, a_1, a_2) \quad \ldots. - (b_{m-1}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-2}) \\ & - (b_m, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}).\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck reducire man je zwei unter einander stehende Terme mittelst der aus I. folgenden Formel

$$(P, a_1, a_2, \ldots. a_{i+1}) - (P, a_1, a_2, \ldots. a_i) = -(P - a_{i+1}, a_1, a_2, \ldots. a_i).$$

Wenn man

$$c_i = b_{i+1} - a_{i+1}$$

setzt, und die aus II. sich ergebende Gleichung

$$(b_0, a) + (b_1, a_1) = [b_0] - [c_0]$$

zu Hülfe ruft, so erhält man hiedurch

$$\begin{aligned}\text{IV.} \quad & (b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots. + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots. a_{m-1}) \\ & = [b_0] - [c_0] - (b_m, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}) \\ & - \{(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2) + (c_3, a_1, a_2, a_3) \ldots. + (c_{m-2}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-2})\}.\end{aligned}$$

Da $c_{i+1} - c_i = -a - a_{i+2} + a_{i+1} = -a_1$, so bilden die Gröfsen $c_0, c_1, c_2$ etc.

eine arithmetische Reihe mit der constanten Differenz $a_1$. Bestimmt man nach und nach die $k-1$ Gröfsen $d_i$, $e_i$, .... $z_i$ durch die ähnlichen Gleichungen,

$d_i = c_{i+1} - a_{i+1}$, $e_i = d_{i+1} - a_{i+1}$, $f_i = e_{i+1} - a_{i+1}$, etc., $z_i = y_{i+1} - a_{i+1}$,

so werden die Gröfsen $d_i$, $e_i$, $f_i$, .... $y_i$, $z_i$ arithmetische Reihen bilden, welche respective die Gröfsen $-a_2$, $-a_3$, .... $-a_{k-1}$, $-a_k$ zu ihrer constanten Differenz haben. Setzt man

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}) = A_1,$$
$$(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2) + (c_3, a_1, a_2, a_3) \ldots + (c_{m-2}, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}) = A_2,$$
$$(d_2, a_2) + (d_3, a_2, a_3) + (d_4, a_2, a_3, a_4) \ldots + (d_{m-3}, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{m-3}) = A_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_{k-1}, a_k) + (y_{k+1}, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) \ldots + (y_{m-k}, a_{k-1}, a_k, \ldots a_{m-1}) = A_k,$$

so wird durch IV. das Aggregat $A_1$ auf $A_2$ zurückgeführt. Da aber die Aggregate $A_1$, $A_2$, .... $A_k$ alle auf dieselbe Art gebildet sind, so kann man durch analoge Formeln $A_2$ auf $A_3$, $A_3$ auf $A_4$ etc. zurückführen. Wenn man nämlich nach und nach $c$ und $d$ für $b$ und $c$, $d$ und $e$ für $c$ und $d$ u. s. f., ferner immer $m-2$ für $m$ setzt, und jedesmal alle Indices um 1 vergröfsert, so giebt die Formel IV. das folgende System Gleichungen:

$$A_1 + A_2 = [b_0] - [c_0] - (b_m, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}),$$
$$A_2 + A_3 = [c_1] - [d_1] - (c_{m-1}, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}),$$
$$A_3 + A_4 = [d_2] - [e_2] - (d_{m-2}, a_3, a_4, \ldots a_{m-3}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{k-1} + A_k = [x_{k-2}] - [y_{k-2}] - (x_{m-k+2}, a_{k-1}, a_k, \ldots a_{m-k+1}).$$

Wenn man in der $2^{\text{ten}}$, $4^{\text{ten}}$ etc. Gleichung alle Zeichen ändert, und dann sämmtliche Gleichungen addirt, so erhält man hieraus

V.
$$A_1 + (-1)^k A_k = [b_0] - [c_1] + [d_2] \ldots + (-1)^k [x_{k-2}] - [c_0] + [d_1] - [e_2] \ldots - (-1)^k [y_{k-2}] - (b_m, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}) + (c_{m-1}, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}) - \ldots \ldots - (-1)^k (x_{m-k+2}, a_{k-1}, a_k \ldots a_{m-k+1}).$$

Da im letzten Aggregat mit jedem folgenden Term sich die Zahl der Elemente um zwei verringert, so ist der gröfste Werth, welchen $k$ annehmen kann, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, $k = \frac{1}{2}m$ oder $k = \frac{1}{2}(m+1)$. Für den ersten Werth von $k$ reducirt sich der oben für $A_k$ gegebne Ausdruck auf

$$(y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_{k-1}, a_k) = (y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_k) - (y_{k+1}, a_k)$$
$$= [y_{k-1}] - [x_{k-1}] - (y_{k+1}, a_k)$$

oder auf

$$A_{\frac{1}{2}m} = [y_{\frac{1}{2}m-1}] - [z_{\frac{1}{2}m-1}] - (y_{\frac{1}{2}m+1}, a_{\frac{1}{2}m}),$$

für den zweiten Werth von $k$ wird derselbe

$$A_{\frac{1}{2}(m+1)} = (y_{\frac{1}{2}(m-1)}, a_{\frac{1}{2}(m-1)}) = [y_{\frac{1}{2}(m-1)}] - [z_{\frac{1}{2}(m-3)}].$$

Man erhält daher aus V., wenn man dem Index $k$ seinen gröfsten Werth giebt,

VI. $$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1})$$
$$= \Delta - (b_m, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}) + (c_{m-1}, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}) - \text{etc.},$$

wo man den Ausdruck rechts bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}(y_{\frac{1}{2}m+1}, a_{\frac{1}{2}m})$$

oder bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}.(x_{\frac{1}{2}(m+3)}, a_{\frac{1}{2}(m-1)}, a_{\frac{1}{2}(m+1)})$$

fortsetzen mufs, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist. Es wird ferner

VII. $$\Delta = [b_0] - [c_0] - [c_1] + [d_1] + [d_2] - [e_2] - \text{etc.},$$

welchen Ausdruck man, je nachdem $m$ gerade oder ungerade, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m-1}[y_{\frac{1}{2}m-1}] + (-1)^{\frac{1}{2}m}[z_{\frac{1}{2}m-1}]$$

oder bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[y_{\frac{1}{2}(m-1)}] + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}[z_{\frac{1}{2}(m-3)}]$$

fortzusetzen hat, ***in welchem letztern Ausdruck das zweite Glied dadurch von dem allgemeinen Bildungsgesetze abweicht, dafs sein Index um 1 verringert ist.*** Da zufolge der oben gegebnen Definition $[N] = 1$ oder 0, je nachdem $N = 0$ oder von 0 verschieden ist, so wird $\Delta$ im Allgemeinen nur 0 oder $\pm 1$ werden.

Die Gröfsen $b_m$, $c_{m-1}$, $d_{m-2}$ etc. in VI. bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe $-a_m$, $-a_{m-1}$, $-a_{m-2}$ etc. ist. Die Gröfsen $b_0$, $c_1$, $d_2$, $e_3$, .... $y_{k-1}$ und $c_0$, $d_1$, $e_2$, .... $z_{k-1}$ in VII. bilden ebenfalls arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihen respective

$$-(a_2+2a), \quad -(a_3+2a_1), \quad \ldots \quad -(a_k+2a_{k-2}),$$
$$-(2a_1+a_2), \quad -(2a_2+a_3), \quad \ldots \quad -(2a_{k-1}+a_k)$$

sind, von denen man die erstre auch so darstellen kann

$$-(a+2a_1), \quad -(a_1+2a_2), \quad -(a_2+2a_3), \quad \ldots \quad -(a_{k-2}+2a_{k-1}),$$

wo immer $k = \frac{1}{2}m$ oder $\frac{1}{2}(m+1)$. Setzt man

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_i,$$

so werden diese beiden Reihen zweiter Ordnung,

$$b_0, \; b_1 - 2s_1, \; b_1 - s_1 - 2s_2, \; b_1 - s_2 - 2s_3, \; \ldots \; b_1 - s_{k-2} - 2s_{k-1},$$
$$b_1 - s_1, \; b_1 - 2s_1 - s_2, \; b_1 - 2s_2 - s_3, \; \ldots \; b_1 - 2s_{k-2} - s_{k-1}, \; b_1 - 2s_{k-1} - s_k.$$

Die in diesen beiden Reihen enthaltnen Grösen machen alle aus, welche in den Ausdruck VII. von $\Delta$ eingehen, wenn man noch für den Fall eines ungeraden $m$ zu dem letzten Terme der zweiten Reihe $a_k$ addirt, wodurch er sich in

$$b_1 - 3s_{k-1}$$

verwandelt. *Wenn keine dieser Grösen verschwindet, verschwindet $\Delta$: wenn aber eine dieser Grösen verschwindet, wird $\Delta$ abwechselnd $+1$ und $-1$; ist nämlich $b_1 = s_{i-1} + 2s_i$ oder $b_1 = 2s_{i-1} + s_i$, so wird der Werth von $\Delta$ durch $(-1)^i$ bestimmt.*

In dem besondern Falle, wenn *zwei* von den angegebnen Grösen verschwinden, hat man auf jede derselben die vorstehende Regel anzuwenden, und erhält dann für $\Delta$ einen der drei Werthe $0, +2, -2$.

Da man nach dem Vorigen die Grösе $\Delta$ als gegeben ansehn kann, so reducirt sich durch die Formel VI. das vorgelegte Aggregat auf ein andres, das nur aus der *halben* Zahl Terme besteht. Sind die Grösen $a$, $a_1$, $a_2$ etc. alle positiv, so bilden die Grösen $b_m$, $c_{m-1}$, $d_{m-2}$ etc. eine abnehmende Reihe, da alle Glieder ihrer ersten Differenzreihe $-a_m$, $-a_{m-1}$, $-a_{m-2}$ etc. negativ sind. In diesem Falle bietet daher die Formel VI. noch dadurch eine andre Reduction des vorgelegten Aggregates dar, dafs die kleineren Elemente, welche die gröfste Zahl der Zusammensetzungen hervorbringen, allmälig fortfallen, und die durch Addition der gegebnen Elemente zu bildenden Zahlen selber kleiner werden. Wenn man aber noch aufserdem die Zahl $m$ so grofs annimmt, dafs $b_m = b_0 - ma$ kleiner als das kleinste der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ wird, in welchem Falle *a fortiori* auch die Grösen $c_{m-1}$, $d_{m-2}$ etc. kleiner als diese Elemente werden, so verschwinden in VI. alle Terme des Aggregates rechts vom Gleichheitszeichen, und der vorgelegte Ausdruck reducirt sich lediglich auf die Grösе $\Delta$. Nimmt man noch an, dafs die Elemente $a$, $a_1$, $a_2$ etc. eine *wachsende* Reihe bilden, so hat man den folgenden Satz:

> Es seien $b_0$ und $a$ positive Grösen, $ma$ ein die Grösе $b_0$ übertreffendes Vielfache von $a$; es sei $b_0$, $b_1$, $b_2$ etc. eine abnehmende arithmetische Reihe mit der constanten Differenz $-a$ und $a$, $a_1$, $a_2$ etc. eine beliebige wachsende arithmetische Reihe; ferner sei
>
> $$s_i = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_i:$$
>
> so wird das Aggregat
>
> $$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1})$$

verschwinden, aufser wenn $b_1$ einer der Gröfsen

$$s_{i-1}+2s_i \text{ oder } 2s_{i-1}+s_i$$

gleich wird, und in diesem Falle den Werth $(-1)^i$ erhalten.

Da nach der gemachten Voraussetzung $b_1 < (m-1)a$, $s_i > ia$ ist, so kann $b_1$ nur die Werthe von solchen Gröfsen $s_{i-1}+2s_i$, $2s_{i-1}+s_i$ annehmen, welche unter den oben angegebnen enthalten sind. Es gilt also der vorstehende Satz ohne eine Beschränkung für die Werthe von $i$. Man braucht ferner den einen nicht in der allgemeinen Form enthaltnen Werth $3s_{\frac{1}{2}(m-1)}$ nicht in Betracht zu ziehen, da ihn $b_1$ nicht erreichen kann.

Für $a=0$ verschwindet das vorgelegte Aggregat. Setzt man für diesen Fall in der Formel VI.

$$b_0 = b_1 = b_m = P, \quad c_{m-1} = P_1, \quad d_{m-2} = P_2, \quad \text{etc.},$$

und $a_i = i$, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, so bilden $P$, $P_1$, $P_2$ etc. eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe $-m$, $-m+1$, $-m+2$ etc. ist, so dafs allgemein

$$\text{VIII.} \quad P_i = P - im + \tfrac{1}{2}i(i-1) = P - \tfrac{1}{2}i(2m-i+1)$$

wird. Es wird ferner $s_{i-1} = \frac{1}{2}i(i-1)$, $s_i = \frac{1}{2}i(i+1)$ und

$$b_1 - 2s_{i-1} - s_i = P - \tfrac{1}{2}i(3i-1), \quad b_1 - s_{i-1} - 2s_i = P - \tfrac{1}{2}i(3i+1).$$

Die Formel VI. reducirt sich daher für diese besondre Annahme auf

$$\text{IX.} \quad (P, 1, 2, \ldots . m-1) - (P_1, 2, 3, \ldots . m-2) + (P_2, 3, 4, \ldots . m-3) - \ldots . = \Delta,$$

wo der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-2)}(P_{\frac{1}{2}(m-2)}, \tfrac{1}{2}m) \quad \text{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{2}(m-3)}(P_{\frac{1}{2}(m-3)}, \tfrac{1}{2}(m-1), \tfrac{1}{2}(m+1)),$$

d. h. bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-2)}(P - \tfrac{1}{8}(m-2)(3m+4), \tfrac{1}{2}m) \text{ oder}$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-3)}(P - \tfrac{1}{8}(m-3)(3m+5), \tfrac{1}{2}(m-1), \tfrac{1}{2}(m+1))$$

fortzusetzen ist, *und wenn $P$ eine der Zahlen $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ bis $\frac{1}{8}m(3m-2)$ oder $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$ ist, $\Delta = (-1)^i$, wenn $P$ den Werth $\frac{3}{8}(mm-1)$ annimmt, $\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}$, und endlich, wenn $P$ keine dieser Zahlen ist, $\Delta = 0$ wird.*

Wenn $P \leqq m-1$, so werden $P_1$, $P_2$ etc. negativ, und es reducirt sich daher der erste Theil der Gleichung IX. auf seinen ersten Term. Da ferner die Zusammensetzungen von $P = m-1$ aus den Zahlen $1, 2, \ldots . m-1$ alle möglichen Zusammensetzungen von $P$ aus ganzen positiven Zahlen sind, so erhält man aus IX., wenn man $P = m-1$ setzt, den zu beweisenden Satz:

Der Überschufs der Anzahl der Zusammensetzungen einer Zahl $P$ aus einer geraden Zahl über die Anzahl Zusammensetzungen ihrer aus einer ungeraden Zahl verschiedner ganzer positiver Zahlen, ist, wenn $P$ eine fünfeckige Zahl $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ ist, $= (-1)^i$ und verschwindet für alle übrigen Werthe von $P$.

Es sind nämlich alle Werthe $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$, welche $P \leqq m-1$ annehmen kann, in den Werthen bis $\frac{1}{2}(3nn-2n)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)(3n-1)$ enthalten, und den besondern Werth $\frac{3}{2}(n-1)(n+1)$ kann eine Zahl, welche $\leqq m-1$ ist, nicht annehmen.

So wie der vorstehende Satz der *Eulerschen* Formel

$$\text{X.} \quad (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}$$

entspricht, so entsprechen auch die andern im Vorigen gefundnen Sätze analytischen Formeln. Setzt man die constante Differenz der Reihe $a$, $a_1$, $a_2$ etc. der *Einheit* gleich, ferner

$$q^n = z,$$

und

$$f_m(z) = (1-z) + z(1-z)(1-qz) + z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\ldots. \\ \ldots. + z^{m-1}(1-z)(1-qz)\ldots.(1-q^{m-1}z),$$

so entspricht der Satz IV. der Formel

$$\text{XI.} \quad f_m(z) = 1-qz^2-q^2z^3f_{m-2}(qz)-z^m(1-qz)(1-q^2z)\ldots.(1-q^{m-1}z).$$

Dem Satze VI. entsprechen, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, die Formeln

$$\text{XII.}a. \quad f_m(z) = 1 + \sum_{1}^{\frac{1}{2}m}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i} \\ -\sum_{0}^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(2m-i-1)}z^{m+i}(1-q^{i+1}z)(1-q^{i+2}z)\ldots.(1-q^{m-i-1}z),$$

$$\text{XII.}b. \quad f_m(z) = 1 + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i} \\ +(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}q^{\frac{1}{8}(mm-1)}z^{\frac{1}{2}(3n+1)} \\ -\sum_{0}^{\frac{1}{2}(m-3)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(2m-i-1)}z^{m+i}(1-q^{i+1}z)(1-q^{i+2}z)\ldots.(1-q^{m-i-1}z).$$

Setzt man in XII.$a$. $m=2n$, $z=r^n$, $q=r^{-1}$, so verschwindet die zweite Horizontalreihe, da jedes der unter dem Summenzeichen enthaltnen Producte den verschwindenden Factor $1-q^{\frac{1}{2}m}z$ enthält. Die Formel XII.$a$. verwandelt sich daher für diese Annahme in die folgende:

XIII. $$(1-r^n)+r^n(1-r^n)(1-r^{n-1})+r^{2n}(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})\ldots$$
$$\ldots+r^{n(n-1)}(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots(1-r)$$
$$=1+\sum_1^n(-1)^i r^{\frac{1}{2}i(3i-1)(2n-i)}+\sum_1^{n-1}(-1)^i r^{\frac{1}{2}i(6n-3i-1)}$$
$$=1-r^{2n-1}-r^{3n-2}+r^{5n-5}+r^{6n-7}-r^{8n-12}-\ldots+(-1)^n r^{\frac{1}{2}(3nn-n)}.$$

Dieselbe Formel erhält man auch aus XII. *b.*, sowohl wenn man $m=2n-1$, als wenn man $m=2n+1$ setzt.

Setzt man immer $z=r^n$, $q=r^{-1}$, so bleibt, wenn nur $n<m$ genommen wird, der Werth von $f_m(z)$ derselbe, wie in der vorstehenden Formel XIII.,

$$(1-r^n)+r^n(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots+r^{n(n-1)}(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots(1-r).$$

Es mufs daher auch die rechte Seite in XII. *a.* und *b.*, wenn man darin $z=r^n$, $q=r^{-1}$ setzt, für alle Werthe von $m$, welche $>n$ sind, denselben Werth behalten.

Für $z<1$ und $m=\infty$ erhält man aus XII. die Formel

XIV. $$(1-z)+z(1-z)(1-qz)+z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z)+\text{ etc. in inf.}$$
$$=1-qz^2-q^2z^3+q^5z^3+q^7z^6-q^{12}z^8-q^{15}z^9+\text{ etc. in inf.}$$
$$=1+\sum_1^\infty(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1}+\sum_1^\infty(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i}.$$

Setzt man in XII. zuerst $z=1$ und dann $m=\infty$, so erhält man die ***Eulersche*** Formel X.

Ich will bei dieser Gelegenheit die beiden Formeln beweisen, welche ich in meinen ***Fundamentis*** S. 186 9), 10) ohne Beweis mitgetheilt habe.

Es sei

$$\varphi(z)=1-\frac{q(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\ldots.$$
$$+\frac{z}{q}\left\{q-\frac{q^4(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^{16}(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\ldots.\right\}.$$

Da

$$\frac{1-q^{2m}z^2}{1-q^{2m+2}}-\frac{z}{q}=\frac{(1+q^{2m+1}z)(1-q^{-1}z)}{1-q^{2m+2}},$$
$$q^{mm}+q^{(m+1)^2}.\frac{z}{q}=q^{mm}(1+q^{2m}z),$$

so kann man die Function $\varphi(z)$ noch auf folgende beide Arten darstellen,

$$\varphi(z) = 1 - \frac{q(1+qz)(1-q^{-1}z)}{1-q^2} + \frac{q^4(1-z^2)(1+q^3z)(1-q^{-1}z)}{(1-q^2)(1-q^4)}$$
$$- \frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1+q^5z)(1-q^{-1}z)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots,$$
$$= 1 + z - \frac{q(1-z^2)(1+q^2z)}{1-q^2} + \frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)(1+q^4z)}{(1-q^2)(1-q^4)}$$
$$- \frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)(1+q^6z)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots,$$

woraus

$$\varphi(z) = (1+z)\varphi(qz)$$

folgt. Diese Gleichung giebt

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(qz)} \cdot \frac{\varphi(qz)}{\varphi(q^2z)} \cdot \frac{\varphi(q^2z)}{\varphi(q^3z)} \cdot \ldots \text{ in inf.}$$
$$= (1+z)(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\ldots.$$

Für $z = 1$ reducirt sich die vorgelegte Function $\varphi(z)$ auf 2. Es wird daher, wenn man die vorstehende Gleichung durch

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} = \frac{1}{\varphi(0)} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots.$$

dividirt,

$$\varphi(z) = \frac{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\ldots.}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.}.$$

Setzt man in diesem und dem oben für $\varphi(z)$ angegebnen Ausdrucke $-z$ für $z$, und nimmt die halbe Summe und Differenz von $\varphi(z)$ und $\varphi(-z)$, so erhält man die beiden in den *Fundamentis* gegebnen Formeln. Für $z = -q$ giebt dieselbe Formel die Entwicklung

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots.}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \text{ etc.}$$

Für $z = 0$ erhält man

$$\frac{1}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.}$$
$$= 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots.$$

Aus der von *Euler* in der *Introductio* (Cap. XVI. §. 313.) gegebnen Formel

$$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots.} = 1 + \frac{qz}{1-q} + \frac{q^2z^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3z^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots.$$

würde man für dieselbe Gröfse den Ausdruck

$$1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \text{ etc.}$$

erhalten.

Berlin, den 12. Mai 1846.

# 15.

# Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.

„Berlin, le 6 août 1845.

„... Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse que j'ai publiées sans démonstration dans le Journal de M. *Crelle*, sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules. Ensuite, j'avais fait une espèce de tour de force en prouvant ces formules par la substitution même des expressions si compliquées de radicaux faite dans l'équation différentielle à laquelle elles doivent satisfaire. Pour mieux faire saisir l'esprit de cette dernière démonstration en quelque sorte synthétique, j'ai commencé par publier une application de la même méthode à la démonstration des formules de la transformation directe, dans un Mémoire imprimé dans le Journal de M. *Crelle*, tome VI, pages 397 et suivantes. Plus tard, je suis parvenu à une troisième démonstration qui repose entièrement sur la décomposition de $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ en fractions simples, pour laquelle j'ai établi les formules dans une de mes Leçons données à l'Université de Koenigsberg.

„Quant aux formules de développement du produit

$$H(x+a_1)\,H(x+a_2)\ldots.\,H(x+a_n),$$

où

$$a_1+a_2+\ldots.a_n = 2jk,$$

et des fonctions homogènes de $H(x)$ et $\Theta(x)$, je les avais d'abord, comme vous, déduites des propriétés analytiques et caractéristiques des fonctions $Hx$ et $\Theta x$, et j'y ai fait allusion dans le Journal de M. *Crelle*, tome XXVI, page 103. Depuis, j'ai remarqué que l'on peut parvenir aux mêmes formules par la considération élémentaire et algébrique, qu'étant mis

$$y_1 = x_1+b, \quad y_2 = x_2+b, \quad \text{etc.}$$

à chaque solution des deux équations

$$x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2 = p, \quad x_1+x_2+\ldots.+x_n = a,$$

répond une solution des deux autres équations

$$y_1^2+y_2^2+\ldots.+y_n^2 = p-\frac{a^2}{n}+n\left(\frac{a}{n}+b\right)^2,$$

$$y_1+y_2+\ldots.+y_n = a+nb.$$

On mettra pour $a$ les nombres 0, 1, 2, ...., $n-1$, et pour $b$ tous les nombres, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

„Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très-originale de faire ressortir de ces mêmes principes le théorème d'*Abel*, tant qu'il s'applique aux fonctions elliptiques. Ne pensez-vous pas consacrer un Mémoire particulier à cette matière qui se détache très-bien des autres questions?

„En cherchant à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions $\Theta$, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.

„Dans mes Leçons universitaires de Koenigsberg, moi aussi j'ai eu coutume de partir des fonctions $\Theta$. Dans ces Leçons, en multipliant quatre séries $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i e^{-(ax+bi)^2}$ pour différentes valeurs de $x$, et en transformant les exposants par la formule

$$i^2+i'^2+i''^2+i'''^2 = \left(\frac{i+i'+i''+i'''}{2}\right)^2+\left(\frac{i+i'-i''-i'''}{2}\right)^2+\text{etc.},$$

j'ai obtenu tout de suite une formule de laquelle découlent, comme cas particuliers et sans le moindre calcul, les expressions fractionnaires des fonctions elliptiques, les théorèmes sur l'addition des trois espèces, et plusieurs centaines de formules intéressantes auxquelles on ne saurait arriver que par un calcul algébrique fatigant. Dans un des premiers volumes du Journal de M. *Crelle*, j'ai donné des formules d'addition et de transformation conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux $\Theta$. Ces formules font voir que l'on peut arriver par deux transformations successives, non-seulement à la multiplication, mais encore aux formules de l'addition.

„Dans les mêmes Leçons, j'ai examiné l'ensemble des différentes formes que peut prendre une même fonction $\Theta$. En faisant usage de la méthode employée par *Lagrange* pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, $q$ étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours, et par la seule multiplication par une quantité de la forme $e^{rxx}$, ramener la fonction $\Theta$ à une autre où le module de $q$, ce mot pris dans le sens de M. *Cauchy*, soit $< e^{-\pi\sqrt{\frac{1}{2}}}$. C'est une limite précise, c'est à dire qu'étant prise une quantité inférieure, il y aura toujours des cas, où le module de $q$ dans toutes les formes que pourrait prendre la fonction $\Theta$ restera supérieure à cette quantité.

„L'addition des paramètres dans la troisième espèce des intégrales abéliennes et l'échange des paramètres avec les amplitudes me sont bien connues. Il y a douze années environ que je les ai communiquées à deux de mes élèves, M. ***Richelot***, de Koenigsberg, et M. ***Senff***, à présent professeur de mathématiques près l'Université de Dorpat, et qui étudiait à Koenigsberg lorsque je trouvai ces formules. J'avais d'abord prouvé l'addition des paramètres, indépendamment, par la seule différentiation de $\log\frac{\sqrt{R}+U\sqrt{x}}{\sqrt{R}-U\sqrt{x}}$, $U$ et $R$ étant deux fonctions de l'ordre $m$ et $2m$. Puis je l'ai déduite de l'échange mutuel des paramètres et amplitudes, qui se trouve aisément en remplaçant la somme des deux intégrales simples

$$\int_0^x \frac{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}\cdot dx}{(x-\alpha)\sqrt{(xR(x))}} + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{(xR(x))}\cdot d\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

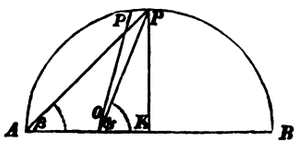
par la double intégrale

$$\iint \frac{dx\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}\sqrt{(xR(x))}}\left[\frac{1}{2(x-\alpha)}\left(\frac{d\cdot xR(x)}{dx}+\frac{d\cdot \alpha R(\alpha)}{d\alpha}\right)+\frac{\alpha R(\alpha)-xR(x)}{(x-\alpha)^2}\right],$$

où l'on prouve sans peine que la fonction de $x$ et de $\alpha$, placée entre les grands crochets, est entière. Depuis, j'ai appris par les Oeuvres posthumes d'***Abel*** qu'elle est la généralisation dont ces théorèmes sont susceptibles.

„Feuilletant mes anciens papiers, j'y ai trouvé la démonstration de quelques théorèmes par lesquels on donne aux formules d'addition des intégrales abéliennes de la seconde et de la troisième espèce une forme analogue à celle sous laquelle les formules d'addition des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce ont été présentées par ***Legendre***, ce qui contribue à rendre de plus en plus parfaite l'analogie entre les fonctions abéliennes et elliptiques *).

Permettez-moi d'ajouter une construction géométrique de la transformation dite de ***Landen***, la première qui ait été connue des fonctions elliptiques.




Soit $AB$ le diamètre d'un cercle: si l'on mène d'un point $P$ du cercle la droite $PK$ au centre $K$, l'angle $PKB$ est double de $PAB$, mais si l'on mène

*) Voir ci-dessus pg. 281.

la droite à un autre point fixe $O$ du diamètre, on obtient l'angle dans lequel par la transformation de *Landen* se change l'amplitude $PAB$ d'une intégrale elliptique dont le complément du module est $\frac{AO}{BO}$, le module transformé étant $\frac{KO}{KA}$. En effet soit $R$ le rayon du cercle, $KO = a$, $PAB = \beta$, $POB = \psi$; variant $P$, on aura dans le triangle infiniment petit $POP$,

$$PP \sin PPO = OP \sin POP;$$

donc

$$2R d\beta . \cos KPO = OP . d\psi, \quad \frac{2d\beta}{OP} = \frac{d\psi}{R \cos KPO};$$

or

$$OP^2 = R^2 + a^2 + 2Ra \cos 2\beta = (R+a)^2 \cos^2\beta + (R-a)^2 \sin^2\beta,$$
$$R^2 \cos^2 KPO = R^2 - R^2 \sin^2 KPO = R^2 - a^2 \sin^2\psi;$$

donc

$$\frac{2d\beta}{\sqrt{[(R+a)^2 \cos^2\beta + (R-a)^2 \sin^2\beta]}} = \frac{d\psi}{\sqrt{[R^2 \cos^2\psi + (R^2 - a^2)\sin^2\psi]}}.$$

On a, en même temps,

$$\sin\psi = \frac{AP \cdot \sin\beta}{OP} = \frac{2R \sin\beta \cos\beta}{\sqrt{[(R+a)^2 \cos^2\beta + (R-a)^2 \sin^2\beta]}},$$

ce qui est la substitution de *Landen*.

„Je suis aussi parvenu à étendre au théorème d'*Abel* ma construction de l'addition des fonctions elliptiques. Dans cette dernière, la corde $PQ$ d'un cercle touche constamment un autre cercle. Soit $T$ le point d'intersection

de deux positions consécutives de la droite; les deux angles $QQT$ et $PPT$ étant égaux d'après une propriété du cercle, on aura

$$\frac{PP}{PT} = \frac{QQ}{QT},$$

ce qui est l'équation différentielle, dont par la construction de la droite inscrite à l'un et circonscrite à l'autre cercle on trouve l'intégrale complète et algébrique, la même qui a été donnée par *Euler*. A présent, je suppose qu'une corde $C$ d'une courbe I du $n^{ième}$ degré touche constamment une autre courbe II. Soient $P$ un point d'intersection de la corde mobile avec la courbe I, et $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ l'élément de la courbe I dans ce point, $T$ le point de contact de la corde $C$ avec la courbe II; si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe I, je démontre, par des considérations mixtes de géométrie et d'algèbre.

la formule générale

$$\Sigma \frac{\psi(x,y)\,ds}{PT\cdot\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}} = 0,$$

$\psi(x,y)$ étant une fonction entière quelconque de $x$ et $y$ de l'ordre $n-2$, et la somme s'étendant aux $n$ points d'intersection, le signe du radical étant $+$ ou $-$, selon que ces points sont de l'un ou de l'autre côté de $T$. Supposons en particulier que la courbe I rentre dans ces courbes pour les points desquelles on peut exprimer $x$ et $y$ par des fractions dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des fonctions entières d'une troisième variable $t$, $x=\frac{\tau_1}{\tau}$, $y=\frac{\tau_2}{\tau}$, $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$ étant du $n^{\text{ième}}$ degré, ce qui même pourra toujours se faire pour les courbes du premier et du second degré. Faisant usage de divers théorèmes établis dans mon Mémoire sur l'élimination (Journal de M. *Crelle*, tome XV), je trouve que, $\beta(t)$ étant une fonction quelconque de $t$ du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, on aura

$$\frac{\beta(t)}{\tau}dt = \frac{\psi(x,y)\,ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}},$$

$\psi(x,y)$ étant, comme ci-dessus, du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré. On aura donc

$$\Sigma \frac{\beta(t)\,dt}{\tau\cdot PT} = 0.$$

Soit la courbe II un cercle ayant pour équation $x^2+y^2=1$; on aura

$$\tau\cdot PT = \sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)},$$

donc

$$\Sigma \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)}}=0, \quad \text{d'où} \quad \Sigma\int \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)}}=0,$$

les $n$ intégrales étant prises entre les limites correspondantes aux intersections de la courbe I avec deux tangentes quelconques du cercle. Soit $f(t)$ une fonction donnée du $(2p)^{\text{ième}}$ degré, prenons trois fonctions entières de $t$ quelconques, $\Psi(t)$, $U$, $\tau_1$, respectivement du $(p-2)^{\text{ième}}$, $(n-p)^{\text{ième}}$, $n^{\text{ième}}$ degré, déterminons deux autres fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré, $\tau$ et $\tau_2$, au moyen de la formule,

$$\tau_1^2 - U^2 f(t) = \tau^2 - \tau_2^2,$$

et supposons enfin, que dans l'équation-somme trouvée on ait $\beta(t)=U\Psi(t)$ et que les limites des intégrales correspondent aux intersections de la courbe I

avec les deux tangentes du cercle parallèles à l'axe des $x$, on aura l'équation-somme,

$$\Sigma \int \frac{\Psi(t)\,dt}{\sqrt{f(t)}} = 0,$$

les limites des $n$ intégrales étant les racines de l'équation

$$\tau^2 - \tau_2^2 = \tau_1^2 - U^2 f(t) = 0,$$

ce qui est le théorème d'*Abel*. Mais la forme sous laquelle ce théorème se présente, d'après la construction précédente, ne semble pas dépourvue d'intérêt. Comme je n'ai étudié avec soin que les intégrales qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconques I et II, comporte la même généralité que le théorème *général* d'*Abel*. Par vos travaux sur ce théorème pris dans toute sa *généralité*, vous serez mieux que moi à même d'en juger.

„Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre..."

# 16.

# Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höhern Transcendenten.

---

## 1.

Unter den hinterlafsnen Arbeiten *Abels* finden sich zwei kleine Aufsätze, der 9te und 10te im 2ten Bande seiner gesammelten Werke, in welchen die Sätze, welche *Legendre* über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale gefunden hat, zu einer grofsen Allgemeinheit erhoben sind. Ich will hier diese Arbeiten *Abels* reproduciren, um sie durch eine etwas abweichende Darstellung vielleicht in ein besseres Licht zu setzen.

In der ersten der beiden Abhandlungen, welche den Titel führt: *„Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes"* (S. 54 — 57 am angef. O.), beweist *Abel* ein Theorem, welches mit dem folgenden übereinkommt:

„Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Function von $x$; es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei beliebige andre ganze rationale Functionen von $x$, deren Summe

$$f_1(x)+f_2(x) = \frac{df(x)}{dx};$$

man setze ferner

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)}, \qquad \frac{d\log\psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

ein Aggregat von Producten von der Form

$$C_{m,n}\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n\,dx}{\varphi(x)},$$

wo $m$ und $n$ ganze positive Zahlen und die Gröfsen $C_{m,n}$ Constanten sind."

Der vorgelegte Ausdruck, welchen ich mit

$$H = \varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

bezeichnen will, kann folgendermafsen dargestellt werden,

$$H = \iint\left(\frac{d\log\varphi(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha\,dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}$$
$$-\iint\left(\frac{d\log\psi(x)}{dx}+\frac{1}{\alpha-x}\right)\frac{\psi(x)\,d\alpha\,dx}{(\alpha-x)\psi(\alpha)},$$

oder da in Folge der Gleichungen, durch welche die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ definirt wurden, ihr Product

$$\varphi(x)\psi(x) = f(x)$$

wird, durch die Formel

$$H = \iint\frac{f(\alpha)+(x-\alpha)f_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx - \iint\frac{f(x)+(\alpha-x)f_2(x)}{(\alpha-x)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx$$
$$= \iint\frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)+f_2(x)\}}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx.$$

Setzt man $\frac{df(x)}{dx} - f_1(x)$ für $f_2(x)$, so wird der Zähler des Bruchs unter dem doppelten Integralzeichen

$$f(\alpha)-f(x)-(\alpha-x)\frac{df(x)}{dx}+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)-f_1(x)\}.$$

Dieser Ausdruck, wie man sogleich sieht, geht durch $(x-\alpha)^2$ auf. Ich will den Quotient, welcher eine ganze rationale Function der Gröfsen $x$ und $\alpha$ ist, mit

$$\Sigma C_{m,n}\alpha^m x^n = \frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)+f_2(x)\}}{(x-\alpha)^2}$$

bezeichnen, wo die Gröfsen $C_{m,n}$ von $\alpha$ und $x$ unabhängige Constanten sind. Durch Substitution dieses Ausdrucks verwandelt sich der für $H$ gefundne Werth in

$$H = \Sigma C_{m,n}\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n\,dx}{\varphi(x)},$$

was der zu beweisende Satz ist.

Entwickelt man die Brüche $\frac{-f(x)}{(x-\alpha)^2}+\frac{f_2(x)}{x-\alpha}$ nach absteigenden Potenzen von $x$, so wird $C_{m,n}$ der Coëfficient von $\alpha^m x^n$ in dieser Entwicklung, da aus den beiden andern Termen des für $\Sigma C_{m,n}\alpha^m x^n$ angegebnen Ausdrucks nur negative Potenzen von $x$ hervorgehen. Setzt man

$$f_1(x) = \Sigma a_1^{(i)}x^i, \quad f_2(x) = \Sigma a_2^{(i)}x^i, \quad f(x) = c+\Sigma\frac{1}{i+1}(a_1^{(i)}+a_2^{(i)})x^{i+1},$$

wo $c$ eine Constante ist, so ergiebt sich auf diese Weise

$$C_{m,n} = \frac{-(m+1)}{m+n+2}(a_1^{(m+n+1)} + a_2^{(m+n+1)}) + a_2^{(m+n+1)}$$
$$= \frac{-1}{m+n+2}\{(m+1)a_1^{(m+n+1)} - (n+1)a_2^{(m+n+1)}\}.$$

Über die Gränzen der Integration ist folgendes zu bemerken.

Damit, wie gesetzt worden,

$$\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha} = \int^{d\cdot\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha}} \frac{d\cdot\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha}}{d\alpha} d\alpha,$$

mufs das Integral von einem solchen Werthe von $\alpha$ an genommen werden, für welchen $\varphi(\alpha)$ verschwindet, und eben so mufs in der Gleichung

$$\frac{\psi(x)}{\alpha-x} = \int^{d\cdot\frac{\psi(x)}{\alpha-x}} \frac{d\cdot\frac{\psi(x)}{\alpha-x}}{dx} dx$$

das Integral von einem solchen Werthe von $x$ an genommen werden, für welchen $\psi(x)$ verschwindet. Aufserdem aber dürfen die Intervalle, über welche in Bezug auf $\alpha$ und $x$ integrirt wird, keinen Werth mit einander gemein haben, oder es darf kein Werth, den $\alpha$ während der Integration annehmen kann, mit einem Werthe, den $x$ während der Integration annehmen kann, zusammenfallen, weil die Vertauschung der Ordnung der Integration, welche den obigen Betrachtungen zu Grunde liegt, nur dann allgemein zulässig ist, wenn die zu integrirende Function nicht in diesen Intervallen unendlich wird.

Es sei

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\mu_1}(x-\alpha_2)^{\mu_2}(x-\alpha_3)^{\mu_3}\ldots,$$

wo $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ etc. ganze positive Zahlen sind; man erhält dann

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)dx} = \frac{\mu_1}{x-\alpha_1} + \frac{\mu_2}{x-\alpha_2} + \frac{\mu_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.}$$

Man kann daher, wenn

$$\beta_i + \gamma_i = \mu_i,$$

für die Differentialquotienten von $\log\varphi(x)$ und $\log\psi(x)$ folgende Ausdrücke setzen:

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \frac{\beta_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.} + U,$$
$$\frac{d\log\psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x-\alpha_1} + \frac{\gamma_2}{x-\alpha_2} + \frac{\gamma_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.} - U.$$

Die Function $U$ kann hier eine beliebige ganze rationale Function von $x$ sein, und aufserdem noch für die verschiednen Werthe von $i$ Aggregate von Brüchen

von der Form

$$\frac{\beta_i'}{(x-\alpha_i)^2}+\frac{\beta_i''}{(x-\alpha_i)^3}+\ldots+\frac{\beta_i^{(\mu_i-1)}}{(x-\alpha_i)^{\mu_i}}.$$

enthalten. Dieses ist die allgemeinste Annahme, unter welcher die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen bleiben und ihre Summe $=\frac{df(x)}{dx}$ wird. Die Function $\int U dx$ wird daher immer eine rationelle, ganze oder gebrochne Function von $x$, deren Nenner nur die Factoren $x-\alpha_i$ hat, und jeden in einer niedrigern Potenz, als in der ihn $f(x)$ enthält. Es werden demnach in dem aufgestellten Theorem die allgemeinsten Formen, welche $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ annehmen können,

$$\varphi(x) = e^P(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots,$$
$$\psi(x) = e^{-P}(x-\alpha_1)^{\gamma_1}(x-\alpha_2)^{\gamma_2}(x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und $P$ eine rationale, ganze oder gebrochene Function, deren Nenner nur die Potenzen von $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ etc. als Factoren enthält, und zwar jedes $x-\alpha_i$ höchstens in die $(\beta_i+\gamma_i-1)^{te}$ Potenz erhoben.

Hieraus ergiebt sich das folgende Theorem.

### Theorem I.

„Es sei

$$\varphi(x) = e^P(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots,$$
$$\psi(x) = e^{-P}(x-\alpha_1)^{\gamma_1}(x-\alpha_2)^{\gamma_2}(x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und

$$P=\frac{Q}{(x-\alpha_1)^{\beta_1+\gamma_1-1}(x-\alpha_2)^{\beta_2+\gamma_2-1}(x-\alpha_3)^{\beta_3+\gamma_3-1}\ldots},$$

wo $Q$ eine beliebige ganze rationale Function von $x$ ist; es seien ferner $a_1^{(i)}$ und $a_2^{(i)}$ die Coëfficienten von $x^i$ in den ganzen rationalen Functionen

$$\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \quad \text{und} \quad \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}-\psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$
$$=\Sigma\left(\frac{n+1}{m+n+2}a_2^{(m+n+1)}-\frac{m+1}{m+n+2}a_1^{(m+n+1)}\right)\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n dx}{\varphi(x)},$$

wo die Integrationen in Bezug auf $\alpha$ und $x$ von solchen Anfangsgränzen an zu nehmen sind, für welche $\varphi(\alpha)$ und $\psi(x)$ verschwinden."

Die von *Abel* (S. 56 oben) hinzugefügte Beschränkung, dafs die Exponenten $\beta_1$, $\gamma_1$ etc. positiv und kleiner als 1 sein müssen, ist nicht für alle wesentlich nothwendig. Wäre dies der Fall, so könnte, wie aus dem Vorigen erhellt, niemals $P$ eine gebrochne Function sein, wie doch *Abel* annimmt. Soll in dem vorstehenden Theorem $\psi(x)$ dieselbe Function wie $\varphi(x)$ sein, so wird es die Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function, $\varphi(x) = \psi(x) = \sqrt{f(x)}$. In diesem Falle mufs immer $P$ verschwinden. Setzt man für denselben Fall $\frac{1}{i+1}\alpha_1^{(i)} = \frac{1}{i+1}\alpha_2^{(i)} = b_{i+1}$, wo $b_i$ der Coëfficient von $x^i$ in $f(x)$ ist, so wird

$$C_{m,n} = (n-m)\,b^{(n+m+2)},$$

also $C_{m,m} = 0$.

2.

Ich komme jetzt zu der grofsen Ausdehnung, welche *Abel* dem schon so allgemeinen Theorem, welches im Vorigen bewiesen worden, gegeben hat (s. Abh. X. des 2ten Theiles seiner Werke S. 58 — 65). Zu dem näheren Verständnifs dieser Ausdehnung ist es nöthig, einige Sätze über lineäre Differentialgleichungen voranzuschicken.

Hat man einen Ausdruck

$$Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots + A_ny^{(n)},$$

wo $y^{(i)} = \frac{d^iy}{dx^i}$ und $A$, $A_1$ etc. Functionen von $x$ sind, so entspricht ihm immer ein andrer

$$Bz + B_1z' + B_2z'' \ldots + B_nz^{(n)}$$

in der Art, dafs für unbestimmte Functionen $y$ und $z$ der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots + A_ny^{(n)}\} + y\{Bz + B_1z' + B_2z'' \ldots + B_nz^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differentiale wird. Diese Bedingung erfordert die Gleichung

$$By + B_1y' + B_2y'' \ldots + B_ny^{(n)} = -Ay + \frac{d.A_1y}{dx} - \frac{d^2.A_2y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_ny}{dx^n},$$

mittelst welcher der zweite Ausdruck aus dem gegebnen bestimmt wird, und durch dieselbe Bedingung wird auch auf ganz ähnliche Art der gegebne Ausdruck aus dem zweiten mittelst der Gleichnng

$$Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots + A_ny^{(n)} = -By + \frac{d.B_1y}{dx} - \frac{d^2.B_2y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.B_ny}{dx^n}$$

bestimmt. Ich werde mit $[y]_1$ und $[y]_2$ die Ausdrücke

$$[y]_1 = Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots + A_ny^{(n)} = -By + \frac{d.B_1y}{dx} - \frac{d^2.B_2y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.B_ny}{dx^n},$$

$$[y]_2 = By + B_1y' + B_2y'' \ldots + B_ny^{(n)} = -Ay + \frac{d.A_1y}{dx} - \frac{d^2.A_2y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_ny}{dx^n}$$

bezeichnen, und das Integral

$$\int (z[y]_1 + y[z]_2)\,dx = [y,z]$$

setzen. Wenn man in den Functionen $A$, $A_1$ etc., $B$, $B_1$ etc. für die unabhängige Variable $x$ eine andre einführt und nach dieser differentiirt, so werde ich dieselbe den Klammern oben rechts beifügen.

Wenn $z$ eine Lösung der Gleichung

$$[z]_2 = 0,$$

$y$ eine beliebige Function ist, so folgt aus der vorstehenden Formel,

$$\int z[y]_1\,dx = [y,z],$$

und eben so, wenn $y$ eine Lösung der Gleichung

$$[y]_1 = 0,$$

$z$ aber eine beliebige Function ist,

$$\int y[z]_2\,dx = [y,z].$$

Wenn $y$ und $z$ gleichzeitig Lösungen der Gleichungen

$$[y]_1 = 0, \quad [z]_2 = 0$$

sind, so wird $[y,z]$ einer Constante gleich.

Es seien $A$, $A_1$ etc. ganze rationale Functionen von $x$, so werden auch $B$, $B_1$ etc. ganze rationale Functionen von $x$ sein. Nennt man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ etc. die Functionen von $\alpha$, welche aus $A$, $A_1$ erhalten werden, wenn man $\alpha$ für $x$ substituirt, und setzt

$$\frac{A-\mathfrak{A}}{x-\alpha} = P, \quad \frac{A_1-\mathfrak{A}_1}{x-\alpha} = P_1, \quad \ldots \quad \frac{A_n-\mathfrak{A}_n}{x-\alpha} = P_n,$$

so werden $P$, $P_1$ etc. ganze rationale Functionen der beiden Gröfsen $x$ und $\alpha$. Substituirt man in

$$[y]_2 = -Ay + \frac{d.A_1y}{dx} - \frac{d^2.A_2y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_ny}{dx^n}$$

für $y$ den Bruch $\frac{1}{x-\alpha}$, und setzt statt der Differentiationen von $\frac{1}{x-\alpha}$ nach $x$ die nach $\alpha$, abwechselnd mit entgegengesetztem Zeichen genommen, so erhält man

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2 = -\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} - P + \frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2P_2}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^nP_n}{dx^n}.$$

*Es wird daher*

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)}$$

*eine ganze rationale Function von $x$ und $\alpha$.* Ich will diese ganze rationale Function von $x$ und $\alpha$ mit $U$ bezeichnen. Setzt man

$$\mathfrak{A}_m^{(i)} = \frac{d^i\mathfrak{A}_m}{d\alpha^i},$$

so wird

$$1.\quad U = \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)}$$
$$= \frac{\mathfrak{A}+B}{x-\alpha} + \frac{\mathfrak{A}_1-B_1}{(x-\alpha)^2} + \Pi 2\cdot\frac{\mathfrak{A}_2+B_2}{(x-\alpha)^3} \ldots + \Pi n\cdot\frac{\mathfrak{A}_n+(-1)^n B_n}{(x-\alpha)^{n+1}}.$$

Ist

$$U = \Sigma C_{m,p}\,\alpha^m x^p,$$

wo $m$ und $p$ nur ganze positive Werthe annehmen, so ergiebt sich $C_{m,p}$ aus (1.) auf doppelte Art, nämlich als Coëfficient von $x^p$ in dem Ausdrucke

$$\frac{B}{x^{m+1}} - (m+1)\frac{B_1}{x^{m+2}} + (m+1)(m+2)\frac{B_2}{x^{m+3}} \ldots \pm (m+1)(m+2)\ldots(m+n)\frac{B_n}{x^{m+n+1}}$$
$$= [x^{-m-1}]_2,$$

oder als Coëfficient von $\alpha^m$ in dem Ausdrucke

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\alpha^{p+1}} + (p+1)\frac{\mathfrak{A}_1}{\alpha^{p+1}} - (p+1)(p+2)\frac{\mathfrak{A}_2}{\alpha^{p+2}} \ldots \mp (p+1)(p+2)\ldots(p+n)\frac{\mathfrak{A}_n}{\alpha^{p+n+1}}$$
$$= [\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}\ *).$$

Die Identität dieser beiden für $C_{m,p}$ gefundnen Darstellungen folgt auch unmittelbar aus der Betrachtung, dafs in $x^{-m-1}[x^{-p-1}]_1 + x^{-p-1}[x^{-m-1}]_2$, als dem Differential des Ausdrucks $[x^{-p-1}, x^{-m-1}]$, welcher aus blofsen Potenzen von $x$ besteht, der Term $\frac{1}{x}$ nicht vorkommen kann.

Ich multiplicire die Gleichung (1.) mit

$$\frac{d\alpha\,dx}{\psi(\alpha)\varphi(x)},$$

---

*) Setzt man

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+i)}A_i + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+i)}B_i = M_i,$$

wo $\nu = m+p+1$, so führt die Vergleichung der beiden obigen Bestimmungen von $C_{m,p}$ auf die Gleichung

$$M - \frac{dM_1}{dx} + \frac{d^2M_2}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^nM_n}{dx^n} = 0,$$

welche man mittelst der bekannten Formel

$$1 - k_1\frac{m+1}{\nu+1} + k_2\frac{(m+1)(m+2)}{(\nu+1)(\nu+2)} - k_3\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+2)} \ldots \pm \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}$$
$$= \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)},$$

wo $k_i = \frac{k(k-1)\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots i}$, verificirt. Es wird daher der Ausdruck

$$My + M_1y' + M_2y'' \ldots + M_ny^{(n)}$$

ein vollständiges Differential.

wo $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ respective Lösungen der Gleichungen

$$\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]_1^{(x)} = 0, \quad \left[\frac{1}{\psi(\alpha)}\right]_2^{(\alpha)} = 0$$

sein sollen, und integrire nach $\alpha$ und $x$. Man erhält aber zufolge der obigen Formeln

$$\int\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)}\frac{dx}{\varphi(x)} = \left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)},$$

$$\int\left[\frac{1}{\alpha-x}\right]_1^{(\alpha)}\frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)},$$

und daher

$$2. \quad \int\left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)}\frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} - \int\left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)}\frac{dx}{\varphi(x)} = \iint\frac{U\,d\alpha\,dx}{\psi(\alpha)\,\varphi(x)}.$$

In der Formel (2.) sind die beiden Ausdrücke $[y, z]$ so beschaffen, dafs $y$ eine Lösung der Gleichung $[y]_1 = 0$ oder $z$ eine Lösung der Gleichung $[z]_2 = 0$ ist. Für diese Fälle kann man Folgendes bemerken.

Es seien $y_1, y_2, \ldots y_n$ die $n$ Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, und $z_1, z_1, \ldots z_n$ die $n$ Lösungen der Gleichung $[z]_2 = 0$, so sind die $nn$ Ausdrücke $[y_i, z_k]$ Constanten gleich. Da man für $z_1, z_2, \ldots z_n$ beliebige lineäre Functionen derselben, deren Coëfficienten constant sind, einführen kann, so kann man sich diese constanten Coëfficienten so bestimmt denken, dafs die Ausdrücke

$$[y_i, z_i] = 1,$$

dagegen wenn $i$ und $k$ verschieden sind, die Ausdrücke

$$[y_i, z_k] = 0$$

sind. Mittelst dieser Bedingungen sind für gegebne Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$, und umgekehrt für gegebne Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ vollkommen bestimmt. Hat man nämlich für eine beliebige Function $z$ die $n$ Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots \quad [y_n, z] = r_n,$$

welches $n$ lineäre Gleichungen zwischen $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ sind, so folgt

$$\begin{aligned}
z &= z_1 r_1 + z_2 r_2 \ldots + z_n r_n,\\
z' &= z_1' r_1 + z_2' r_2 \ldots + z_n' r_n,\\
z'' &= z_1'' r_1 + z_2'' r_2 \ldots + z_n'' r_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z^{(n-1)} &= z_1^{(n-1)} r_1 + z_2^{(n-1)} r_2 \ldots + z_n^{(n-1)} r_n,
\end{aligned}$$

indem man sogleich sieht, dafs durch die Substitution dieser Werthe den

$n$ Gleichungen Genüge geschieht. Eben so erhält man für eine beliebige Function $y$ aus den $n$ Gleichungen

$$[y, z_1] = s_1, \quad [y, z_2] = s_2, \quad \ldots \quad [y, z_n] = s_n$$

die Werthe

$$\begin{aligned} y &= y_1 s_1 + y_2 s_2 \ldots + y_n s_n, \\ y' &= y_1' s_1 + y_2' s_2 \ldots + y_n' s_n, \\ y'' &= y_1'' s_1 + y_2'' s_2 \ldots + y_n'' s_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= y_1^{(n-1)} s_1 + y_2^{(n-1)} s_2 \ldots + y_n^{(n-1)} s_n. \end{aligned}$$

Setzt man in $r_i = [y_i, z]$ für $z$ die Function von $x$, welche durch das Integral

$$z = \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)\psi(\alpha)}$$

gegeben ist, und $\frac{1}{\varphi(x)} = y_i$, so folgt aus (2.)

$$r_i = \int \left[y_i, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \int \left[\frac{1}{\alpha - x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} y_i\, dx + \iint \frac{\gamma_i U d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)},$$

und daher

$$z_1^{(i)} r_1 + z_2^{(i)} r_2 \ldots + z_n^{(i)} r_n = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)},$$

wenn man

$$Z^{(i)} = z_1^{(i)} \int \frac{\gamma_1\, dx}{\alpha - x} + z_2^{(i)} \int \frac{\gamma_2\, dx}{\alpha - x} \ldots + z_n^{(i)} \int \frac{\gamma_n\, dx}{\alpha - x},$$

$$V^{(i)} = z_1^{(i)} \iint \frac{\gamma_1 U d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} + z_2^{(i)} \iint \frac{\gamma_2 U d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} \ldots + z_n^{(i)} \iint \frac{\gamma_n U d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)}$$

setzt. Man erhält daher durch die im Vorhergehenden zur Auflösung der Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots \quad [y_n, z] = r_n$$

gegebnen Formeln für die Functionen $z$, $z'$, $\ldots$ $z^{(n-1)}$ die Werthe

$$z^{(i)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}\psi(\alpha)} = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)}.$$

Man setze in dieser Gleichung für $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ nach und nach $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\ldots$ $\zeta_n$, wo $\zeta_k$ dieselbe Function von $\alpha$ sei, die $z_k$ von $x$ ist. Man bezeichne ferner die der Lösung $\frac{1}{\psi(\alpha)} = \zeta_k$ entsprechenden Werthe von $V^{(i)}$ mit $V_k^{(i)}$, so hat man

$$[Z^{(i)}, \zeta_k]^{(\alpha)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{\zeta_k\, d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} - V_k^{(i)}.$$

Setzt man hierin für $k$ die Werthe 1, 2, .... $n$, so erhält man $n$ lineäre Gleichungen zwischen den Gröfsen

$$Z_i, \quad \frac{dZ_i}{d\alpha}, \quad \frac{d^2Z}{d\alpha^2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^{n-1}Z}{d\alpha^{n-1}},$$

und nach den obigen Auflösungsformeln, wenn $v_i$ dieselbe Function von $\alpha$ bedeutet, welche $y_i$ von $x$ ist,

$$\frac{d^kZ^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^i \Pi i \left\{v_1^{(k)} \int \frac{\zeta_1 d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} + v_2^{(k)} \int \frac{\zeta_2 d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} \ldots\ldots + v_n^{(k)} \int \frac{\zeta_n d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}}\right\}$$
$$- \{v_1^{(k)} V_1^{(i)} + v_2^{(k)} V_2^{(i)} \ldots\ldots + v_n^{(k)} V_n^{(i)}\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d^kZ^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^k \Pi k \left\{z_1^{(i)} \int \frac{y_1 dx}{(\alpha-x)^{k+1}} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2 dx}{(\alpha-x)^{k+1}} \ldots\ldots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n dx}{(\alpha-x)^{k+1}}\right\},$$

ferner

$$v_1^{(k)} V_1^{(i)} + v_2^{(k)} V_2^{(i)} \ldots\ldots + v_n^{(k)} V_n^{(i)} = \Sigma v_g^{(k)} V_g^{(i)} = \Sigma\Sigma v_g^{(k)} z_h^{(i)} \iint \zeta_g y_h U d\alpha dx,$$

wo für die beiden Indices $g$ und $h$ die Werthe 1, 2, .... $n$ zu setzen sind. Man erhält daher folgendes Theorem.

Theorem.

„Es seien $A$, $A_1$, .... $A_n$ und $B$, $B_1$, .... $B_n$ ganze rationale Functionen von $x$, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, dafs, wenn man durch die obern Accente die Differentialquotienten bezeichnet, für zwei beliebige Functionen $y$ und $z$ der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots\ldots + A_ny^{(n)}\} + y\{Bz + B_1z' + B_2z'' \ldots\ldots + B_nz^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differential wird; es seien

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots\ldots \quad y_n$$

die $n$ von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$Ay + A_1y' + A_2y'' \ldots\ldots + A_ny^{(n)} = 0,$$

und

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots\ldots \quad z_n$$

die von ihnen abhängigen Lösungen der Gleichung

$$Bz + B_1z' + B_2z'' \ldots\ldots + B_nz^{(n)} = 0,$$

welche man, was immer möglich ist, so bestimmt, dafs das für unbestimmte Functionen $y$ und $z$ und ohne Hinzufügung einer willkürlichen Constante dargestellte Integral des Ausdrucks $z\{Ay + A_1y' \ldots\ldots\} + y\{Bz + B_1z' \ldots\ldots\}$ verschwindet, wenn man $y = y_i$ und $z = z_k$, oder $= 1$ wird, wenn man $y = y_i$, $z = z_i$ setzt; es sei ferner $C_{m,p}$ der Coëfficient von $\frac{1}{x}$ in dem Ausdrucke

$$-x^{-m-1}\{Ay + A_1y' \ldots\ldots + A_ny^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-p-1}$, oder, was dasselbe ist, in dem Ausdrucke

$$x^{-p-1}\{By + B_1y' \ldots + B_ny^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-m-1}$ gesetzt wird; es seien endlich

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_n;\quad \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_n$$

die Functionen von $\alpha$, in welche sich

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n;\quad z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_n$$

verwandeln, wenn man $\alpha$ für $x$ substituirt: so wird

$$\Pi k\left\{z_1^{(i)}\int\frac{y_1\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}} + z_2^{(i)}\int\frac{y_2\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}} \ldots + z_n^{(i)}\int\frac{y_n\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}}\right\}$$

$$-\Pi i\left\{v_1^{(k)}\int\frac{\zeta_1\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} + v_2^{(k)}\int\frac{\zeta_2\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} \ldots + v_n^{(k)}\int\frac{\zeta_n\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}}\right\}$$

$$= \Sigma C_{m,p}\,v_g^{(k)}z_h^{(i)}\int\alpha^m\zeta_g\,d\alpha\int x^p y_h\,dx,$$

wo in der mit $\Sigma$ bezeichneten vierfachen Summe $g$ und $h$ die Werthe $1, 2, \ldots n$ erhalten, $m$ und $p$ alle Werthe, für welche sich in einer oder in mehreren von den Functionen $x^{-l-1}A_l$ ein Term $x^{m+p}$ findet, und die Accente $i$ und $k$, welche die Ordnung der Differentialen anzeigen, beliebig angenommne Zahlen aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ sind."

Die im vorstehenden Theorem gegebne Formel umfafst $nn$ Gleichungen, welche man aus der Combination aller Werthe von $i$ mit allen Werthen von $k$ erhält. Man kann mittelst derselben die $nn$ Gröfsen $\int\frac{y_i\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ lineär durch die $nn$ Gröfsen $\int\frac{\zeta_i\,d\alpha}{(\alpha-x)^{k+1}}$ ausdrücken und umgekehrt. Für $n=1$ erhält man den §. 1. entwickelten Satz.

Wenn die Differentialgleichung $Ay + A_1y' \ldots + A_ny^{(n)} = 0$ die besondre Form

$$Ky + \frac{d.K_1y'}{dx} + \frac{d^2.K_2y''}{dx^2} + \frac{d^3.K_3y'''}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

hat, welche ich in meinen Untersuchungen *über die Kriterien des Maximum und Minimum bei den isoperimetrischen Problemen* betrachtet habe, wird die Differentialgleichung $By + B_1y' \ldots + B_ny^{(n)} = 0$ mit ihr identisch, oder es wird

$$B = -A,\quad B_1 = -A_1,\quad B_2 = -A_2,\quad \ldots\quad B_n = -A_n.$$

Man kann diese lineären Differentialgleichungen als solche bezeichnen, bei denen jede Lösung zugleich ein Factor, welcher sie integrabel macht, und jeder solcher

Factor eine ihrer Lösungen ist. Sie nehmen für eine gerade Ordnung immer die obige Form an; für eine ungerade Ordnung kann man dieselben passend so darstellen:

$$\sqrt{K_1}.\frac{d.y\sqrt{K_1}}{dx}+\frac{d.\left(\sqrt{K_2}\frac{d.y'\sqrt{K_2}}{dx}\right)}{dx}+\frac{d^2\left(\sqrt{K_3}\frac{d.y''\sqrt{K_3}}{dx}\right)}{dx^2}+\text{etc.}=0.$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichungen bietet sich der merkwürdige Umstand dar, dafs durch *eine* bekannt gewordne Lösung sich ihre Ordnung um *zwei* Einheiten verringern läfst, und die übrigen Lösungen sich je nach der weitern Verringerung der Ordnung der Differentialgleichung, die sich durch sie erreichen läfst, unterscheiden. Man kann ihre Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ immer so bestimmen, dafs die aus denselben auf die oben angegebne Weise abgeleiteten Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit ihnen übereinkommen, so dafs

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad \ldots \quad z_n = y_n.$$

Um das aufgestellte allgemeine Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgränzen der Integrale zu bestimmen und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Character der Lösungen der lineären Differentialgleichungen, deren Coëfficienten ganze rationale Functionen der Variable sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.

13. Mai 1846.

# 17.

## Über einige der Binomialreihe analoge Reihen.

Wenn man der Binomialreihe ähnliche Reihen bildet, indem man statt des $p^{\text{ten}}$ Binomialcoëfficienten den analogen Ausdruck

$$v_p = \frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^p)}$$

setzt, so erhält der Quotient zweier solcher, verschiednen Werthen von $v$ entsprechenden, Reihen wiederum dieselbe Form. Man hat nämlich, wenn $u = wv^{-1}$,

$$1. \quad \frac{1+w_1z+w_2z^2+w_3z^3+\text{etc.}}{1+v_1z+v_2z^2+v_3z^3+\text{etc.}} = 1+u_1.vz+u_2.v^2z^2+u_3.v^3z^3+\text{etc.}$$

$$= 1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$

Bedeutet $i$ eine unendlich grofse Gröfse und setzt man

$$x = e^{-\frac{1}{i}}, \quad v = e^{\frac{m}{i}}, \quad w = e^{\frac{m+n}{i}},$$

so verwandelt sich diese Formel in

$$\frac{(1-z)^{m+n}}{(1-z)^m} = (1-z)^n,$$

wenn man statt der Potenzen von $1-z$ ihre Entwicklungen setzt. Aus (1.) folgt, *dafs der reciproke Werth der Reihe*

$$1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$

*durch bloſse Vertauschung von $v$ und $w$ erhalten wird.* Bezeichnet man diese Reihe mit

$$[w,v] = 1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.},$$

so wird die Fundamentaleigenschaft der Function $[w,v]$ durch die Gleichung

$$2. \quad [w,v] = \frac{[w,1]}{[v,1]}$$

gegeben. Setzt man $iv$, $iw$, $i^{-1}z$ für $v$, $w$, $z$, so ändert sich $[w,v]$ nicht Nimmt man $i$ unendlich, so verwandeln sich $v_p$ und $w_p$ in

$$\frac{(-i)^p x^{\frac{1}{2}(pp-p)}v^p}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)}, \quad \frac{(-i)^p x^{\frac{1}{2}(pp-p)}w^p}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)},$$

und es wird daher $[w,v]$ zufolge (1.) gleich dem Bruche

$$\frac{1-\frac{wz}{1-x}+\frac{xw^2z^2}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^3w^3z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^6w^4z^4}{(1-x)\ldots(1-x^4)}-\text{etc.}}{1-\frac{vz}{1-x}+\frac{xv^2z^2}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^3v^3z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^6v^4z^4}{(1-x)\ldots(1-x^4)}-\text{etc.}}.$$

Der Zähler und Nenner desselben wird aus der Formel ***Eulers***,

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\ldots.$$
$$=1+\frac{xz}{1-x}+\frac{x^3z^2}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\text{etc.},$$

erhalten, wenn man $x^{-1}vz$ und $x^{-1}wz$ für $z$ setzt. Hieraus folgt

$$3.\quad [w,v]=1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)(1-x^3wz)\ldots.}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)(1-x^3vz)\ldots.}.$$

Um die Formel (3.) zu beweisen, setze ich

$$\varphi(z)=\frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)(1-x^3wz)\ldots.}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)(1-x^3vz)\ldots.}$$
$$=1+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+A_4z^4+\text{etc.},$$

wo die Coëfficienten $A_1$, $A_2$ etc. die Gröfse $z$ nicht enthalten sollen. Aus der Relation

$$\varphi(z)-\varphi(xz)=z\{v\varphi(z)-w\varphi(xz)\},$$

welche unmittelbar aus der von $\varphi(z)$ gegebnen Definition folgt, erhält man die Werthe von $A_1$, $A_2$ etc. mittelst der Gleichungen:

$(1-x)A_1=v-w$, $(1-x^2)A_2=(v-xw)A_1$, $(1-x^3)A_3=(v-x^2w)A_2$, etc.

Durch Substitution dieser Werthe in die für $\varphi(z)$ angenommne Reihe ergiebt sich die Formel (3.), aus welcher sogleich auch die Formel (1.) folgt.

Wenn man die Formel (1.) mit $1+v_1z+v_2z^2+v_3z^3+$ etc. multiplicirt, und hierauf nach den Potenzen von $z$ entwickelt, so giebt die Vergleichung der auf beiden Seiten in $z^p$ multiplicirten Terme, die Formel

$$4.\quad \frac{(1-w)(1-xw)(1-x^2w)\ldots.(1-x^{p-1}w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.(1-x^p)}$$
$$=\frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots.(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.(1-x^p)}+\frac{v-w}{1-x}\cdot\frac{(1-v)(1-xv)\ldots.(1-x^{p-2}v)}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^{p-1})}$$
$$+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-v)(1-xv)\ldots.(1-x^{p-3}v)}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^{p-2})}\ldots.+\frac{(v-w)(v-xw)\ldots.(v-x^{p-1}w)}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^p)},$$

welche dem sogenannten binomischen Lehrsatz für Facultäten entspricht. Man findet diese Formel in der *Analysis* von *Schweins* (Heidelb. 1820 pg. 292. 3), nur dafs dort für $v$ und $w$ beliebige ganze Potenzen von $x$ gesetzt sind. Es

folgt aus derselben durch Division mit dem ersten Terme des rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrucks

$$5.\quad \frac{(1-w)(1-xw)(1-x^2w)\ldots.(1-x^{p-1}w)}{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots.(1-x^{p-1}v)}$$

$$= 1+\frac{v-w}{1-x}\cdot\frac{1-x^p}{1-x^{p-1}v}+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x^{p-1}v)(1-x^{p-2}v)}$$

$$\ldots.+\frac{(v-w)(v-xw)\ldots.(v-x^{p-1}w)}{(1-x^{p-1}v)(1-x^{p-2}v)\ldots.(1-v)}.$$

Setzt man $x^{p-1}v=r$, $x^{p-1}w=u$, und dann $\frac{1}{x}$ für $x$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$6.\quad \frac{(1-u)(1-xu)(1-x^2u)\ldots.(1-x^{p-1}u)}{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots.(1-x^{p-1}r)}$$

$$= 1-\frac{u-r}{1-x}\cdot\frac{1-x^p}{1-r}+\frac{(u-r)(u-xr)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-r)(1-xr)}x$$

$$\ldots.\pm\frac{(u-r)(u-xr)\ldots.(u-x^{p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})\ldots.(1-x)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}x^{\frac{1}{2}p(p-1)}.$$

Setzt man hierin $u=x^mr$, so erhält man

$$7.\quad \frac{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}=\frac{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}$$

$$= 1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}x^2r^2+\text{etc.}$$

wo die einzelnen Terme die Factoren $x^\beta r^\alpha$ haben, in welchen die Exponenten $\alpha$ und $\beta$ die natürlichen und die pronischen (doppelten dreieckigen) Zahlen sind. Wenn man ferner in (6.) $r$ für $u$ und $x^mr$ für $r$ setzt, so erhält man

$$8.\quad \frac{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}=\frac{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}$$

$$= 1-\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^mr)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)}xr^2+\text{etc.},$$

wo die Exponenten $\alpha$ und $\beta$ in den Factoren $r^\alpha x^\beta$ die natürlichen und die dreieckigen Zahlen sind. Diese Gleichung wird auch aus der vorigen erhalten, wenn man $-m$ für $m$ und dann $x^mr$ setzt.

Setzt man in (3.) $z=1$, $v=r$, $w=x^mr$ oder $z=1$, $v=x^mr$, $w=r$, so erhält man für die Ausdrücke (7.) und (8.) andre Entwicklungen:

$$9.\quad \frac{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}=\frac{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}$$

$$= 1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^{p-1}r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{p-1}r)(1-x^{p-2}r)}r^2+\text{etc.},$$

10. $$\frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}{(1-x^mr)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)} = \frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r}{(1-x^pr)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p-m-1}r}$$

$$= 1 - \frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^{m+p-1}r)}r + \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{m+p-1}r)(1-x^{m+p-2}r}xr^2 - \text{etc.}$$

In der letzten Formel sind wieder in den Factoren $r^\alpha x^\beta$ die Exponenten $\alpha$ und $\beta$ die natürlichen und die dreieckigen Zahlen. In den Reihen (8.) und (9.) darf man $m$ und $p$, wenn sie beide ganze positive Zahlen sind, mit einander vertauschen können, wie aus der in diesem Falle geltenden doppelten Darstellung der ihnen gleichen Producte erhellt. Wenn aber diese Producte für andre Werthe von $m$ und $p$ eine Bedeutung zu haben aufhören, so bleibt doch die Gleichheit der durch Vertauschung von $m$ und $p$ erhaltnen Reihen für jeden Werth von $m$ und $p$ gültig. Denn wenn man die Reihen, welche für ganze positive Werthe von $m$ und $p$ einander gleich sind, nach den aufsteigenden Potenzen von $r$ entwickelt, und die in dieselben Potenzen von $r$ multiplicirten Terme vergleicht, so erhält man zwischen den Gröfsen $x^m$ und $x^p$, die man als zwei Unbekannte ansehen kann, Gleichungen von einer endlichen Ordnung, die für unendlich viele Werthe der Unbekannten erfüllt werden, nämlich immer, wenn man für dieselben beliebige ganze positive Potenzen von $x$ setzt. Es mufs also jede dieser Gleichungen identisch sein, in welchem Falle aber auch die Gleichungen zwischen den Reihen gelten, wenn man für $x^m$ und $x^p$ beliebige Gröfsen setzt. Man erhält auf diese Weise, wenn man für $x^m$ und $x^p$ die Gröfsen $s$ und $t$ substituirt, die beiden Gleichungen:

11. $$1 + \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}tr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}tr)(1-x^{-2}tr)} + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}sr)} + \frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}sr)(1-x^{-2}sr)} + \text{etc.},$$

12. $$1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-sr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t).xr^2}{(1-x)(1-x^2)(1-sr)(1-xsr)} - \text{etc.}$$

$$= 1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-tr)} + \frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s).xr^2}{(1-x)(1-x^2)(1-tr)(1-xtr)} - \text{etc.},$$

in deren letzterer der $(i+1)^{te}$ Term den Factor $x^{i^2(i-1)}$ hat. Weil bei dem Beweise dieser beiden Gleichungen eine Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von $r$ vorausgesetzt worden ist, so mufs man in der ersten derselben $x > 1$, in der zweiten $x < 1$ annehmen. Auch sieht man, wie die eine in die andre übergeht, wenn man $xr$ für $r$ und dann $\frac{1}{x}$ für $x$ setzt.

Will man das Product

$$(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots(1-x^{m-1}r),$$

in welchem $x$ kleiner als 1 angenommen werden soll, ***interpoliren***, d. h. will man einen Ausdruck haben, welcher die Fundamental-Eigenschaft dieses Productes besitzt und sich für ein ganzes positives $m$ auf dieses Product selbst reducirt, so dient hiezu der in's Unendliche fortlaufende Ausdruck

$$13.\quad \frac{1-r}{1-x^m r}\cdot\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\cdot\frac{1-x^2r}{1-x^{m+2}r}\cdot\frac{1-x^3r}{1-x^{m+3}r}\cdot\ldots$$
$$=(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots.(1-x^{m-1}r).$$

Denn wenn man denselben bis zum $n$ten Factor fortsetzt, wodurch man das Product

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots.(1-x^{n-1}r)}{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+n-1}r)}$$

erhält, so wird für ein ganzes positives $m$ das Verhältnifs dieses zu dem vorgelegten Product,

$$\frac{(1-r)(1-xr)\,1-x^2r)\ldots.(1-x^{n-1}r)}{(1-r)(1-xr)\,1-x^2r)\ldots.(1-x^{m+n-1}r)}=\frac{1}{(1-x^n r)(1-x^{n+1}r)\ldots.(1-x^{n+m-1}r)},$$

eine Gröfse, die sich mit wachsendem $n$ und zwar sehr schnell der Einheit nähert. Die Fundamental-Eigenschaft des vorgelegten Productes, das ich mit $F(r)$ bezeichnen will, ist durch die Gleichung

$$\frac{(1-r)F(xr)}{(1-x^m r)F(r)}=1$$

ausgedrückt. Substituirt man für $F(r)$ das unendliche Product, so wird der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen

$$\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\cdot\frac{(1-x^2r)(1-x^{m+1}r)}{(1-xr)(1-x^{m+2}r)}\cdot\frac{(1-x^3r)(1-x^{m+2}r)}{(1-x^2r)(1-x^{m+3}r)}\cdot\ldots;$$

setzt man dieses Product bis zum $n$ten Factor fort, so erhält man

$$\frac{1-x^n r}{1-x^{(m+n)}r},$$

welche Gröfse sich für jedes $m$ mit wachsendem $n$ sehr schnell der Einheit nähert.

Für ganze positive Werthe von $m$ und $p$ kann man den Ausdruck (7.)

$$\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}=\frac{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)},$$

auch durch die Formel

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)\cdot(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}$$

darstellen. Will man diese Formel interpoliren, so geschieht dies nach dem Vorigen durch das unendliche Product

$$14.\quad \frac{(1-x^m r)(1-x^p r)}{(1-r)(1-x^{m+p}r)}\cdot\frac{(1-x^{m+1}r)(1-x^{p+1}r)}{(1-xr)(1-x^{m+p+1}r)}\cdot\frac{(1-x^{m+2}r)(1-x^{p+2}r)}{(1-x^2r)(1-x^{m+p+2}r)}\cdot\ldots$$
$$=\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1})\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}$$

Die Formel (7.) gilt für ein ganzes positives $p$, aber für ein beliebiges $m$. Die dort gegebene Reihe

$$1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}r^2x^2+\text{etc.}$$

behält aber ihre Bedeutung, wenn man für beide Potenzen $x^m$ und $x^p$ beliebige Gröfsen setzt, während das Product eine Bedeutung zu haben aufhört, wenn nicht wenigstens eine der Gröfsen $m$ und $p$ eine ganze positive Zahl ist. Ersetzt man aber das Product durch seine Interpolationsformel (14.), so bleibt die Gleichung (7.) für ein beliebiges $m$ und $p$ bestehen. Setzt man nämlich wieder

$$x^m = s, \quad x^p = t,$$

so ist zufolge des bereits Gefundenen die Formel

15.
$$1+\frac{(1-s)(1-t)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-s)(x-s)(1-t)(x-t)}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}r^2$$
$$+\frac{(1-s)(x-s)(x^2-s)(1-t)(x-t)(x^2-t)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-r)(1-xr)(1-x^2r)}r^3 \text{ etc.}$$
$$=\frac{(1-sr)(1-tr)}{(1-r)(1-str)}\cdot\frac{(1-xsr)(1-xtr)}{(1-xr)(1-xstr)}\cdot\frac{(1-x^2sr)(1-x^2tr)}{(1-x^2r)(1-x^2str)}\cdot\ldots$$

immer gültig, wenn wenigstens die eine der beiden Gröfsen $s$ oder $t$ eine ganze positive Potenz von $x$ ist. Es sei der erste Factor des unendlichen Productes, in eine Reihe nach den aufsteigenden Potenzen von $r$ entwickelt,

$$\frac{(1-sr)(1-tr)}{(1-r)(1-str)} = 1+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\text{etc.},$$

so wird das unendliche Product die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}&(1+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\text{etc.})\\ &\times(1+c_1xr+c_2x^2r^2+c_3x^3r^3+\text{etc.})\\ &\times(1+c_1x^2r+c_2x^4r^2+c_3x^6r^3+\text{etc.})\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\times(1+c_1x^nr+c_2x^{2n}r^2+c_3x^{3n}r^3+\text{etc.})\end{aligned}$$

nähert, wenn man $n$ in's Unendliche wachsen läfst. Bezeichnet man diese Gränze mit

$$1+C_1r+C_2r^2+C_3r^3+\text{etc.},$$

so ist $C_i$ eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen $c_1, c_2, \ldots c_i$, also auch eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen $s$ und $t$. Ist die unendliche Reihe links vom Gleichheitszeichen in der Formel (15.), nach den aufsteigenden Potenzen von $r$ entwickelt,

$$1+K_1r+K_2r^2+K_3r^3+\text{etc.},$$

so wird $K_i$ ebenfalls eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen $s$

und $t$, und es gilt die Gleichung

$$C_i = K_i$$

für ein beliebiges $s$ und für unendliche viele Werthe von $t$, nämlich wenn man für $t$ beliebige ganze positive Potenzen von $x$ setzt. Aber dies ist nur möglich, wenn die Gleichung $C_i = K_i$ identisch ist, also auch für jeden Werth von $t$ gilt, in welchem Falle auch die Gleichung (15.) für jeden Werth von $t$ gilt. Es ist hiebei nur erforderlich, dafs die Gröfsen $x$, $r$ und $str$ kleiner als 1 sind, weil nur unter dieser Bedingung die nach den aufsteigenden Potenzen von $r$ angestellten Entwicklungen convergent sind.

Man erhält ganz auf dieselbe Weise aus der Formel (8.) für den inversen Werth des Ausdrucks (7.) die Formel

16. $$1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-sr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(x-t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-sr)(1-xsr)}$$
$$- \frac{(1-s)(1-xs)(1-x^2s)(1-t)(x-t)(x^2-t)r^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-sr)(1-xsr)(1-x^2sr)} + \text{etc.}$$
$$= \frac{(1-r)(1-str)}{(1-sr)(1-tr)} \cdot \frac{(1-xr)(1-xstr)}{(1-xsr)(1-xtr)} \cdot \frac{(1-x^2r)(1-x^2str)}{(1-x^2sr)(1-x^2tr)} \cdot \ldots,$$

in welcher nur vorausgesetzt wird, dafs $x$, $sr$ und $tr$ kleiner als 1 sind. Da das unendliche Product in Bezug auf $s$ und $t$ symmetrisch ist, und auch die Gränzbedingungen für $s$ und $t$ dieselben sind, so mufs es auch in der Reihe links vom Gleichheitszeichen verstattet sein, $s$ und $t$ zu vertauschen, wodurch man die oben besonders bewiesene Formel (12.) erhält.

In dem besondern Fall, wenn sich alle vier Gröfsen $x$, $r$, $s$, $t$ gleichzeitig ihrer gemeinschaftlichen Gränze 1 unendlich nähern, gehen die Reihen (15.) und (16.) in die Form

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \text{etc.}$$

über. Dieser Gränzfall ist schwieriger zu behandeln als der allgemeine, in welchem $x$ um eine beliebige endliche Gröfse kleiner als 1 ist, und es sind die Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ noch, wie man weifs, gewissen besondern Bedingungen zu unterwerfen, damit die Reihe convergire.

Die hier gegebne Interpolationsformel (13.) ist der *Euler*schen Interpolationsformel des Productes $1.2.3.\ldots.n$ analog, aber sie ist einfacher und, wenn man will, elementarer als diese. Die *Euler*sche Interpolationsformel, und zwar in ihrer noch heut gebräuchlichen Form, gehört zu seinen ersten bekannt gewordnen Arbeiten. In der von Herrn Staatsrath *von Fufs* herausgegebnen Correspondenz findet sich nämlich in dem ersten Briefe *Eulers* an *Goldbach* vom

13. October *1729* das Product $1.2.3.... m$ bereits durch das unendliche Product

$$\frac{1.2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}.3}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}.4}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}.5}{4+m}\text{ etc.}$$

ersetzt. *Euler* hat in dem 3ten Theil seiner Differentialrechnung im 16ten Capitel *„Von der Differentiation der inexplicabeln Functionen"* §. 382 die allgemeine Regel gegeben, dafs das Product $A.B.C....X$, wo $X$ der $x^{te}$ Factor, $X'$, $X''$ etc. die auf $X$ folgenden sind, durch das unendliche Product

$$\frac{A}{X'}\cdot\frac{B}{X''}\cdot\frac{C}{X'''}\cdot\frac{D}{X^{IV}}\cdot...$$

interpolirt wird, wenn $\log X$ für ein unendliches $x$ verschwindet; dagegen durch das unendliche Product

$$\frac{A^x}{X'}\cdot\frac{B^x A^{1-x}}{X''}\cdot\frac{C^x A^{1-x}}{X'''}\cdot...,$$

wenn erst die ersten Differenzen der Reihe $\log X$, $\log X'$ etc. für ein unendliches $x$ verschwinden. Im folgenden Capitel *„Von der Interpolation der Reihen"* §. 399 giebt er noch für den Fall, wo erst die zweiten Differenzen der Reihe $\log X$, $X'$, $X''$ etc. für ein unendliches $x$ verschwinden, die Interpolationsformel

$$A\cdot B\cdot C....X$$
$$= A^{x(2-x)}B^{\frac{1}{2}x(x-1)}.\frac{A^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}B^{x(2-x)}C^{\frac{1}{2}x(x-1)}}{X'}\cdot\frac{B^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}C^{x(2-x)}D^{\frac{1}{2}x(x-1)}}{X''}....$$

Der hier betrachtete Fall gehört zu der einfachsten Classe, weil der Factor $\log(1-rx^n)$ selbst schon für ein unendliches $n$ verschwindet, während der Gränzfall, wo $r$ und $x$ sich der Einheit unendlich nähern, zu dem nächst folgenden schwierigern gehört, wo erst die ersten Differenzen der Logarithmen der unendlich entfernten Factoren verschwinden.

Ich erwähne gelegentlich, dafs *Euler* in dem nächst folgenden Briefe vom 8ten Januar 1730 die Darstellung der Interpolationsformel von $1.2.3....n$ durch das bestimmte Integral $\int dx(-lx)^n$, giebt und die Formel,

$$\sqrt[q]{(1\cdot2\cdot3....q)}\left[\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)....\left(\frac{qp}{q}+1\right)\right]\cdot$$
$$\left[\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{q}}....\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right]$$
$$=\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}},$$

wo die Integrale immer zwischen den Gränzen 0 und 1 zu nehmen sind. Er bemerkt, wie für $p=1$, $q=2$ mittelst dieser Formel der Werth von $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}$ durch die Kreisperipherie erhalten wird.

28. Juni 1846.

# 18.

## Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen.

---

Ich werde das System Differentialgleichungen

$$1.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots\ldots + \frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \end{cases}$$

in welchem $X_1$, $X_2$, .... $X_n$ dieselben ganzen Functionen $2n^{\text{ten}}$ Grades respective von den Variabeln $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ sind, und $n > 2$ ist, mit dem Namen *eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen* bezeichnen. Man weifs, dafs sie durch rein algebraische Gleichungen vollständig integrirt werden können. Wenn $X_1$ und $X_2$ vom $4^{\text{ten}}$ Grade sind, hat *Euler* gefunden, dafs das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

eine Gleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Gröfsen

$$x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad x_1 x_2$$

ist. Die algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen hat man noch nicht in rationaler Form dargestellt, dürfte auch dazu von den bekannten Formeln aus durch Anwendung der gewöhnlichen Regeln zur Fortschaffung der Wurzelgröfsen nur mit Mühe gelangen, insbesondere wenn man eine solche rationale Form der Gleichungen zu er-

langen wünscht, welche die Gewifsheit gewährt, dafs sie durch keine Combination derselben vereinfacht werden kann. Ich habe daher eine neue Integrationsmethode ersonnen, welche direct zu den rationalen algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen und zwar in ihrer einfachsten Form führt. Das von *Euler* gefundne Resultat wird hiedurch verallgemeinert. Ich finde nämlich, dafs das System von $n-1$ *rationalen* Gleichungen, durch welche das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen vollständig integrirt wird,

> aus *einer* Gleichung *zweiten* Grades zwischen der Summe der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots . x_n$ und der Summe ihrer Amben und aus $n-2$ andern Gleichungen besteht, mittelst welcher durch diese beiden Gröfsen die Summe der Ternen, Quaternen etc. und das Product der Variabeln *lineär* ausgedrückt werden.

Ist $X$ die Function unter dem Wurzelzeichen, wenn man $x$ die Variable nennt, so mufs zur Bildung dieser Gleichungen die Function $X$ durch die Form $S^2-RT$ dargestellt werden, wo $R, S, T$ ganze Functionen von $x$ vom $n^{ten}$ Grade sind. Die hiebei willkürlich anzunehmenden constanten Gröfsen geben, wie bei *Euler*, die willkürlichen Constanten, mit denen die rationalen Integralgleichungen behaftet sind.

Ich betrachte die Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T=0,$$

wo $R, S, T$ ganze Functionen von $x$ vom $n^{ten}$ Grade sind. Dieselbe Gleichung nach $x$ geordnet sei

$$2. \quad Yx^n-Y_1x^{n-1}+Y_2x^{n-2}\ldots.\pm Y_n = Ry^2+2Sy+T=0,$$

wo $Y, Y_1, \ldots . Y_n$ ganze Functionen von $y$ vom $2^{ten}$ Grade sind. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Y_1x^{n-2}\ldots.\mp Y_{n-1}}=0.$$

Nennt man

$$x_1, x_2, \ldots . x_n$$

die $n$ Werthe, welche $x$ für ein gegebnes $y$ annimmt, und $R_i, S_i, T_i$ die durch Substitution von $x=x_i$ aus $R, S, T$ erhaltnen Ausdrücke, so kann man dieser Differentialgleichung die Form

$$\frac{dx_i}{\sqrt{(S_i^2-R_iT_i)}}+\frac{2dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots.(x_i-x_n)}=0$$

geben, wo im Nenner des zweiten Gliedes der verschwindende Factor $x_i - x_i$ auszulassen ist. Ist $P_i$ eine rationale Function von $x_i$, und dehnt man die Summen auf die $n$ Werthe von $i$ aus, so erhält man hieraus

$$\Sigma \frac{P_i dx_i}{\sqrt{(S_i^3 - R_i T_i)}} + Q dy = 0,$$

wo die Gröfse

$$Q = \frac{2}{Y} \Sigma \frac{P_i}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_n)}$$

mittelst der Gleichung (2.) eine rationale Function von $y$ wird. Ist insbesondre $P_i$ eine ganze Potenz von $x_i$, deren Exponent kleiner als $n-1$ ist, so verschwindet $Q$. Man erhält in diesem Fall das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.), wenn man auf irgend eine Weise drei ganze Functionen $R$, $S$, $T$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade so bestimmt, dafs

$$SS - RT = X$$

wird.

Setzt man

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = x^n - u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} \ldots \pm u_n,$$

wo $u_1$ die Summe der Gröfsen $x_1$, $x_2$, $\ldots$ $x_n$, und $u_2$, $u_3$ etc. die Summe ihrer Amben, Ternen u. s. w. bedeutet, so erhält man aus der Gleichung (2.),

$$3. \quad u_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad u_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \ldots \quad u_n = \frac{Y_n}{Y}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von $y$ eine Gleichung *zweiter* Ordnung zwischen $u_1$ und $u_2$. Denn die sechs Gröfsen

$$Y^2, \quad Y^2 u_1, \quad Y^2 u_2, \quad Y^2 u_1^2, \quad Y^2 u_1 u_2, \quad Y^2 u_2^2$$

werden ganzen Functionen von $y$ vom $4^{\text{ten}}$ Grade gleich, welche aus 5 Termen bestehen, und man kann daher, wenn man diese sechs Gleichungen mit constanten Factoren $\alpha$, $\beta$ etc. multiplicirt und addirt, eine Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta u_1 + \gamma u_2 + \delta u_1^2 + \varepsilon u_1 u_2 + \zeta u_2^2 = 0$$

erhalten. Man kann ferner, wenn $Y_m$ eine der Functionen $Y_3$, $Y_4$, $\ldots$ $Y_n$ ist, $Y$ als einen lineären homogenen Ausdruck von $Y_1$, $Y_2$, $Y_m$ darstellen,

$$Y = \varkappa_m Y_1 + \lambda_m Y_2 + \mu_m Y_m,$$

wo $\varkappa_m$, $\lambda_m$, $\mu_m$ Constanten sind, wodurch man zwischen je drei Gröfsen $u_1$, $u_2$, $u_m$ eine Gleichung von der Form

$$\varkappa_m u_1 + \lambda_m u_2 + \mu_m u_m = 1$$

erhält. Es findet daher zwischen den Gröfsen $u_1$, $u_2$, $\ldots$ $u_n$ eine Anzahl von

$n-1$ Gleichungen Statt, von denen eine von der zweiten Ordnung ist und die andern lineär sind. Man sieht zu gleicher Zeit, dafs es unmöglich ist, diese Gleichungen, insofern man sie als Gleichungen zwischen den in den vorgelegten Differentialgleichungen (1.) enthaltnen Variabeln betrachtet, in eine einfachere Form zu bringen.

In den Ausdrücken von $R$, $S$, $T$ kann man einen Coëfficient $=1$ setzen; aufserdem aber kann man immer noch drei Coëfficienten beliebig annehmen, ohne dafs hiedurch die Allgemeinheit der Integralgleichungen beschränkt wird. Setzt man nämlich $\frac{my+n}{py+q}$ statt $y$, wo $m, n, p, q$ beliebige Constanten sind, welche die Gleichung $mq-np=1$ erfüllen, so verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$R'y^2+2S'y+T'=0,$$

wo

$$R'=m^2R+2mpS+p^2T, \qquad T'=n^2R+2nqS+q^2T,$$
$$S'=mnR+(mq+np)S+pqT, \qquad S'S'-R'T'=SS-RT.$$

Man kann daher die Constanten $m, n, p, q$ z. B. so bestimmen, dafs in $S$ zwei Coëfficienten $=0$ werden, und ein dritter einen gegebnen Werth erhält. Hierdurch reducirt sich die Zahl der in den Integralgleichungen enthaltnen Constanten auf

$$3(n+1)-4=3n-1.$$

Die Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten ist aber nur $2n$, weil dies die Anzahl der Coëfficienten von $X$ ist, wenn man einen derselben $=1$ setzt. Da sich aus den angegebnen $n-1$ Gleichungen zwischen den Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_n$ durch Einführung der Gröfse $y$ die Gleichungen (3.), und aus diesen durch die obigen Betrachtungen die Differentialgleichungen (1.) ergeben, welche $n-1$ Constanten weniger als die zwischen den Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_n$ aufgestellten Gleichungen enthalten, so sind die letztern die vollständigen Integralgleichungen des aufgestellten Systems Differentialgleichungen (1.).

Um die gegebne Function $X$ durch die Form $S^2-RT$ darzustellen, könnte man alle Coëfficienten in $S$ willkürlich annehmen, und hätte dann nur $S^2-X$ in zwei Factoren $R$ und $T$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade zu zerfällen. Dies erfordert aber die Auflösung höherer Gleichungen. Man wird mit Ausziehung von Quadratwurzeln ausreichen, wenn man folgendermafsen verfährt.

Man bestimme, etwa durch die sogenannte *Lagrange*sche Interpolationsformel, eine ganze Function $S$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche für $n$ willkürlich angenommne Werthe von $x$,

$$a_1, a_2, \ldots a_n,$$

dieselben Werthe annimmt, wie die irrationale Function $\sqrt{X}$. Nennt man diese Function $S$, so verschwindet $SS-X$ für diese $n$ Werthe von $x$ und mufs also durch

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)$$

theilbar sein, wo $f$ ein constanter Factor ist. Nennt man den Quotient $R$, so sind $R$, $S$, $T$ die verlangten Functionen.

Man könnte $S$ auch vom $n^{\text{ten}}$ Grade annehmen, und noch die Bedingung hinzufügen, dafs es für einen neuen Werth $x=a$ einen bestimmten Werth erhalten soll. Nimmt man für letztern wieder den Werth von $\sqrt{X}$ für $x=a$, so würde man noch von $R$ einen lineären Factor, nämlich $x-a$, kennen.

Für $y=0$ reduciren sich die Werthe von $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ auf $a_1$, $a_2$, .... $a_n$. Man erhält also, wenn man die Functionen $R$, $S$, $T$ auf die angegebne Art bestimmt hat, die $n-1$ transcendenten Gleichungen,

$$\int_{a_1}^{x_1}\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\int_{a_2}^{x_2}\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{X_2}}\ldots.+\int_{a_n}^{x_n}\frac{x_n^m\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

wo $m$ jeden der Werthe 0, 1, 2, .... $n-2$ annehmen kann.

Die Zeichen sämmtlicher Wurzelgröfsen $\sqrt{X_i}$ werden durch den Werth der einen Gröfse $y$ mittelst der Gleichung

$$R_iy+S_i=\sqrt{X_i}$$

bestimmt. Man hat daher für zwei der Variabeln $x_i$ und $x_k$,

$$\frac{-S_i+\sqrt{X_i}}{R_i}=\frac{-S_k+\sqrt{X_k}}{R_k},$$

durch welche Gleichung die Wurzelgröfsen von einander abhängen. Wenn $y$ von 0 an sich continuirlich ändert, so werden auch die Gröfsen $\sqrt{X_i}$ respective von $\sqrt{A_i}$ an sich continuirlich ändern, wenn man $A_i$ den Werth von $X$ für $x=a_i$ nennt. Das Zeichen jeder Wurzelgröfse $\sqrt{X_i}$ wird daher auch aus dem Zeichen von $\sqrt{A_i}$ durch die Bedingung der Continuität bestimmt.

Man setze jetzt $U^2X$ für $X$, wo $U$ eine ganze Function von $x$ von der $p^{\text{ten}}$ Ordnung bedeutet. Es seien ferner $R$, $S$, $T$ ganze Functionen von $x$ von der $(n+p)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Gleichung

$$S^2-RT=U^2X$$

erfüllen, und $x_1$, $x_2$, .... $x_{n+p}$ die Wurzeln der Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T=0,$$

die einem Werthe von $y$ entsprechen. Man erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{dx_i}{U_i\sqrt{X_i}}+\frac{2\,dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots.(x_i-x_{n+p})}=0,$$

wo $Y$ der Coëfficient von $x^{n+p}$ in der zwischen $x$ und $y$ aufgestellten Gleichung und $U_i$ der Werth von $U$ für $x = x_i$ ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $x_i^m U_i$, wo $m$ wieder die Werthe 0, 1, 2, .... $n-2$ annehmen kann, und summirt für alle $n+p$ Werthe von $i$, so erhält man, indem man dem $m$ seine $n-1$ Werthe giebt, folgendes System von $n-1$ Differentialgleichungen zwischen den $n+p$ Variabeln $x_1$, $x_2$, .. $x_{n+p}$,

$$3.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \frac{dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \frac{x_{n+p}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \frac{x_{n+p}^{n-2}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^{n+p} - Y_1 x^{n+p-1} + Y_2 x^{n+p-2} \ldots \pm Y_{n+p},$$

und nennt $u_1$, $u_2$, $u_3$ etc. die Summe der $n+p$ Variabeln $x_1$, $x_2$, .. $x_{n+p}$, die Summe ihrer Amben, Ternen etc., so erhält man

$$u_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad u_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \ldots \quad u_{n+p} = \frac{Y_{n+p}}{Y},$$

und hieraus ergeben sich durch Elimination von $y$ die algebraischen Integralgleichungen des Systems der Gleichungen (3.), nämlich *eine* Gleichung zweiter Ordnung zwischen $u_1$ und $u_2$ und andre $n+p-2$ Gleichungen, welche $u_3$, $u_4$, .. $u_{n+p}$ durch $u_1$ und $u_2$ lineär bestimmen. Setzt man

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+p}),$$

wo $f$ eine Constante ist und man, ohne die Allgemeinheit der Integralgleichungen zu beeinträchtigen, für $p+1$ der Gröfsen $a_1$, $a_2$, .. $a_{n+p}$ bestimmte Werthe annehmen kann, so wird $S$ eine ganze Function $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, die, wenn man für $x$ die $n+p$ Werthe $a_1$, $a_2$, .. $a_{n+p}$ setzt, dieselben Werthe wie die Function $U\sqrt{X}$ hat. Es wird dann $S^2 - U^2X$ durch $T$ theilbar und der Quotient wird die Function $R$. Die mit den algebraischen Integralgleichungen identischen transcendenten werden

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \int_{a_{n+p}}^{x_{n+p}} \frac{x_{n+p}^m\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0,$$

so dafs man auch auf diesem neuen Wege die Addition auf eine beliebige Zahl Variabeln ausdehnen kann.

Wenn man wieder die Zahl der Variabeln auf $n$ beschränkt, und zwischen $u_1$ und $u_2$ eine beliebige Gleichung zweiten Grades annimmt, so enthält diese 5 Constanten; wenn man ferner $u_3$, $u_4$, .. $u_n$ auf beliebige Art lineär durch $u_1$ und $u_2$ ausdrückt, so enthält jede Gleichung, durch welche dieses geschieht, *zwei* Constanten. Die Zahl aller in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten ist daher $5+3(n-2)=3n-1$ oder gleich der Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten (der Coëfficienten von $X$, wenn man einen derselben $=1$ setzt) plus der Zahl der willkürlichen Constanten, welche die vollständigen Integralgleichungen enthalten müssen. Da man nun gezeigt hat, dafs letztere immer in die angegebne Form gebracht werden können, so folgt umgekehrt, dafs jedes System algebraischer Gleichungen von der angegebnen Form immer das System vollständiger Integralgleichungen von einem System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.) ist, wenn man die Coëfficienten der Function $X$ unter dem Wurzelzeichen durch die Constanten der algebraischen Gleichungen gehörig bestimmt. Wenn man aber die angegebne Form der rationalen algebraischen Integralgleichungen für $n+p$ Variable anwenden will, so können hier nicht mehr alle Constanten der Gleichungen beliebig angenommen werden.

Man kann das gefundne Theorem auch folgendermafsen darstellen:

*Setzt man*

$$\begin{aligned} f(x) = & (bx^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} \ldots\ldots + b_n)^2 \\ & + (cx^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} \ldots\ldots + c_n)^2 \\ & - (ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots\ldots + a_n)^2, \end{aligned}$$

*so werden die Differentialgleichungen*

$$\frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots\ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0,$$

$$\frac{x_1dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots\ldots + \frac{x_ndx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0,$$

$$\frac{x_1^2dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^2dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots\ldots + \frac{x_n^2dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots\ldots + \frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0$$

*vollständig integrirt, wenn man für* $x_1$, $x_2$, .... $x_n$ *die Wurzeln der Gleichung*

$$\begin{aligned} & ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots . + a_n \\ = & (bx^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} \ldots . + b_n)\cos\varphi \\ & + (cx^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} \ldots . + c_n)\sin\varphi \end{aligned}$$

*setzt, wo* $\varphi$ *einen veränderlichen Winkel bedeutet.*

Den 14. Juli 1846.

# 19.

# Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. Jacobi.

## I.

Paris, Janvier 1843.

L'étude de votre mémoire publié dans le journal de M. *Crelle* sous le titre: „De functionibus quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur," m'a conduit pour la division des arguments dans ces fonctions, à un théorème analogue à celui que vous avez donnez dans le 3e volume du même journal, pour obtenir l'expression la plus simple des racines des équations traitées par *Abel*. M. *Liouville* m'a engagé à vous écrire pour vous soumettre ce travail; oserais-je espérer Monsieur que vous daignerez l'accueillir avec toute l'indulgence dont il a besoin?

Soit:

$$\Delta(x) = \sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]};$$

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\partial y}{\Delta(y)}, \quad u' = \int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\partial y}{\Delta(y)},$$

$$x = \lambda_0(u, u'), \quad y = \lambda_1(u, u').$$

Faisons pour abréger:

$$x_n = \lambda_0(nu, nu'), \quad y_n = \lambda_1(nu, nu'),$$

ces deux quantités seront déterminées simultanément par les deux racines d'une équation du second degré,

$$Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0,$$

dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de $x$, $y$, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$; j'ai trouvé qu'ils étaient de la forme $P + Q\Delta(x)\Delta(y)$, où $P$ et $Q$ sont des fonctions rationnelles de $x$ et $y$; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui suit.

Je partirai de ce que les racines simultanées des deux équations

$$(A.) \quad Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0, \quad Uy_n^2 + U'y_n + U'' = 0$$

sont données par les formules

$$x=\lambda_0\Big(u+\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ u'+\frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\Big),$$

$$y=\lambda_1\Big(u+\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ u'+\frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\Big),$$

en attribuant aux nombres entiers $m$, $m'$, $m''$, $m'''$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots. n-1$.

Cela posé, soit pour abréger

$$I=mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4,\quad I'=mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4,$$

et désignons par $f(x, y)$ une fonction rationnelle symétrique de $x$ et $y$, et par $p$, $q$, $r$, $s$ quatre racines de l'équation binome $x^n=1$, je dis qu'on aura:

$$(B.)\quad \sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1}\Big\{f\Big(\lambda_0\Big(u+\frac{I}{n},u'+\frac{I'}{n}\Big),\lambda_1\Big(u+\frac{I}{n},u'+\frac{I'}{n}\Big)\Big)\Big\}p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}$$

$$=\sqrt[n]{[A+B\Delta(\lambda_0(nu,nu'))+C\Delta(\lambda_1(nu,nu'))+D\Delta(\lambda_0(nu,nu'))\Delta(\lambda_1(nu,nu'))]},$$

$A$, $B$, $C$, $D$ désignant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$.

Le premier membre peut d'abord se ramener à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$. En effet, d'après la propriété fondamentale des fonctions $\lambda_0$, $\lambda_1$, un terme quelconque, tel que $f\Big(\lambda_0\Big(u+\frac{I}{n},u'+\frac{I'}{n}\Big),\lambda_1\Big(u+\frac{I}{n},u'+\frac{I'}{n}\Big)\Big)$ pourra être exprimé rationnellement en $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$, $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$, et les quantités analogues relatives à la division des indices. Or on trouve aisément ces formules:

$$\Delta(x)=(\alpha+\beta x)\frac{dx}{du}+(\alpha'+\beta' x)\frac{dx}{du'},\qquad \Delta(y)=(\alpha+\beta y)\frac{dy}{du}+(\alpha'+\beta' y)\frac{dy}{du'}$$

qui montrent que les radicaux carrés $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$ pourront s'exprimer rationnellement en $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$; car en faisant disparaître les irrationnelles des équations $(A.)$, puis les différentiant successivement par rapport à $u$ et $u'$, on obtiendra les expressions des dérivées partielles en fonction rationnelle de $\lambda_0(u,u')$ et $\lambda_1(u,u')$.

Représentons le premier membre de l'équation $(B.)$ par $\varphi(u,u')$, on démontrera bien aisément que:

$$\varphi\Big(u+\frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n},\ u'+\frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n}\Big)$$

$$=p^{-k}q^{-k'}r^{-k''}s^{-k'''}\varphi(u,u'),$$

quels que soient les entiers $k$, $k'$, $k''$, $k'''$.

En l'élevant à la puissance $n^e$, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$, qui ne change point, en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il suit

de là et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations (*A.*).

J'observe actuellement qu'il a été introduit les quantités $\frac{d\lambda_0(nu,nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_0(nu,nu')}{du'}$, $\frac{d\lambda_1(nu,nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_1(nu,nu')}{du'}$ qu'on pourra éliminer par les formules suivantes:

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{dx}{du}=\frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha'+\beta'y),\qquad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{dx}{du'}=\frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha+\beta y),$$

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{dy}{du}=\frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha'+\beta'x),\qquad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{dy}{du'}=\frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha+\beta x).$$

Or, une fonction rationnelle quelconque des deux radicaux $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$ peut toujours être mise sous la forme

$$a+b\Delta(\lambda_0(u,u'))+c\Delta(\lambda_1(u,u'))+d\Delta(\lambda_0(u,u'))\,\Delta(\lambda_1(u,u')),$$

ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

En supposant successivement: $f(x,y)=x+y$, et $f(x,y)=xy$, on aura séparément par une somme de $n^4-1$ radicaux $n^{es}$ les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront finalement celles des équations proposées. On pourrait aussi faire voir qu'il suffit de connaître l'un d'eux, l'autre se déterminant rationnellement par celui-là.

Pour obtenir la division des indices, soit

$$u=\frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n}=\frac{I}{n},\quad u'=\frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n}=\frac{I'}{n},$$

on aura: $x_n=0$, $y_n=0$, et les équations à résoudre seront

$$(C.)\qquad U'=0,\quad U''=0;$$

leurs racines seront comprises dans les formules

$$x=\lambda_0\Big(\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n}\Big),$$

$$y=\lambda_1\Big(\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\Big),$$

en attribuant aux nombres entiers $m$, $m'$, $m''$, $m'''$ les valeurs 0, 1, 2, .... $n-1$. Mais si l'on suppose le nombre $n$ premier, on verra aisément qu'en supposant successivement:

$$(D.)\quad I_1=i\sqrt{-1},\quad I'_1=i'_1\sqrt{-1};\quad I_2=\mu i_1\sqrt{-1}+i_2,\quad I'_2=\mu i'_1\sqrt{-1}+i'_2;$$
$$I_3=\mu i_1\sqrt{-1}+\mu' i_2+i_3\sqrt{-1},\qquad I'_3=\mu i'_1\sqrt{-1}+\mu' i'_2+i'_3\sqrt{-1};$$
$$I_4=\mu i_1\sqrt{-1}+\mu' i_2+\mu'' i_3\sqrt{-1}+i_4,\quad I'_4=\mu i'_1\sqrt{-1}+\mu' i'_2+\mu'' i'_3\sqrt{-1}+i'_4;$$

on pourra leur substituer les suivantes:

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right),$$
$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right),$$

en excluant la solution zéro, et donnant à $m$, $\mu$, $\mu'$, $\mu''$, les valeurs 0, 1, 2, .... $n-1$.

Mais comme les intégrales qui entrent dans les expressions de $u$ et $u'$ ont été prises à la limite inférieure zéro, on a $\lambda_0(-u, -u') = \lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(-u, -u') = \lambda_1(u, u')$, d'où il arrive que les $n^4 - 1$ solutions des équations (*C.*) sont égales deux à deux; et il suffira de prendre dans les formules précédentes, $m = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$.

Soit toujours $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de $x$ et $y$, on établira d'abord, qu'en désignant par $I$ l'une des quantités $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, par $I'$ la quantité correspondante au second argument, l'expression

$$f\left(\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right)$$

peut se ramener quel que soit le nombre entier $k$, à une fonction rationnelle de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$. Cela résulte de ce que les radicaux $\Delta\left(\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right)$, $\Delta\left(\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right)$ s'expriment eux-mêmes rationnellement en $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, comme il est facile de le voir d'après ce qui a été dit plus haut.

Cela posé, l'expression

$$\sum_0^{k(n-1)}{}_k \left\{f\left(\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right)\right\}^l,$$

où $l$ est un entier quelconque, pourra être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qu'on démontrera aisément jouir de la propriété que:

$$\varphi\left(\nu\frac{I}{n}, \nu\frac{I'}{n}\right) = \varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right),$$

quel que soit le nombre entier $\nu$.

Donc, donnant successivement à $I$ et $I'$ toutes les valeurs correspondantes comprises dans les formules $(D.)$, on pourra construire une équation entièrement rationnelle, qui aura pour racines les valeurs qui en résulteront pour la fonction $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$.

Il est bien facile de voir que son degré sera le nombre

$$1+n+n^2+n^3 = \frac{n^4-1}{n-1}:$$

ainsi, l'équation de degré $\frac{1}{2}(n^4-1)$ de laquelle dépend la détermination d'une fonction rationnelle symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, peut être décomposée en $\frac{n^4-1}{n-1}$ facteurs du degré $\frac{1}{2}(n-1)$, au moyen des racines d'une équation rationnelle du degré $\frac{n^4-1}{n-1}$.

Les équations de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ sont résolubles par radicaux. Pour le faire voir en peu de mots, soit $\rho$ une racine primitive par rapport au nombre premier $n$, on établira d'abord que leurs racines peuvent être représentées par la formule

$$f\left(\lambda_0\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right)\right),$$

en supposant $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-3)$; et si l'on considère la puissance de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ de l'expression

$$\sum_0^{\frac{1}{2}(n-3)}{}_k f\left(\lambda_0\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(\rho^k\frac{I}{n}, \rho^k\frac{I'}{n}\right)\right)\theta^k,$$

où $\theta$ est une racine de $\theta^{\frac{1}{2}(n-1)}-1=0$, on verra qu'elle peut être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$ que je représenterai, pour abréger, par $\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qui jouira, comme la fonction $\varphi$, de la propriété que:

$$\psi\left(\frac{\nu I}{n}, \frac{\nu I'}{n}\right) = \psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right).$$

Dès lors on démontre aisément qu'on peut trouver une fonction rationnelle $F(x)$ telle, que pour toutes les valeurs de $I$ et $I'$ comprises dans les formules $(D.)$, on ait:

$$\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right) = F\left(\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right).$$

Or, connaissant la fonction $\psi$, on sait comment en déduire toutes les racines de l'équation proposée.

Les considérations précédentes semblent pouvoir s'appliquer également aux autres classes des transcendantes nommées généralement par ***Legendre*** fonctions ultra-elliptiques; il est facile en effet de trouver les formules suivantes. Soit

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \sqrt{(x(1-x)(1-\lambda_1^2 x)\ldots(1-\lambda_{2n+1}^2 x))},\\ \theta_k(x) &= \alpha_k+\beta_k x+\gamma_k x^2+\ldots+\eta_k x^n,\\ \Phi_k(x) &= \int_0^x \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)};\end{aligned}$$

posons:

$$\begin{aligned}u_0 &= \Phi_0(x_0)+\Phi_0(x_1)+\ldots+\Phi_0(x_n),\\ u_1 &= \Phi_1(x_0)+\Phi_1(x_1)+\ldots+\Phi_1(x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_n &= \Phi_n(x_0)+\Phi_n(x_1)+\ldots+\Phi_n(x_n),\end{aligned}$$

et soit:

$x_0=\lambda_0(u_0,u_1,\ldots u_n)$, $x_1=\lambda_1(u_0,u_1,\ldots u_n)$, $\ldots$ $x_n=\lambda_n(u_0,u_1,\ldots u_n)$,

on aura:

$$\begin{aligned}\Delta(x_0) &= \theta_0(x_0)\frac{dx_0}{du_0}+\theta_1(x_0)\frac{dx_0}{du_1}+\theta_2(x_0)\frac{dx_0}{du_2}+\ldots+\theta_n(x_0)\frac{dx_0}{du_n},\\ \Delta(x_1) &= \theta_0(x_1)\frac{dx_1}{du_0}+\theta_1(x_1)\frac{dx_1}{du_1}+\theta_2(x_1)\frac{dx_1}{du_2}+\ldots+\theta_n(x_1)\frac{dx_1}{du_n},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta(x_n) &= \theta_0(x_n)\frac{dx_n}{du_0}+\theta_1(x_n)\frac{dx_n}{du_1}+\theta_2(x_n)\frac{dx_n}{du_2}+\ldots+\theta_n(x_n)\frac{dx_n}{du_n}.\end{aligned}$$

Les fonctions $\theta$ étant du degré $n$, on trouve aussi que les racines de l'équation du $n^e$ degré

$$0 = \theta_0(x)\frac{dx_k}{du_0}+\theta_1(x)\frac{dx_k}{du_1}+\theta_2(x)\frac{dx_k}{du_2}+\cdots+\theta_n(x)\frac{dx_k}{du_n}$$

sont les $n$ fonctions, $x_0$, $x_1$, $x_2$, $\ldots$ $x_{k-1}$, $x_{k+1}\ldots x_n$.

En cherchant à déterminer directement le degré des équations relatives à la division des arguments dans les fonctions $\lambda$, j'ai été conduit à cette remarque, que l'équation algébrique correspondante à l'équation transcendante

$$\Phi(\alpha_0)+\Phi(\alpha_1)+\Phi(\alpha_2)+\ldots+\Phi(\alpha_n) = \mu\Phi(x)$$

a ses coefficients rationnels en $x$, quel que soit le nombre entier $\mu$; mais voici quelque chose de plus étendu.

Considérez la transcendante $\int_0^x \frac{\theta(x)\partial x}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}}$, où $F(x)$ est un polynome entier du degré $m$, $\theta(x)$ un autre polynome d'un degré $< m\cdot\frac{k}{n}-1$. Si l'on suppose

$n$ et $m$ premiers entre eux, et si l'on fait $\nu = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$, on sait que la somme d'un nombre quelconque de pareilles intégrales relatives aux variables $x$, $y$, $z$ etc. est réductible à une somme composée de $\nu$ termes seulement, dont les arguments $\alpha_0$, $\alpha_1$, .... $\alpha_{\nu-1}$ sont déterminées par les racines d'une équation du degré $\nu$, dont les coefficients sont rationnels en $x$, $y$, $z$, ...., $\sqrt[n]{(F(x))}$, $\sqrt[n]{(F(y))}$, $\sqrt[n]{(F(z))}$ etc.

Or, si l'on fait $x = y = z = ....$, l'équation correspondante à l'équation transcendante

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} + \int_0^{\alpha_1} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} + .... + \int_0^{\alpha_{\nu-1}} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} = \mu \int_0^{x} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}}$$

aura tous ses coefficients rationnels en $x$.

---

## II.

Paris, Août 1844.

La bonté avec laquelle vous avez accueilli mes premières recherches sur les fonctions Abéliennes, m'engage à vous écrire une seconde fois, pour vous soumettre quelques nouveaux résultats auxquels j'ai été conduit par l'étude de vos ouvrages, en essayant d'étendre aux transcendantes plus générales, les principales théories des fonctions elliptiques. Mon travail m'a amené naturellement, à rechercher la démonstration de quelques uns des théorèmes que vous avez énoncés dans le journal de M. *Crelle;* c'est aussi, Monsieur, ce dont je vous demanderai la permission de vous entretenir d'abord; je m'occuperai surtout de l'expression de $\sin am(u, x)$ par $\sin am\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, si importante pour la théorie des fonctions elliptiques; mais je ne sais si j'aurai véritablement rencontré les principes qui vous ont couduit à ce beau théorème.

En suivant vos notations, je nommerai $H(x)$, $\Theta(x)$ les deux fonctions qui donnent

$$\sin am(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

et qui satisfont aux conditions:

1. $\Theta(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Theta(x)$, $\quad H(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}H(x)$,
   $\Theta(x+2K) = \Theta(x)$, $\quad H(x+2K) = -H(x)$;

et voici d'abord une remarque sur laquelle je me fonderai principalement.

Soit $\Phi(x)$ une fonction définie par l'équation

$$2. \quad \Phi(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x)$$

et par la condition de périodicité

$$3. \quad \Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

on trouvera qu'en supposant

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

les coefficients se déterminent de la manière suivante:

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu a_0 q^{\mu^2}, \quad a_{2\mu+1} = (-1)^\mu a_1 q^{\mu(\mu+1)},$$

de sorte qu'en employant les fonctions $H$ et $\Theta$, on a

$$\Phi(x) = AH(x) + B\Theta(x).$$

Cela posé, soit $n$ un nombre premier, $p$ un entier compris entre 0 et $n-1$, faisons $\alpha = e^{-p\frac{8i\pi}{n}}$ et considérons la somme

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)} + \alpha\frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)} + \alpha^2\frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)} + \ldots + \alpha^{(n-1)}\frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)};$$

nommons $\Phi(x)$ le numérateur et $\Phi_0(x)$ le dénominateur, savoir:

$$\Phi_0(x) = \Theta(x)\Theta(x)\left(x+\frac{4K}{n}\right)\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)\ldots\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right):$$

on déduit sans peine de la propriété fondamentale des $\Theta$, qui est exprimée par l'égalité (1), la condition

$$\Phi_0(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi_0(x),$$

et il est clair qu'on a

$$\Phi_0\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi_0(x).$$

Or ces deux équations peuvent être ramenées aux équations (2) et (3), de la manière suivante. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie par les deux conditions

$$\varphi(x+2iK_1') = -e^{-\frac{i\pi}{K_1}(x+iK_1')}\varphi(x) \text{ et } \varphi(x+4K_1) = \varphi(x):$$

on aura d'après ce qui a été dit tout-à-l'heure: $\varphi(x) = AH_1(x) + B\Theta_1(x)$, en désignant par $H_1$ et $\Theta_1$ les fonctions $H$ et $\Theta$, dans lesquelles $K$ et $K'$ seraient supposés devenus $K_1$ et $K_1'$; posons ensuite $n\frac{K_1}{K} = \frac{K_1'}{K'}$, et faisons $x = \frac{nK_1}{K}\cdot z$, il viendra, comme on le voit facilement:

$$\varphi\Big(\frac{nK_1}{K}(z+2iK')\Big) = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(z+2iK')}\varphi\Big(\frac{nK_1}{K}z\Big) \text{ et}$$

$$\varphi\Big(\frac{nK_1}{K}\Big(z+\frac{4K}{n}\Big)\Big) = \varphi\Big(\frac{nK_1}{K}z\Big).$$

Or ces équations font voir qu'on aura

$$\Phi_0(x) = \varphi\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big) = AH_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big)+B\Theta_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big),$$

et comme la fonction $\Phi_0$ est paire, il faut faire $A=0$ et il vient:

$$\Phi_0(x) = \text{Const.}\,\Theta_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big).$$

Je passe actuellement au numérateur désigné par $\Phi(x)$. On établit immédiatement, qu'il satisfait encore à l'équation

$$4. \quad \Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+2iK')}\Phi(x),$$

et on peut même observer que chacun des $n$ produits dont la somme le compose, la vérifie isolément. On trouve ensuite en désignant par $j$ un nombre entier:

$$\Phi\Big(x+\frac{4jK}{n}\Big) = \alpha^{-j}\Phi(x).$$

Si donc je pose

$$\Psi(x) = e^{-2p\frac{i\pi x}{K}}\Phi(x),$$

j'aurai:

$$\Psi\Big(x+\frac{4jK}{n}\Big) = \Psi(x).$$

D'ailleurs de l'équation fondamentale (4) on tirera:

$$\Psi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+2iK')+4p\frac{\pi K'}{K}}\Psi(x),$$

et en mettant $x-4p\frac{iK'}{n}$ à la place de $x$, et faisant pour plus de clarté

$$\Psi_1(x) = \Psi\Big(x-\frac{4piK'}{n}\Big),$$

on en déduit:

$$\Psi_1(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Psi_1(x).$$

Ainsi par cette transformation nous sommes entièrement ramenés à l'équation (4). Mais on a la condition de périodicité:

$$\Psi_1\Big(x+\frac{4K}{n}\Big) = \Psi_1(x),$$

donc, en raisonnant comme plus haut, il viendra:

$$\Psi_1(x) = AH_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big)+B\Theta_1\Big(\frac{nK_1}{K}x\Big).$$

Faisons pour la suite $\frac{nK_1}{K} = \frac{1}{M}$, nous aurons le théorème exprimé par l'égalité:

$$\operatorname{sin\,am}(x) + \alpha \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \alpha^2 \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{8K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1} \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$= e^{2p\frac{in x}{K}} \cdot \frac{AH_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right) + B\Theta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

J'observe que le premier membre change de signe en augmentant $x$ de $2K$; le nombre $n$ étant impair, il en est de même de la fonction $H_1\left(\frac{x}{M}\right)$; d'ailleurs $\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)$ ne change pas; ainsi il faut faire $B = 0$, et il vient:

$$\operatorname{sin\,am}(x) + \alpha \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1} \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$= \text{Const.}\, e^{2p\frac{ipx}{K}} \cdot \frac{H_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$$

$$= \text{Const.} \operatorname{sin\,am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right) \cdot \frac{e^{2p\frac{in x}{K}}\Theta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

Je substitue maintenant aux fonctions $\Theta$ à période réelle, les fonctions analogues $\vartheta(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x)$, à la période imaginaire $4iK'$; on trouve:

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right) = e^{n\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right),$$

de sorte qu'à un facteur constant près, l'expression $\frac{e^{2p\frac{in x}{K}}\Theta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$ se transforme en la suivante: $\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$, où l'exponentielle $e^{2p\frac{inx}{K}}$ a disparu; ainsi il vient:

$$\operatorname{sin\,am}(x) + \alpha \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1} \operatorname{sin\,am}\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$= \text{Const.} \operatorname{sin\,am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right) \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

Pour déterminer la constante, je multiplie les deux membres par $x - iK'$, puis je fais $x = iK'$; en nommant $\varkappa$, $\varkappa_1$ les modules des fonctions $K$, $K_1$, le terme $\sin\mathrm{am}(x)$ qu'il y a seul lieu de considérer dans le premier membre, donne $\frac{1}{\varkappa}$; dans le second il suffit d'avoir la valeur de la dérivée de $\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)$, pour $x = iK'$. Or on obtient sans peine pour résultat: $\frac{i\sqrt{\varkappa_1}.\vartheta_1(0)}{M}$: ainsi on a l'égalité

$$\frac{1}{\varkappa} = \text{Const. } \sin\mathrm{am}\left(\frac{iK'}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right).\frac{\vartheta_1\left(\frac{iK'}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\frac{1}{M}.i\sqrt{\varkappa_1}.\vartheta_1(0)},$$

et on en tire après quelques transformations faciles:

$$\text{Const.} = \frac{\varkappa_1}{M\varkappa}.\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_1\left(\frac{4piK'_1}{n}\right)}.$$

Nous voici de la sorte parvenus au théorème exprimé par l'égalité:

$$\frac{M\varkappa}{\varkappa_1}\left(\sin\mathrm{am}(x) + \alpha\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)\right)$$

$$= \sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right).\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)}.$$

Je n'ai plus maintenant, qu'à vous emprunter, Monsieur, la méthode par laquelle vous établissez les propriétés si remarquables de la fonction

$$\chi(u) = e^{ru^2}\Omega(u).$$

En formant le produit

$$\psi(x) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{4iK'_1}{n}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{8iK'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{4(n-1)iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_0(0)\vartheta_1^2\left(\frac{4iK'_1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{8iK'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{2(n-1)iK'_1}{n}\right)},$$

on aura $\psi\left(x + 4p\frac{iK'}{n}\right) = \psi(x)$, et on en déduit la formule suivante:

$$\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)} =$$

$$\left\{\frac{\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)}{\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

de laquelle découle ainsi la démonstration de votre théorème sur l'expression algébrique de $\sin\mathrm{am}(x)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{x}{M}\right)$.

La méthode précédente est fondée principalement, sur ce caractère digne de toute notre attention, de la fonction $\sin\mathrm{am}(x)$, d'être exprimable par le quotient de deux fonctions développables en séries, toujours convergentes, et qui restent les mêmes, ou ne font qu'acquérir un facteur commun, en augmentant l'argument de certaines quantités constantes. Tel est le lien si simple, par lequel se trouve rattaché aux notions analytiques élémentaires, l'ensemble des propriétés caractéristiques de la nouvelle transcendante, qui ont leur source dans le principe de la double période. Mais il est important d'abord d'observer dans toute fonction rationnelle de $\sin\mathrm{am}(x)$, l'analogie des fonctions qui jouent les rôles de numérateur et de dénominateur, avec les fonctions $H$ et $\Theta$. A cet effet, je considère la fonction homogène d'un degré quelconque $n$:

$$\Phi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}\Theta(x) + \ldots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x).$$

On trouve bien facilement, d'après chaque terme en particulier:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-\frac{ni\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x);$$

on a d'ailleurs:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x);$$

ainsi dans ce cas général, l'expression analytique du caractère de la double périodicité, se présente sous la même forme que pour la fonction $\sin\mathrm{am}(x)$. Introduisons aussi la fonction $H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)$, qui représente le numérateur de la dérivée de $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$; en la désignant un instant par $\chi(x)$, on aura sans peine:

$$\chi(x+2K) = -\chi(x), \qquad \chi(x+2iK') = e^{-2\frac{i\pi}{K}(x+iK)}\chi(x).$$

De là résulte que la fonction suivante:

$$(\alpha.)\quad \Pi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \ldots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x)$$
$$+ (H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x))(A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \ldots + I'\Theta^{n-2}(x))$$

donnera encore

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x).$$

Mais on ne peut pas satisfaire à ces deux équations, par une solution plus générale que la fonction définie par l'équation $(\alpha.)$ qui renferme $2n$ constantes arbitraires. Supposons en effet:

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

la seconde équation donnera facilement:

$$a_{m+2n} = (-1)^n a_m q^{m+n},$$

d'où:

$$a_{m+2kn} = (-1)^{kn} a_m q^{km+k^2n},$$

$k$ étant un nombre entier positif ou négatif. On voit par là, que tous les coefficients s'obtiendront au moyen des quantités $a_0, a_1, \ldots a_{2n-1}$ qui restent arbitraires. Si à la condition $\Pi(x+4K) = \Pi(x)$, on substitue la condition plus particulière $\Pi(x+2K) = -\Pi(x)$, tous les coefficients à indices pairs devront être nuls, ce qui réduira à moitié le nombre des constantes arbitraires.

Ainsi je considère l'expression

$$\sin\mathrm{am}(x).F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d.\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f(\sin^2\mathrm{am}(x)),$$

où $F(x)$ et $f(x)$ désignent deux fonctions entières, l'une du degré $m$, l'autre du degré $m-1$; je remplace $\sin\mathrm{am}(x)$ par $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)}$, le numérateur

$$\Pi(x) = \Theta(x)^{2m+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)} \cdot F\left(\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} f\left(\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right\}$$

vérifiera les deux équations:

$$\Pi(x+2K) = -\Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK) = -e^{-(2m+1)\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x)$$

indépendamment des valeurs des coefficients au nombre de $2m+1$ qu'il renferme; il en représentera donc la solution la plus générale. Mais d'une autre part, je considère le produit des $2m+1$ facteurs

$$H(x+a_1).H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m}).H(x+a_{2m+1}):$$

il satisfait évidemment à la première des équations précédentes, et on voit sans peine qu'il vérifiera la seconde, en assujettissant les constantes $a_1, a_2, \ldots a_{2m}, a_{2m+1}$, à la seule condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2m} + a_{2m+1} = 2jK,$$

$j$ étant un nombre entier quelconque. En introduisant un facteur constant, on aura une nouvelle expression de la solution générale, dont la comparaison avec la première, donne le théorème exprimé par l'égalité:

$$\sin\mathrm{am}(x)\,F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d.\sin\mathrm{am}(x)}{dx} f(\sin^2\mathrm{am}(x))$$
$$= \mathrm{Const.}\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

***Ainsi nous obtenons sous la forme trouvée par Abel, les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques relatives à l'addition des arguments.***

Dans le cas le plus simple, celui de $m = 1$, on aura:

$$\sin\mathrm{am}\,x\,(\sin^2\mathrm{am}\,(x) + A) - B\frac{d.\sin\mathrm{am}\,(x)}{dx}$$
$$= \text{Const.}\frac{H(x+a_1)\,H(x+a_2)\,H(x-a_1-a_2)}{\Theta^3(x)}.$$

Les coefficients $A$, $B$ dépendent des quantités $a_1$ et $a_2$, au moyen des deux équations qui expriment que le premier membre s'annule pour $x = -a_1$, $x = -a_2$.

Si l'on suppose $a_1 = -a_2$, on trouvera

$$B = 0, \qquad A = -\sin^2\mathrm{am}\,(a_1),$$

ce qui donnera:

$$\sin\mathrm{am}\,(x)(\sin^2\mathrm{am}\,(x) - \sin^2\mathrm{am}\,(a_1)) = \text{Const.}\frac{H(x)\,H(x+a_1)\,H(x-a_1)}{\Theta^3(x)}:$$

et par suite:

$$\sin^2\mathrm{am}\,(x) - \sin^2\mathrm{am}\,(a_1) = \text{Const.}\frac{H(x+a_1)\,H(x-a_1)}{\Theta^2(x)},$$

$$\log(\sin^2\mathrm{am}(x) - \sin^2\mathrm{am}(a_1)) = \text{const.} + \log H(x+a_1) + \log H(x-a_1) - 2\log\Theta(x).$$

Cette dernière équation conduit à la théorie des fonctions de 3$^{\text{me}}$ espèce, en différentiant par rapport à $a_1$, et intégrant par rapport à $x$.

Mais je reprends les deux équations

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

dont la solution générale est donnée par l'expression

$$\Pi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \ldots + I\Theta^n(x)$$
$$+ (H^1(x)\Theta(x) - H(x)\Theta^1(x))(A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \ldots + I'\Theta^{n-2}(x)).$$

En faisant $\alpha = e^{-p\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$\Phi(x) = \Pi(x) + \alpha\Pi\left(x+\frac{4K}{n}\right) + \alpha^2\Pi\left(x+\frac{8K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\Pi\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

on aura toujours la seconde équation:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x),$$

mais de plus:

$$\Phi\left(x+\frac{4jK}{n}\right) = \alpha^{-j}\Phi(x).$$

Posant donc

$$\Psi(x) = e^{-p\frac{i\pi x}{2K}}\Phi(x),$$

il viendra:

$$\Psi\Big(x+\frac{4K}{n}\Big)=\Psi(x),\qquad \Psi(x+2iK')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')+p\frac{nK'}{K}}\Psi(x).$$

Je mets à la place du facteur $(-1)^n$, $e^{ni\pi}$, et je fais

$$\Psi_1(x)=\Psi\Big(x+\frac{(n-1)K}{n}-\frac{p}{n}iK'\Big);$$

j'obtiendrai par là les deux équations

$$\Psi_1\Big(x+\frac{4K}{n}\Big)=\Psi_1(x),\qquad \Psi_1(x+2iK')=-e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Psi_1(x).$$

On aurait pu faire plus généralement:

$$\Psi_1(x)=\Psi\Big(x+\frac{(n-\nu)K}{n}-p\frac{iK'}{n}\Big),$$

$\nu$ désignant un nombre impair quelconque, et on serait arrivé aux mêmes conditions. En faisant

$$\frac{1}{M}=\frac{nK_1}{K},$$

on trouvera, comme je l'ai déjà établi, que le nombre $n$ soit impair ou pair:

$$\Psi_1(x)=aH_1\Big(\frac{x}{M}\Big)+b\Theta_1\Big(\frac{x}{M}\Big).$$

Nous voici donc parvenus au théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$\Pi(x)+\alpha\Pi\Big(x+\frac{4K}{n}\Big)+\alpha^2\Pi\Big(x+\frac{8K}{n}\Big)+\ldots.+\alpha^{n-1}\Pi\Big(x+\frac{4(n-1)K}{n}\Big)$$
$$=e^{p\frac{inx}{2K}}\Big\{aH_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)+b\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)\Big\}.$$

Sans m'arrêter à la détermination des constantes $a$, $b$, il est clair qu'en remplaçant $\alpha$ successivement par toutes les racines de l'équation binome $x^n=1$, ou en faisant $p=0, 1, 2, \ldots. n-1$, on aura un système de $n$ équations linéaires qui donneront:

$$\Pi(x)=\sum_0^{n-1}{}_p e^{p\frac{inx}{2K}}\Big\{a_pH_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)+b_p\Theta_1\Big(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\Big)\Big\}.$$

Cette nouvelle expression de la fonction $\Pi(x)$, conduit au développement en série de toute fonction rationnelle de $\sin\mathrm{am}(x)$ et de sa dérivée. (J'ai remarqué à ce sujet, qu'en cherchant le développement de la fonction

$$\vartheta(x)=e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x),$$

d'après celui de

$$\Theta(x)=1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi x}{K}-\ldots.=1+\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\Big\{e^{\frac{n\pi}{K}(ix-nK')}+e^{-\frac{n\pi}{K}(ix+nK')}\Big\},$$

on arrivait au résultat suivant:

$$\vartheta(x) = e^{\frac{\pi}{4KK'}x^2} + \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \left\{ e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2niK')^2} + e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-2niK')^2} \right\}.$$

La fonction $e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} H(x)$ donne de même:

$$\sum_0^\infty{}_n (-1)^n \left\{ e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+(2n+1)iK')^2} - e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-(2n+1)iK')^2} \right\}.)$$

La théorie de la transformation découle bien simplement des mêmes principes. Considérez en effet, la somme ou la somme des produits deux à deux, trois à trois etc., ou le produit des $n$ fonctions ($n$ étant impair):

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)} \cdot \frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)} \cdot \frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)} \cdot \cdots \cdot \frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}.$$

Soit $\Phi_1(x)$ le numérateur, $\Phi_0(x)$ le dénominateur: pour l'une et pour l'autre de ces deux fonctions on trouve les conditions:

$$\Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x), \qquad \Phi\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi(x),$$

desquelles il résulte

$$\Phi_1(x) = A_1 H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_1\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right),$$

$$\Phi_0(x) = A_0 H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_0\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Or la fonction $\Phi_1(x)$ sera paire ou impaire selon qu'elle sera relative à une somme de produits d'un nombre pair ou d'un nombre impair de fonctions. Dans le premier cas, on devra faire $A_1 = 0$, dans le second, $B_1 = 0$; d'ailleurs pour $\Phi_0(x)$ on a toujours $A_0 = 0$. De là résulte que la somme des produits 2 à 2, 4 à 4, .... $n-1$ à $n-1$ des quantités

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad \frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)}, \quad \cdots \quad \frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)},$$

est constante, et qu'elles peuvent être considérées comme les racines d'une équation du $n^{\text{me}}$ degré, dont les coefficients sont des fonctions du premier degré de $\frac{H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}{\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}$. On en conclut l'expression connue de cette dernière fonction,

par une fonction rationnelle de l'une quelconque des quantités précédentes etc. Toutes ces propriétés spéciales à la fonction à double période $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$, découlent immédiatement, comme on le voit, de l'équation de définition des fonctions $H$ et $\Theta$ simplement périodiques; on peut même remarquer la grande extension que reçoit le dévoloppement en produit infini de $\sin\mathrm{am}(x)$, qui a été obtenu la première fois comme conséquence des formules de transformation, au moyen de l'égalité obtenue plus haut, savoir:

$$\sin\mathrm{am}(x)F(\sin^2\mathrm{am}(x)) - \frac{d\cdot\sin\mathrm{am}(x)}{dx}f(\sin^2\mathrm{am}(x))$$
$$= \text{Const.}\,\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

---

Jusqu'à présent, je n'ose point encore espérer, Monsieur, d'appliquer avec succès la méthode précédente à l'analyse des fonctions de deux variables à quatre périodes simultanées; ce sera donc sous un autre point de vue, que je vais essayer de lier en quelques points, par des résultats analogues, la théorie des fonctions Abéliennes et des fonctions elliptiques. Ainsi je prendrai les fonctions de 3$^{me}$ espèce, et sous la forme suivante:

$$\int\left\{\left(\frac{\Delta(a)}{x-a}+\frac{\Delta(b)}{x-b}\right)\cdot\frac{dx}{\Delta x}+\left(\frac{\Delta a}{y-a}+\frac{\Delta b}{y-b}\right)\cdot\frac{dy}{\Delta y}\right\};$$

l'intégrale étant assujéttie à s'évanouir, lorsqu'on fait à la fois $x=0$, $y=0$, $\Delta x$ représentant la racine carrée du polynome $p_1x^1+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4+p_5x^5$. Je la désignerai par $\Pi(u, v, \alpha, \beta)$, lorsqu'on y aura fait les substitutions $x=\lambda_0(u, v)$, $y=\lambda_1(u, v)$, les nouvelles variables $u$ et $v$ étant comme à l'ordinaire:

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{dy}{\Delta y},\quad v=\int_0^x\frac{x\,dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{y\,dy}{\Delta y},$$

et de même $a=\lambda_0(\alpha, \beta)$, $b=\lambda_1(\alpha, \beta)$. On aura alors les expressions suivantes des coefficients différentiels:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\Pi}{du}=\Delta a\cdot\frac{x+y-a}{(a-x)(a-y)}+\Delta b\cdot\frac{x+y-b}{(b-x)(b-y)},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\Pi}{dv}=-\frac{\Delta a}{(a-x)(a-y)}-\frac{\Delta b}{(b-x)(b-y)}.$$

J'introduirai pareillement les variables $u$ et $v$ dans les fonctions de seconde espèce, savoir:

$$\int\left(\frac{x^2dx}{\Delta x}+\frac{y^2dy}{\Delta y}\right)\text{ et: }\int\left(\frac{x^3dx}{\Delta x}+\frac{y^3dy}{\Delta y}\right);$$

elles deviendront respectivement:

$$\int((\lambda_0+\lambda_1)dv-\lambda_0\lambda_1 du),\quad \int((\lambda_0^2+\lambda_0\lambda_1+\lambda_1^2)dv-(\lambda_0+\lambda_1)du).$$

Cela posé, la première étant désignée pour un instant par $(u,v)_1$, et la seconde par $(u,v)_2$, je ferai

$$E_1(u,v) = 2p_4(u,v)_1+3p_5(u,v)_2 \quad \text{et} \quad E_2(u,v) = p_5(u,v)_2;$$

on aura alors le théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$1.\quad \Pi(u,v,\alpha,\beta)-\Pi(\alpha,\beta,u,v)$$
$$= p_3(\alpha v-\beta u)+\alpha E_1(u,v)+\beta E_2(u,v)-uE_1(\alpha,\beta)-vE_2(\alpha,\beta),$$

de laquelle se tirent les valeurs des fonctions complètes. Prenons en effet pour $u$ et $v$ deux demi-périodes simultanées $i, j$, les valeurs correspondantes de $x$ et $y$ donneront $\Delta(x)=0$, $\Delta(y)=0$; ainsi l'on aura:

$$\Pi(i,j,\alpha,\beta) = p_3(\alpha j-\beta i)+\alpha E_1(i,j)+\beta E_2(i,j)-iE_1(\alpha,\beta)-jE_2(\alpha,\beta).$$

On remarque sur cette expression un singulier genre de discontinuité de la fonction $\Pi$. En effet, les arguments $u$, $v$, étant quelconques, il est hors de doute qu'on peut, sans altérer sa valeur, ajouter les périodes simultanées aux arguments $\alpha$, $\beta$; mais si l'on suppose $u=i$, $v=j$, la fonction deviendra uniquement périodique pour ces indices; c'est ce qu'on vérifie aisément sur la valeur précédente.

L'égalité (1) peut être transformée en une autre plus simple. Posons

$$Z_1(u,v) = E_1(u,v)-Au-Bv, \quad Z_2(u,v) = E_2(u,v)-A'u-B'v$$

et déterminons $A$, $B$, $A'$, $B'$, par les conditions

$$Ai+Bj = E_1(i,j), \quad Ai'+Bj' = E(i',j'),$$
$$A'i+B'j = E_2(i,j), \quad A'i'+B'j' = E_2(i',j'),$$

$i'$, $j'$ désignant deux autres demi-périodes simultanées. Faisons en outre

$$\Phi(u,v,\alpha,\beta) = \Pi(u,v,\alpha,\beta)+uZ_1(\alpha,\beta)+vZ_2(\alpha,\beta)-c(\alpha v-\beta u),$$

$c$ étant une constante dont la valeur est $c=p_2+B-A'$, il viendra:

$$2.\quad \Phi(u,v,\alpha,\beta)-\Phi(\alpha,\beta,u,v).= -c(\alpha v-\beta u).$$

Dans le théorème exprimé par cette égalité, la fonction $\Phi$, comme il aisé de le voir, jouira de la propriété que

$$\Phi(u+2i,v+2j,\alpha,\beta)=\Phi(u,v,\alpha,\beta), \quad \Phi(u+2i',v+2j',\alpha,\beta)=\Phi(u,v,\alpha,\beta);$$

ainsi on obtiendrait une fonction séparément périodique en $u$ et en $v$, en prenant

$$\Psi(u,v,\alpha,\beta) = \Phi\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}, \alpha, \beta\right).$$

Peut-être cela conduira-t-il à un développement de la fonction $\Psi$ de la forme $\Sigma a_{m,n}e^{\sqrt{-1}(mu+nv)}$. J'ai remarqué à ce sujet que, le théorème d'*Abel*, permet-

tant d'exprimer algébriquement

$$\lambda_0\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}\right), \quad \lambda_1\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}\right),$$

au moyen de

$$\lambda_0\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right), \lambda_1\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right) \text{ et } \lambda\left(\frac{i'u}{\pi}, \frac{j'u}{\pi}\right), \lambda_1\left(\frac{i'u}{\pi}, \frac{j'u}{\pi}\right),$$

on obtenait un nouveau genre de réduction des fonctions de deux variables à des fonctions algébriques de fonctions d'une variable, parfaitement analogue à celui que vous m'avez fait, Monsieur, l'honneur de m'écrire; mais ce cas particulier, auquel j'ai été ainsi amené, ne m'a point semblé moins difficile à traiter que le cas général.

Quoiqu'il en soit, le théorème d'*Abel* donnera pour l'addition des arguments dans la fonction $\Pi$, l'égalité:

$$\Pi(u+u', v+v', \alpha, \beta) = \Pi(u, v, \alpha, \beta) + \Pi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

et on aura de même:

3. $$\Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta) + \Phi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta).$$

L'égalité (2), au moyen de laquelle on peut faire l'échange simultané des arguments $u$, $v$ et $\alpha$, $\beta$, nous donnera le théorème correspondant:

$$\Phi(\alpha, \beta, u+u', v+v') = \Phi(\alpha, \beta, u, v) + \Phi(\alpha, \beta, u', v') + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

auquel on pourrait arriver aussi par une voie directe. Cela posé, je mets dans l'équation (3), à la place de $u$, $u'$, $v$, $v'$, respectivement, $i+u$, $i+u'$, $j+v$, $j+v'$; il viendra:

$$\Phi(u+u'+2i, v+v'+2j, \alpha, \beta)$$
$$= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta) + \Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta) + \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta),$$

ou bien:

$$\Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta)$$
$$= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta) + \Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta) + \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta).$$

Cela étant, je fais: $\alpha = u - u'$, $\beta = v - v'$, ce qui donne:

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')$$
$$= \Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v') + \Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v')$$
$$+ \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, u-u', v-v').$$

Je change ensuite, $u'$, $v'$ en $-u'$, $-v'$. Comme la fonction $\Phi$ change de signe avec les deux arguments $u$, $v$, le terme $\Phi(-u'+i, -v'+j, \ldots.)$ pourra s'écrire $-\Phi(u'-i, v'-j, \ldots.)$; et en ajoutant aux deux premiers arguments leurs périodes $2i$, $2j$, $-\Phi(u'+i, v'+j, \ldots.)$, de sorte qu'il viendra

$$\Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')$$
$$= \Phi(u+i, v+j, u+u', v+v') + \Phi(u'+i, v'+j, u+u', v+v')$$
$$+ \log f(u+i, v+j, i-u', j-v', u+u', v+v').$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, et développant dans le second membre par le théorème sur l'addition des deux derniers arguments, il viendra:

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v') + \Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')$$
$$= 2\Phi(u+i, v+j, u, v) - 2\Phi(u'+i, v'+j, u', v') + \text{fonct. log}^e.$$

Enfin, si l'on applique au premier membre le théorème

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v - \beta u),$$

on obtiendra l'égalité

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')$$
$$= \Phi(u+i, v+j, u, v) - \Phi(u'+i, v'+j, u', v') + c(uv'-u'v) + \text{une fonct. log}^e,$$

par laquelle la réduction des fonctions elliptiques de 3$^{me}$ espèce est étendue aux fonctions Abéliennes.

Mais j'ai entrevu un autre genre de démonstration, fondé sur des considérations toutes différentes, et dont je vais essayer de donner l'idée en l'appliquant aux fonctions elliptiques.

Soit, comme à l'ordinaire:

$$\Delta(x) = \sqrt{((1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2))};$$

posons

$$z = \int_0^x \frac{\Delta a \cdot dx}{(x-a)\Delta(x)},$$

on trouvera facilement:

$$\Delta(a) \cdot \frac{dz}{da} = \varkappa^2 \int_0^x \frac{x^2-a^2}{\Delta(x)} dx - \frac{\Delta(x)}{x-a} - \frac{1}{a},$$

et en différentiant de nouveau par rapport à $a$:

$$\frac{d\left(\Delta a \frac{dz}{da}\right)}{da} = -2a\varkappa^2 \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} - \frac{\Delta(x)}{(x-a)^2} + \frac{1}{a^2}.$$

D'ailleurs on a immédiatement:

$$\Delta(x) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\Delta(a)}{x-a}, \quad \frac{d\left(\Delta(x)\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = -\frac{\Delta(a)}{(x-a)^2};$$

on en conclut cette équation:

$$\frac{d\left(\Delta(a)\frac{dz}{da}\right)}{da} \cdot \Delta(a) = \frac{d\left(\Delta(x)\frac{dz}{dx}\right)}{dx} \Delta(x) - 2a\varkappa^2 \Delta(a) \int^x \frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{\Delta(a)}{a^2}.$$

En prenant pour variables indépendantes les arguments $\xi$ et $\alpha$ des fonctions

$$x = \sin\operatorname{am}(\xi), \quad a = \sin\operatorname{am}(\alpha),$$

et mettant $\Delta(\operatorname{am}(\alpha))$ au lieu de $\Delta(\sin\operatorname{am}(\alpha))$, il viendra:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{d^2z}{d\xi^2} - 2\varkappa^2\xi\sin\operatorname{am}(\alpha)\Delta(\operatorname{am}(\alpha)) + \frac{\Delta(\operatorname{am}(\alpha))}{\sin^2\operatorname{am}(\alpha)}.$$

Soit

$$E(\alpha) = \int_0^{\alpha}\sin^2\operatorname{am}(\alpha)\,d\alpha \quad \text{et} \quad z = -\varkappa^2\xi E(\alpha) - \int\frac{d\alpha}{\sin\operatorname{am}(\alpha)} + u;$$

on aura

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}, \quad \text{donc} \quad u = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

Considérons donc l'égalité:

$$u = \int_0^{\xi}\frac{\Delta(\operatorname{am}(\alpha))\,d\xi}{\sin\operatorname{am}(\xi)-\sin\operatorname{am}(\alpha)} - \varkappa^2\xi E(\alpha) + \int\frac{d\alpha}{\sin\operatorname{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

En faisant $\xi = 0$, on a

$$F(\alpha)+f(\alpha) = \int\frac{d\alpha}{\sin\operatorname{am}(\alpha)};$$

on trouverait de même pour $\alpha = 0$,

$$F(\xi)+f(-\xi) = \int\frac{d\xi}{\sin\operatorname{am}(\xi)},$$

donc

$$F(\alpha)+f(\alpha) = F(\alpha)+f(-\alpha) \quad \text{ou} \quad f(\alpha) = f(-\alpha).$$

Je m'arrête un instant à cette remarque; car, sans aller plus loin, on peut tirer de là, les théorèmes fondamentaux des fonctions elliptiques. En effet, en différentiant par rapport à $\xi$, il vient:

$$\frac{\Delta(\operatorname{am}\alpha)}{\sin\operatorname{am}(\xi)-\sin\operatorname{am}(\alpha)} - \varkappa^2E(\alpha) = F'(\alpha+\xi)-f'(\alpha-\xi).$$

Faisant successivement, $\xi = x+a$, $\xi = x-a$, et retranchant on obtient l'égalité

$$\frac{\Delta(\operatorname{am}\alpha)}{\sin\operatorname{am}(x+a)-\sin\operatorname{am}(\alpha)} - \frac{\Delta(\operatorname{am}\alpha)}{\sin\operatorname{am}(x-a)-\sin\operatorname{am}(\alpha)}$$
$$= F'(\alpha+x+a)-F'(\alpha+x-a)-f'(\alpha-x-a)+f'(\alpha-x+a).$$

Or la fonction $f'(x)$ étant impaire, on voit immédiatement que le second membre est symétrique par rapport à $x$ et $\alpha$; on aura donc:

$$\frac{\Delta(\operatorname{am}(\alpha))}{\sin\operatorname{am}(x+a)-\sin\operatorname{am}(\alpha)} - \frac{\Delta(\operatorname{am}(\alpha))}{\sin\operatorname{am}(x-a)-\sin\operatorname{am}(\alpha)}$$
$$= \frac{\Delta(\operatorname{am}(x))}{\sin\operatorname{am}(\alpha+a)-\sin\operatorname{am}(x)} - \frac{\Delta(\operatorname{am}(x))}{\sin\operatorname{am}(\alpha-a)-\sin\operatorname{am}(x)}.$$

De là se tire le théorème d'*Euler* sur l'addition des fonctions elliptiques. Soit en effet $\alpha = 0$, on aura:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)} - \frac{1}{\sin\mathrm{am}(x-a)}$$
$$= \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(a)-\sin\mathrm{am}(x)} + \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(a)+\sin\mathrm{am}(x)} = \frac{2\sin\mathrm{am}(a)\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin^2\mathrm{am}(a)-\sin^2\mathrm{am}(x)},$$

et permutant $x$ et $a$:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)} + \frac{1}{\sin\mathrm{am}(x-a)} = \frac{2\sin\mathrm{am}(x)\Delta(\mathrm{am}(a))}{\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a)};$$

donc, en ajoutant membre à membre:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}(x+a)} = \frac{\sin\mathrm{am}(x)\Delta(\mathrm{am}(a)) - \sin\mathrm{am}(a)\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin^2\mathrm{am}(x)-\sin^2\mathrm{am}(a)};$$

ce qui se ramène sans difficulté à la formule connue. De la même source on tire encore le théorème sur l'addition des arguments dans la fonction de 3$^{me}$ espèce, en opérant ainsi que je l'ai fait dans une lettre adressée à M. *Liouville*, imprimée déjà dans les Comptes-rendus, et qui paraîtra de nouveau dans le prochain numéro du journal de mathématiques. Il ne serait pas difficile d'arriver à la forme que vous prenez ordinairement, Monsieur, pour les fonctions de troisième espèce; il suffirait pour cela de partir de la formule suivante, qu'on démontrerait comme précédemment; savoir, $i$ étant une quelconque des quantités qui donnent $\sin\mathrm{am}(u+i) = \sin\mathrm{am}(u-i)$:

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha+i))}{\sin\mathrm{am}(x+a)-\sin\mathrm{am}(\alpha+i)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha+i))}{\sin\mathrm{am}(x-a)-\sin\mathrm{am}(\alpha+i)}$$
$$= \frac{\Delta(\mathrm{am}(x+i))}{\sin\mathrm{am}(\alpha+a)-\sin\mathrm{am}(x+i)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(x+i))}{\sin\mathrm{am}(\alpha-a)-\sin\mathrm{am}(x+i)},$$

et de prendre $i$ tel, que $\frac{1}{\sin\mathrm{am}(i)} = 0$.

Mais je reviens à l'égalité:

$$\int_0^\xi \frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)\cdot d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)-\sin\mathrm{am}(\alpha)} - \varkappa^2\xi E(\alpha) + \int \frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi).$$

Changeons $\alpha$ en $-\alpha$, puis retranchons membre à membre, il viendra:

$$\int_0^\xi \frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta(\mathrm{am}(\alpha))\cdot d\xi}{\sin^2\mathrm{am}(\xi)-\sin^2\mathrm{am}(\alpha)} - 2\varkappa^2\xi E(\alpha) = F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)-F(\xi-\alpha)-f(-\xi-\alpha).$$

Le second membre pourra encore évidemment être représenté par $F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)$, et puisque le premier s'annule pour $\xi = 0$, et $\alpha = 0$, par $F(\xi+\alpha)-F(\xi-\alpha)$, $F$ étant une fonction paire. Pour la déterminer, différentions par rapport à $\xi$;

puis faisons $\xi = 0$, il viendra:

$$2F'(\alpha) = -\frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta\mathrm{am}(\alpha)}{\sin^2\mathrm{am}(\alpha)} - 2\varkappa^2 E(\alpha),$$

d'où, en posant $Z(\alpha) = \int E(\alpha)\,d\alpha$:

$$F(\alpha) = -\tfrac{1}{2}\log\sin^2\mathrm{am}(\alpha) - \varkappa^2 Z(\alpha);$$

il vient donc cette égalité:

$$\int_0^{\xi} \frac{2\sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta\mathrm{am}(\alpha)\cdot d\xi}{\sin^2\mathrm{am}(\xi) - \sin^2\mathrm{am}(\alpha)}$$

$$= 2\varkappa^2\xi E(\alpha) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\mathrm{am}(\xi-\alpha)}{\sin^2\mathrm{am}(\xi+\alpha)} + \varkappa^2(Z(\xi-\alpha) - Z(\xi+\alpha)),$$

de laquelle se conclut sans peine tout le reste de cette recherche.

# Corrigenda.

Pag. 1 l. 7 ab imo loco $[\cos\omega + \sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}$ lege $[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}$

— 2 l. 11 loco $a=0$ lege $a'=0$

— 4 l. 3 ab imo loco $x^{-(n+1)} = (+x)^{-(n+1)}$ lege $x^{-(n+1)}(2\pm x)^{-(n+1)}$

— 5 l. 10 ab imo loco $\cos\frac{1}{2}\varphi$, $i\sin\frac{1}{2}\varphi$ lege $\cos\frac{1}{2}\omega$, $i\sin\frac{1}{2}\omega$

— — l. 8 et 7 ab imo loco $dx^n$, $dp^n$ lege $dx^m$, $dp^m$

— 7 l. 4 ab imo loco $\Pi(n-m-1)$ lege $\Pi(m-n-1)$

— 9 l. 8 ab imo loco (4.) lege (5.)

— 10 l. 13 ab imo loco $41°-\frac{1}{2}\varphi$ lege $45°-\frac{1}{2}\varphi$

— — l. 8 ab imo loco $\left(\frac{2xK}{\pi}\right)^2$ lege $\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2$

— 14 l. 2 loco $a'=a$ lege $a'=\alpha$

— 15 l. 10 loco $\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m''}$ lege $\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''}$

— 18 l. 20 loco $\frac{1}{2}\varphi$ lege $\frac{1}{2}\varphi_1$

— 19 l. 9 loco $\cos(2\varphi_1-\varphi_1)$ lege $\cos(2\varphi_1-\varphi_2)$

— 20 l. 17 loco $-\gamma$ lege $-\gamma^2$

— 26 l. 7 loco 301 lege 299

— — l. 8 loco 8.27268 lege 8.27269

— 29 l. 1 loco 296 lege 294

— 31 l. 10 loco „de $n-1$ planètes" lege „des $n-1$ planètes"

— — l. 22 loco „regardés comme etc." lege „regardées comme etc."

— 32 et 33. In formulis (8.) et (9.) lege cos $V$ loco cos $U$

— 34. In formula (17.) loco $y\frac{dz_1}{dt} - z\frac{dy_1}{dt}$ lege $y\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy}{dt}$

— 36 l. 3 loco $\alpha$, $\alpha_1$, $\beta$, $\beta_1$ lege $\alpha$, $\alpha_2$, $\beta$, $\beta_1$

— 38. In formula (14.) loco $M\beta = (m_1+m_2)\delta_2 - m_1$ lege $M\beta = (m_1+m_2)\delta_2 - m_2$

— — In formula (15.) loco $\beta = -\frac{m_2}{M}$ lege $\beta = -\frac{m_2}{M}$

— 40. In formula (3.) loco $\cos_1\Omega$ lege $\cos\Omega_1$

— — In formula (5.) loco $-c$ lege $-c_2^2$

— — l. 8 ab imo loco „cet orbite" lege „cette orbite"

— 43 l. 1 loco $dv_1$ lege $\delta v_1$

— — In formula (12.) loco $\text{tang}\, v_1\frac{di}{\sin i}$ lege $\text{tang}\, v_1\frac{di_1}{\sin i_1}$

— — In formula (14.) loco $-\frac{c_2\sin i}{\mu\pi\sin I}dt$ lege $\frac{c_2\sin i_1}{\mu\pi\sin I}dt$

— — l. 16 loco $d.\text{tang}\, i$ c. tang $i_1$ lege $d.\frac{\text{tang}\, i}{\text{tang}\, i_1}$

— — l. 19 loco (11.) lege (12.)

— 44. Ubique in hac pagina loco $U$ legendum $V$.

— — In formula (25.) loco $\mu\frac{d_2r}{dt^2}$ lege $\mu\frac{d^2r}{dt^2}$

— 45. In formula III. loco tang $v$ lege tang $v_1$

— — In formula IV. loco $\delta^2$ lege $\varrho^2$

— — In formula (1.) loco cos $U$ lege cos $V$

Pag. 49 l. 10 loco „In Commentationibus deinde subsequentibus" lege „In quo insuper"
— — l. 14 loco „varii proprietates" lege „variae proprietates"
— 55 l. 18 et 19 loco „termino — ducto" lege „terminis — ductis"
— 56 l. 16 loco $x$ ponendum $x_i$
— — In Nota loco $d_n$ lege $dx_n$
— 59 l. 20 loco $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots$ lege $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots$
— 62. In formula (11.) loco $\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2} \ldots$ lege $\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2} \ldots$;
mox loco „Formula (10.) ope" lege „Formulae (10.) ope"
— 63 l. 2 loco „unctionem" lege „functionem"
— 64 l. 14 loco „mutationis" l. „mutationes"
— — l. 3 ab imo loco $f_1 + \mu\varphi$ lege $f_1 + \mu f$
— 65 l. 11 loco $\Sigma + \lambda\lambda_1' \ldots$ lege $\Sigma \pm \lambda\lambda_1' \ldots$
— 66. In inscriptione §$^{i}$ 4 loco „detur Determinans datum" lege „detur Determinans"
— 67 l. 4 ab imo loco „eum" lege „cum"
— 70 l. 5 loco „qua formula" lege „quae formula"
— 72 l. 10 loco „referri solet" lege „referenda est"
— 74 l. 6 ab imo loco $x, x_2, \ldots$ lege $x_1, x_2, \ldots$
— 76. In Prop. III. loco
$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = X_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial x_n}{\partial x} = X_n$$
ponendum
$$\frac{dx_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx} = X_n$$
— 78 l. 3 loco „in aliis Commentationibus" lege „infra"
— 80. In secunda aequationum (10.) loco $\delta a_k'$ lege $\delta a_k''$
— — l. 11 loco „exbibitas" lege „exhibitos"
— 81. In inscriptione §$^{i}$ 8 post $X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$ adiiciendum $= 0$.
— — l. 6 loco „proposito" lege „proposita"
— 83 l. 3 ab imo loco „provenit" lege „non provenit"
— 87 l. 2 loco $X_\mu$ lege $X\mu$
— 88 l. 9 ab imo loco „definitur, ut" lege „definitur $y$ ut"
— 93. In Prop. II. loco $dt =$ lege $d\tau =$, loco $\frac{dw}{dt}, \frac{dw_1}{dt}, \frac{dw_n}{dt}$ lege $\frac{dw}{d\tau}, \frac{dw_1}{d\tau}, \frac{dw_n}{d\tau}$, loco $\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \ldots\right\} dt$ lege $\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \ldots\right\} d\tau$
— 96 l. 20 loco $\Sigma +$ lege $\Sigma \pm$
— 98 l. 5 loco $\partial w_m, \partial u_k$ lege $dw_m, dw_k$
— — l. 9 post „casus" adde „particulares, alterum"
— — l. 11 loco „et" lege „alterum"
— 102 l. 2 et 6 loco $X$ lege $\Sigma$
— 110. In formula (11.) inter aequationem $X_1 dx = X dx_1$ et antecedentem interpungendum est.
— — l. ultima loco „in principis ultimi Multiplicatoris" lege „ad formandum ultimum Multiplicatorem"
— 113 l. 10 loco $\partial x_1$ lege $dx_1$
— — l. 20 loco „valor" lege „valore"
— 382 l. 14 loco $X', X''$ lege $\log X', \log X''$
— — l. 17 loco „der Factor" lege „die Gröfse"